Teljes függvényvizsgálat

Tanulási cél

A függvényvizsgálat lépéseinek megismerése és begyakorlása.

Motivációs példa

Jelölje egy adott termék árát P , a termék keresleti függvényét pedig $D\left(P\right)=\sqrt{1000-\frac{P}{10}}$. A teljes árbevétel tehát $TR\left(P\right)=P\cdot D\left(P\right)=P\cdot\sqrt{1000-\frac{P}{10}}$.

Milyen árakra van értelmezve a függvény?

Milyen árak esetén növekszik a bevétel és milyen értékek esetén csökken?

Milyen ár mellett lesz maximális a bevétel?

Ha a bevétel növekszik, van-e olyan pontja a függvénynek, ahol a növekedés mértéke csökkeni kezd, azaz szemléletesen van-e inflexiós pontja?

Vajon hogy nézhet ki a függvény görbéje?

A kérdések alapján szeretnénk minél több tulajdonságát leolvasni a függvénynek Ebben a leckében összefoglaljuk, hogy egy átfogó képhez milyen szempontok alapján vizsgálhatjuk a függvényeket.

Elméleti összefoglaló

A teljes függvényvizsgálatot a következő lépésekben végezzük:

1. Az értelmezési tartomány meghatározása.
2. A grafikon és a tengelyek közös pontjainak meghatározása.
3. Szimmetria tulajdonságok vizsgálata.
4. Határértékek az értelmezési tartomány szélein.
5. Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték meghatározása.
6. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pontok meghatározása.
7. Grafikon rajzolása.
8. Az értékkészlet meghatározása.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f\left(x\right)=x^3-3x^2$ függvényen.

Megoldás

1. Az értelmezési tartomány meghatározása.

Egy egyszerű polinomot fogunk vizsgálni. Mivel bármilyen valós számhoz tudunk helyettesítési értéket számolni, így a függvény mindenütt értelmezve van, ezért

$D_f = \mathbb{R}$.

2. A grafikon és a tengelyek közös pontjainak meghatározása.

Egyrészt annak meghatározása, hogy a függvény grafikonja hol metszi az x tengelyt. Ezeket a pontokat az $f(x)=0$ egyenlet megoldásai adják. Oldjuk meg tehát az $x^3-3x^2=0$ egyenletet. A megoldáshoz emeljük ki x -et.

$$x^2(x-3)=0,$$

ami akkor teljesül, ha $x=0$ vagy ha $x=3$. Ebben a két pontban metszi tehát a grafikon az x tengelyt.

Másrészt ide tartozik annak megállapítása, hogy a grafikon hol metszi az y tengelyt. Ilyen persze csak akkor van, ha a nulla eleme az értelmezési tartománynak, ebben az esetben $f(0)$ adja a keresett pontot. A mi esetünkben

$f(0)=0^3-3\cdot 0^2=0$,

a grafikon tehát átmegy az origón.

3. Szimmetria tulajdonságok vizsgálata.

Ebben a pontban vizsgáljuk meg, hogy a függvény páros-e vagy páratlan-e. Mindkettő az $f(-x)$ összetett függvény képletének előállításával dönthető el. Ahhoz, hogy $f(-x)$ -t megkapjuk, az eredeti hozzárendelési utasításba helyettesítsünk be az x helyére $(-x)$ -t. Ennek eredményeként kapjuk, hogy $f(-x)=(-x)^3-3(-x)^2=-x^3-3x^2$.

A függvény akkor páros, ha $f(-x)=f(x)$ (szemléletesen, ha szimmetrikus az y tengelyre), de ez most nem teljesül.

A függvény akkor páratlan, ha $f(-x)=-f(x)$ (szemléletesen, ha szimmetrikus az origóra), de most ez sem teljesül, mivel $-f(x)=-x^3+3x^2$.

Függvényünk tehát se nem páros, se nem páratlan.

4. Határértékek az értelmezési tartomány szélein

Egy függvény értelmezési tartománya általában diszjunkt (véges vagy végtelen) intervallumok uniója. Ezeknek az intervallumoknak a végpontjaiban kell az intervallum felőli egyoldali határértékeket kiszámítani.

Mivel a feladatunkban az értelmezési tartomány a valós számok halmaza $D_f = R = \left]-\infty, \infty\right[$, az intervallum széleit a ∞ és $-\infty$ jelenti. Ezért két limeszt kell kiszámolnunk:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-3x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)=-\infty\,,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3-3x^2\right)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)=\infty\,.$$

5. Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték meghatározása.

Tudjuk, hogy lokális szélsőérték ott lehet, ahol $f'(x)=0$. Elkészítjük tehát a derivált függvényt.

$f'(x)=3x^2-6x$,

Megoldjuk az $f'(x)=0$ egyenletet.

$$3x^2-6x=0$$

$$3x\left(x-2\right)=0$$

aminek a két gyöke $x=0$, illetve $x=2$.

A derivált gyökei beletartoznak az értelmezési tartományba, ezért szélsőérték helyek lehetnek. Tudjuk, hogy a derivált függvény zérushelyei közül azok lesznek szélsőérték helyek, ahol a derivált függvény előjelet vált.

Készítsünk ezután egy táblázatot. Az értelmezési tartomány ennél a feladatnál a valós számok halmaza, azaz egyetlen összefüggő intervallum. A derivált függvény zérushelyei ezt a intervallumot három részre bontja. A táblázat első sorában ezen intervallumokat és a derivált függvény zérushelyeit tüntessük fel. A második sorban majd azt jelezzük, hogy az adott intervallumon milyen előjelű a derivált.

A deriváltfüggvény előjelének eldöntéséhez minden intervallumból válasszunk ki egy-egy tetszőleges pontot, és helyettesítsük be az $f'(x)$ függvénybe.

A $\left]-\infty,0\right[$ intervallumból kivesszük mondjuk a -1-et, és ekkor azt kapjuk, hogy $f'\left(-1\right)=3\cdot\left(-1\right)^2-6\cdot\left(-1\right)=9>0$, ezért az egész intervallumon pozitív az első derivált előjele.

A $\left]0,2\right[$ intervallumból vegyük például az egyet, ekkor $f'\left(1\right)=3\cdot1^2-6\cdot1=-3<0$. Az intervallumon negatív a derivált függvény előjele.

Végül a $\left]2,\infty\right[$ intervallumból válasszuk a hármat, ekkor $f'\left(3\right)=3\cdot3^2-6\cdot3=9>0$. Az intervallumon pozitív az első derivált előjele.

Tudjuk, hogy ahol az első derivált pozitív, ott növekvő a függvény, ahol negatív, ott csökkenő. A táblázat harmadik sorában ezt tüntetjük fel.

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;2[$	2	$]2;\infty[$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	nő ↗	lok. max.	csökken ↘	lok. min.	nő ↗

Látjuk azt is, hogy mindkét zérushely esetén megvan a szükséges előjelváltás, tehát mindkettő valóban szélsőértékhely.

Mivel nullában a derivált pozitívból vált negatívba, itt lokális maximum hely van. A kettőben a derivált előjele negatívból vált pozitívba, itt tehát lokális minimum hely van.

Ki kell még számolni a lokális szélsőérték helyekhez tartozó helyettesítési értékeket, azaz a függvény lokális maximum és a minimum értékét:

$f(0)=0$

$f(2)=2^3-3\cdot 2^2=-4$

6. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pontok meghatározása.

Inflexiós pont ott lehet, ahol $f''(x)=0$. Állítsuk elő a második deriváltat:

$f''(x)=6x-6$

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$6x-6=0$$

Megoldásként $x=1$ pontot kapjuk. Mivel ez a gyök benne van az értelmezési tartományban, ez inflexiós pont is lehet.

Tudjuk, hogy a második derivált zérushelyei közül az(ok) valóban inflexiós pont(ok), ahol a második derivált előjelet vált. Ezt a szélsőértékeknél használt eljáráshoz hasonlóan lehet megvizsgálni. Az eredményeket most is egy táblázatba foglaljuk.

A második deriváltnak most csak egy zérushelye van. Ez a pont két intervallumra bontja a teljes értelmezési tartományt. A táblázat első sorában ezt a felbontást és a második derivált zérushelyét tüntessük fel.

A második derivált előjelének vizsgálatához minden intervallumból válasszunk ki egy-egy pontot és helyettesítsük be az $f''(x)$ függvénybe.

A $]-\infty;1[$ intervallumból vegyük ki a például a nullát, itt $f''(0)=6\cdot(0)-6=-6<0$, ezért az egész intervallumon negatív a második derivált.

A második $]1;\infty[$ intervallumból vegyük ki a kettőt, ekkor $f''(2)=6\cdot(2)-6=6>0$, tehát az egész intervallumon pozitív a második derivált.

Tudjuk, hogy ahol a második derivált pozitív, ott konvex a függvény, ahol negatív, ott konkáv. A második táblázat harmadik sora ezeket az információkat tartalmazza.

x	$]-\infty;1[$	1	$]1;\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$

Megvan tehát a szükséges előjelváltás, az 1 inflexiós pont. Ki kell még számítanunk az inflexiós ponthoz tartozó függvényértéket:

$f(1)=1^3-3\cdot 1^2=-2$.

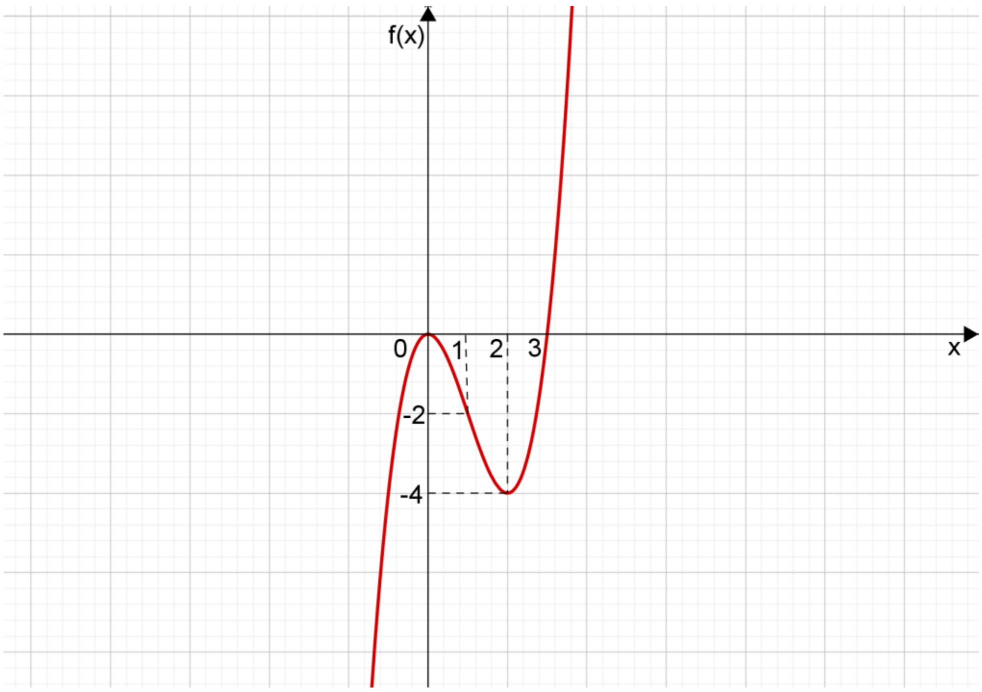
7. Grafikon rajzolása.

Az eddig megszerzett információkat felhasználva felvázolható a függvény grafikonja.

Felvéve egy koordináta-rendszert, először a nevezetes pontokat jelöljük meg. (tengelymetszetek, szélsőértékek, inflexiós pontok)

Ezután vegyük figyelembe a határértékeket és a monotonitási viszonyokat.

Végül, a konvexitási információkat is figyelembe véve, rajzoljuk meg a grafikont.



8. Az értékkészlet meghatározása.

A (helyes) grafikonról leolvasható az értékkészlet.

$R_f=\mathbb{R}$

2. feladat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = x^3 + 2x$ függvényen.

Megoldás

1. Az értelmezési tartomány meghatározása.

A függvény mindenütt értelmezve van, ezért $D_f = \mathbb{R}$.

2. A grafikon és a tengelyek közös pontjainak meghatározása.

Egyrészt annak meghatározása, hogy a függvény grafikonja hol metszi az x tengelyt. Ezeket a pontokat az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásai adják. Oldjuk meg tehát az $x^3 + 2x = 0$ egyenletet. Egyszerű kiemelést alkalmazva

$$x\left(x^2 + 2\right) = 0,$$

ami akkor teljesül, ha $x = 0$, ugyanis az $x^2 + 2 = 0$ egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

Mivel a nulla eleme az értelmezési tartománynak, ebben az esetben $f(0)$ adja a keresett pontot.

$f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 = 0$

A grafikon tehát átmegy az origón.

3. Szimmetria tulajdonságok vizsgálata.

Ebben a pontban azt vizsgáljuk meg, hogy a függvény páros-e vagy páratlan-e. Mindkettő az $f(-x)$ összetett függvény képletének előállításával kezdődik. $f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -x^3 - 2x$.

A függvény akkor páros, ha $f(-x) = f(x)$ (tehát szimmetrikus az y tengelyre), de ez most nem teljesül.

A függvény akkor páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$ (tehát szimmetrikus az origóra), ami most teljesül, mivel $-f(x) = -x^3 - 2x$.

4. Határértékek az értelmezési tartomány szélein

Egy függvény értelmezési tartománya általában diszjunkt (véges vagy végtelen) intervallumok uniója. Ezeknek az intervallumoknak a végpontjaiban kell az intervallum felőli egyoldali határértékeket kiszámítani.

Mivel a feladatunkban az értelmezési tartomány a valós számok halmaza $D_f = \mathbb{R} = \left]-\infty, \infty\right[$, ezért két limeszt kell kiszámolnunk:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 + 2x\right) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = -\infty,$$

$\lim_{x\to\infty}\left(x^3+2x\right)=\lim_{x\to\infty} x^3\left(1+\frac{2}{x^2}\right)=\infty$.

5. Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték meghatározása.

Tudjuk, hogy lokális szélsőérték ott lehet, ahol $f'(x)=0$. Elkészítjük tehát a derivált függvényt.

$f'(x)=3x^2+2$

Ott lehetnek lokális szélsőértékek, ahol az $f'(x)=0$. Esetünkben $3x^2+2=0$ egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán, mivel egy pozitív számhoz, azaz kettőhöz mindig egy nemnegatív számot adunk, az eredmény csak pozitív lehet. Ez azt jelenti, hogy a függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

Az $f'(x)=3x^2+2$ függvény tetszőleges valós szám esetén pozitív, amiből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az $f(x)$ függvény az egész értelmezési tartományon nő.

6. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pontok meghatározása.

Inflexiós pont ott lehet, ahol $f''(x)=0$. Állítsuk elő a második deriváltat:

$f''(x)=6x$

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$6x=0$$

Megoldásként $x=0$ pontot kapjuk. Mivel ez a gyök benne van az értelmezési tartományban, ez az inflexiós pont lehet.

Tervezzük meg a táblázatot. Az értelmezési tartomány a valós számok halmaza, és ezt az összefüggő intervallumot a második derivált függvény zérushelye két részre bontja.

A $]-\infty;0[$ intervallumból vegyük ki a nullát, itt $f''(-1)=6\cdot(-1)=-6<0$, ezért az egész intervallumon negatív a második derivált.

A második $]0;\infty[$ intervallumból vegyük a kettőt, ekkor $f''(2)=6\cdot(2)=12>0$, tehát az egész intervallumon pozitív a második derivált.

Tudjuk, hogy ahol a második derivált pozitív, ott konvex a függvény, ahol negatív, ott konkáv. A második táblázat harmadik sora ezeket az információkat tartalmazza.

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$

Megvan tehát a szükséges előjelváltás, a nulla inflexiós pont. Ki kell még számítanunk az inflexiós pont második koordinátáját:

$f(0) = 0^3 + 2 \cdot (0) = 0$.

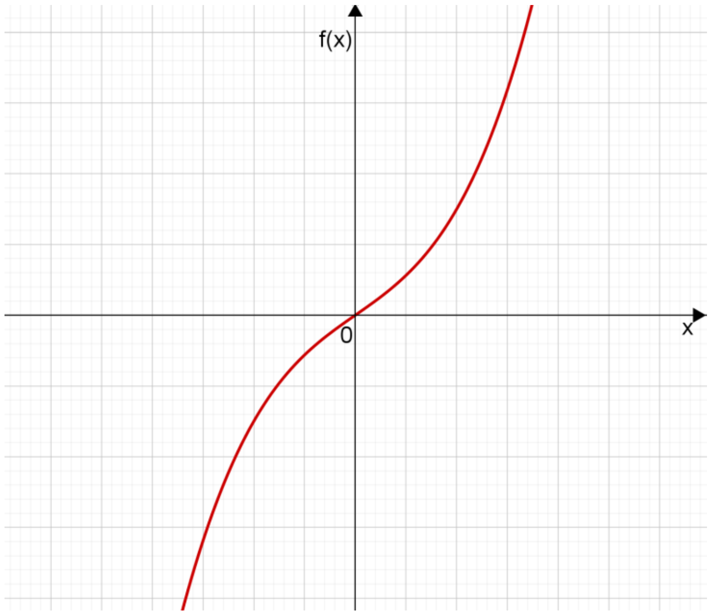
7. Grafikon rajzolása.

Az eddig megszerzett információkat felhasználva felvázolható a függvény grafikonja.

Felvéve egy koordináta-rendszert, először a nevezetes pontokat jelöljük meg. (tengelymetszetek, szélsőértékek, inflexiós pontok)

Ezután vegyük figyelembe a határértékeket és a monotonitási viszonyokat.

Végül, a konvexitási információkat is figyelembe véve, rajzoljuk meg a grafikont.



8. Az értékkészlet meghatározása.

A (helyes) grafikonról leolvasható az értékkészlet.

$R_f = \mathbb{R}$

3. feladat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ függvényen.

Megoldás

1. Az értelmezési tartomány meghatározása.

Mivel nullával nem tudunk osztani, ezért vizsgáljuk, hogy $x^2+1\neq 0$ mikor teljesül. Mivel egy pozitív számhoz, azaz egyhez mindig egy nemnegatív számot adunk, az eredmény csak pozitív lehet. Így

$D_f=\mathbb{R}$.

2. A grafikon és a tengelyek közös pontjainak meghatározása.

Az $f(x)=0$ egyenlet megoldása $x=0$, ami az x tengellyel vett metszetet adja, azonban $f(0)=0$ miatt, itt metszi a grafikon a függőleges tengelyt is.

3. Szimmetria tulajdonságok vizsgálata.

A függvény paritását vizsgálva látjuk, hogy

$$f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}=-f(x),$$

tehát a függvény páratlan.

4. Határértékek az értelmezési tartomány szélein

Mivel a feladatunkban az értelmezési tartomány a valós számok halmaza $D_f=\mathbb{R}=\left]-\infty;\infty\right[$, ezért csak a végtelenekben kell kiszámolni a határértékeket. A számlálóból is és a nevezőből is kiemelve x^2-et kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

Teljesen hasonlóan

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

5. Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték meghatározása.

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

A derivált nulla, ha a tört számlálója nulla, ez nyilván $x=-1$ és $x=1$ esetén teljesül. Mindkét gyök az értelmezési tartományban van.

Elkészítjük a táblázatot.

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;1[$	1	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok. min.	nő $\nearrow$	lok. max.	csökken $\searrow$

Az első intervallumból a -2-t helyettesítve $f'(-2)=-\frac{3}{25}<0$.

A második intervallumból 0-t helyettesítve $f'(0)=1>0$.

Végül a harmadik intervallumból 2-t helyettesítve $f'(2)=-\frac{3}{25}<0$.

Így kaptuk a második sor előjeleit. Látjuk, hogy az első derivált mindkét zérushelye esetén megvan az előjelváltás, ezért mindkettő szélsőérték hely, mégpedig a -1 lokális minimum hely, az 1 lokális maximum hely.

A minimum értéke $f(-1)=-\frac{1}{2}$, a maximum értéke (a páratlanság miatt is) $f(1)=\frac{1}{2}$.

6. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pontok meghatározása.

$$f''(x)=\frac{-2x\left(x^2+1\right)^2-\left(1-x^2\right)2\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{-2x\left(x^2+1\right)-4x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=$$

$$=\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Az $f''(x)=0$ egyenletnek most három megoldása van: $x=-\sqrt{3},\quad x=0,\quad x=\sqrt{3}$. Mindhárom az értelmezési tartományban van.

Most az alábbi táblázatot készíthetjük el.

x	$]-\infty;-\sqrt{3}[$	$-\sqrt{3}$	$]-\sqrt{3};0[$	0	$]0;\sqrt{3}[$	$\sqrt{3}$	$]\sqrt{3};\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$	inflexiós pont	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$

Az előjeleket, például, a következő számok behelyettesítésével kaphatjuk:

az első tartományból válasszuk a -2 -t, ekkor $f''(-2)=-\frac{4}{125}<0$, a második tartományból a -1-et, ekkor $f''(-1)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}>0$,

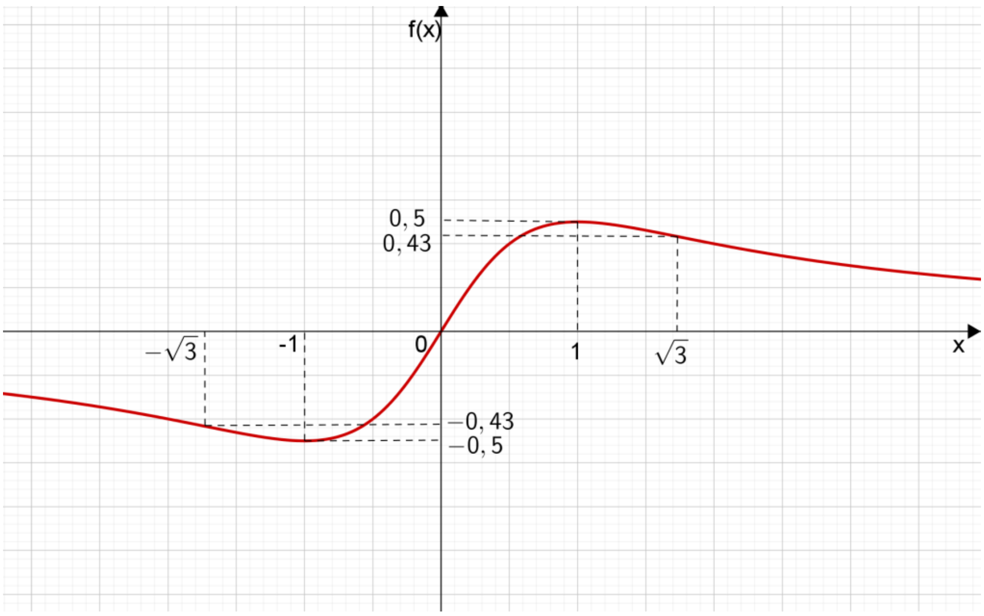
a harmadikból az 1 -et, ekkor $f''(1)=-\frac{1}{2}<0$,

a negyedikből 2 -t, ekkor $f''(2)=\frac{4}{125}>0$.

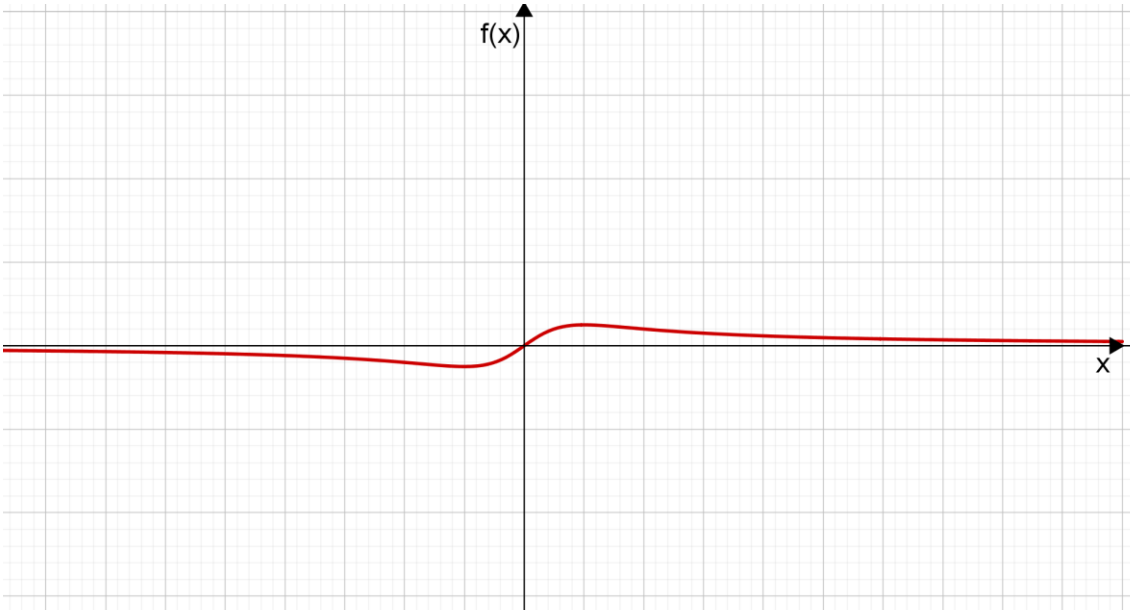
Látjuk, hogy a második derivált mindhárom zérushelye esetén megvan az előjelváltás, mind a három valóban inflexiós pont. Az inflexiós pontok függvényértékei: $f\left(-\sqrt{3}\right)=f(-1,73)=-\frac{\sqrt{3}}{4}=-0,43$; $f(0)=0$ és $f\left(\sqrt{3}\right)=f(1,73)=\frac{\sqrt{3}}{4}=0,43$.

7. Grafikon rajzolása.

A grafikont most is a nevezetes pontok berajzolásával kezdjük. Figyelembe véve a monotonitási és konvexitási viszonyokat is, az alábbi ábrát kaphatjuk:



A határértékek azt mondják, hogy a függvény a végtelenek felé hozzásimul az x tengelyhez. Ügyeljünk a páratlanság érzékeltetésére, azaz arra, hogy a grafikon az origóra szimmetrikus.



8. Az értékkészlet meghatározása.

Az ábra alapján világos, hogy a függvény a lokális minimuma és a lokális maximuma közötti értékeket veszi fel, beleértve azokat is, tehát

$$R_f = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right].$$

4. feladat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f\left(x\right) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$ függvényen.

Megoldás

1. Az értelmezési tartomány meghatározása.

Mivel a nevezőben nulla nem lehet, így

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; \infty[.$$

2. A grafikon és a tengelyek közös pontjainak meghatározása.

Az $f(x)=0$ egyenletnek most két gyöke van: $x=-1$ és $x=1$. Mivel a nulla nem eleme az értelmezési tartománynak, a grafikon nem metszi a függőleges tengelyt.

3. Szimmetria tulajdonságok vizsgálata.

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^3}=\frac{x^2-1}{-x^3}=-\frac{x^2-1}{x^3}=-f(x),$$

a függvény tehát páratlan.

4. Határértékek az értelmezési tartomány szélein

Az értelmezési tartomány két intervallumból áll, ezeknek négy széle van, négy limeszt kell tehát kiszámolnunk. (Valójában a páratlanság miatt csak kettőt.)

Ezek:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3}\cdot\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1}=0,$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-1}{x^3}=\frac{-1}{0^-}=\infty,$$

hiszen a számláló -1-hez tart, a nevező pedig nullához, de mindig negatív.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-1}{x^3}=\frac{-1}{0^+}=-\infty,$$

a páratlanság miatt persze az előző limesz mínusz egyszerese, és végül

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^3}=0,$$

most is igaz, hogy ez a mínusz végtelenben vett határérték mínusz egyszerese.

5. Monotonitás vizsgálata, lokális szélsőérték meghatározása.

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^3\right)-\left(x^2-1\right)3x^2}{x^6}=\frac{2x^4-3x^4+3x^2}{x^6}=\frac{-x^4+3x^2}{x^6}=\frac{3-x^2}{x^4}$$

Az $f'(x)=0$ egyenlet megoldásai: $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$.

Az első derivált mindkét zérushelye az értelmezési tartományba esik, meg kell őket vizsgálnunk. Az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza.

x	$\left]-\infty;-\sqrt{3}\right[$	$-\sqrt{3}$	$\left]-\sqrt{3};0\right[$	0	$\left]0;\sqrt{3}\right[$	$\sqrt{3}$	$\left]\sqrt{3};\infty\right[$
$f'(x)$	–	0	+	nincs értelmezve	+	0	–
$f(x)$	csökken ↘	lok.min.	nő ↗	nincs értelmezve	nő ↗	lok.max.	csökken ↘

Az $f'(x)$ előjeleit rendre a következő helyettesítésekkel kaptuk:

Első intervallum: $f'(-2)=-\dfrac{1}{16}<0$

Második intervallum: $f'(-1)=2>0$

Harmadik intervallum: $f'(1)=2>0$

Negyedik intervallum: $f'(2)=-\dfrac{1}{16}<0$

Az első derivált mindkét zérushelyén előjelet vált, ezért mindkettő szélsőérték hely, mégpedig $-\sqrt{3}$ lokális minimum hely, $\sqrt{3}$ lokális maximum hely. A lokális minimum értéke $f\left(-\sqrt{3}\right)=\dfrac{2}{-\sqrt{27}}\approx -0,38$, a lokális maximum, a páratlanság miatt, ennek mínusz egyszerese, $f\left(\sqrt{3}\right)\approx 0,38$.

6. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pontok meghatározása.

$$f''(x)=\frac{-2x\left(x^4\right)-\left(3-x^2\right)4x^3}{x^8}=\frac{-2x^5-12x^3+4x^5}{x^8}=\frac{2x^5-12x^3}{x^8}=\frac{2\left(x^2-6\right)}{x^5}$$

$f''(x)=0$ akkor és csak akkor, ha $x=-\sqrt{6}$, $x=\sqrt{6}$. A második derivált mindkét zérushelye az értelmezési tartományba esik. A táblázatunk most az alábbi:

x	$\left]-\infty;-\sqrt{6}\right[$	$-\sqrt{6}$	$\left]-\sqrt{6};0\right[$	0	$\left]0;\sqrt{6}\right[$	$\sqrt{6}$	$\left]\sqrt{6};\infty\right[$
$f''(x)$	-	0	+	nincs értelmezve	-	0	+
$f(x)$	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$	nincs értelmezve	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$

Az előjeleket, alkalmas számok behelyettesítésével meghatározhatóak.

Azonban az előjelek megkaphatók a következő okoskodással is.

Egy tört előjelét kell kiszámolnunk. Ez akkor pozitív, ha a számláló és a nevező egyforma előjelű, akkor negatív, ha különböző előjelűek.

A számlálóban egy másodfokú kifejezés áll, amelynek képe egy felfelé nyíló parabola, ez tehát a gyökein kívül pozitív, a gyökei között pedig negatív. A nevezőben álló hatvány, a páratlan kitevő miatt, negatív x-ekre negatív, pozitívakra pozitív.

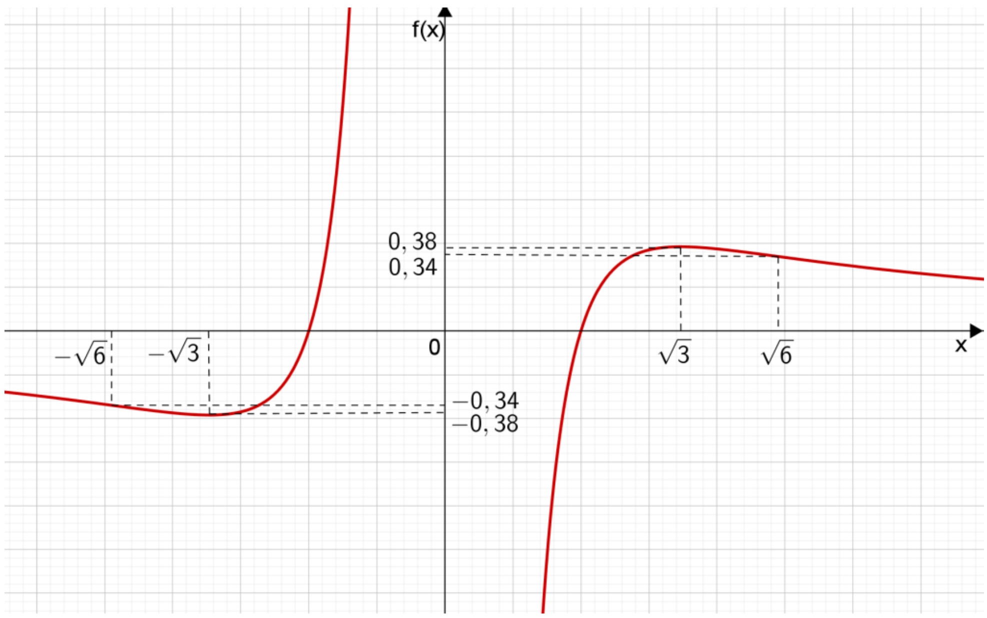
Ezek alapján is megkaphatjuk a fenti előjeleket.

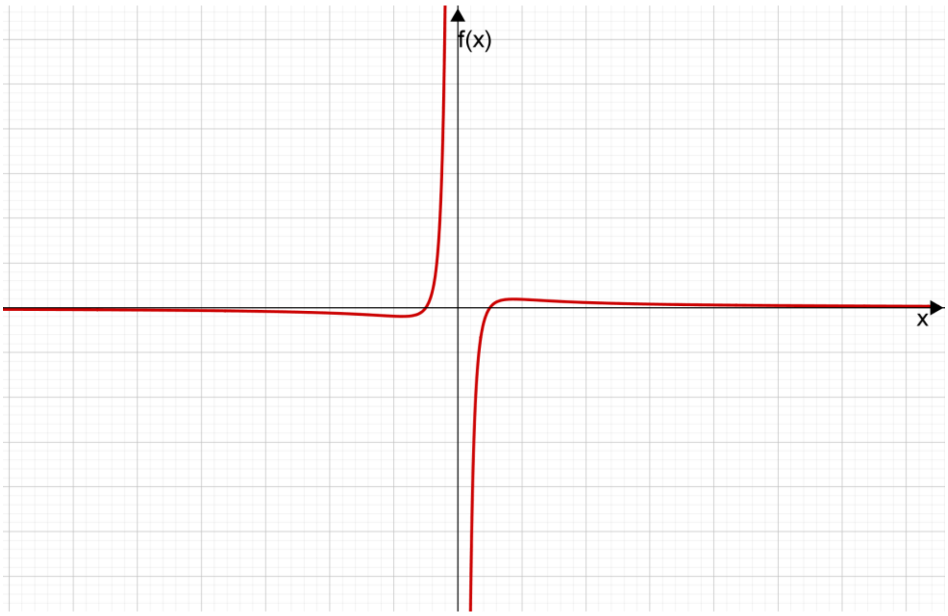
A második derivált mindkét zérushelye inflexiós pont tehát. Az inflexiós pontok második koordinátái: $f\left(-\sqrt{6}\right)=-\dfrac{5}{6\sqrt{6}}\approx -0,34$, $f\left(\sqrt{6}\right)=0,34$.

A nulla előtti és utáni darabon is más előjelű a második derivált, de a nulla persze nem inflexiós pont, hiszen ott értelmezve sincs a függvény. Jól mutatja ez azonban azt, hogy a $-\sqrt{6}$ és $\sqrt{6}$ közötti részt nem lehet egy intervallumként szerepeltetni a fejlécben.

7. Grafikon rajzolása.

Az eddigiek figyelembevételével az alábbi ábrát rajzolhatjuk fel:





8. Az értékkészlet meghatározása.

$R_f = \mathbb{R}$

5. feladat

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ függvényen.

Megoldás

1. Az értelmezési tartomány meghatározása.

Mivel $x^2 + 1 > 0$ minden valós x-re, ezért $D_f = \mathbb{R}$.

2. A grafikon és a tengelyek közös pontjainak meghatározása.

A függvény grafikonja és az y tengely metszéspontját az egyszerűbb meghatározni. Mivel a 0 eleme az értelmezési tartománynak, akkor csak be kell helyettesítenünk a függvénybe. (A grafikon az y tengelyt legfeljebb egy pontban metszheti.)

$f(0) = \ln(0^2 + 1) = \ln 1 = 0$

A grafikon és az x tengely több helyen is metszheti egymást. Ezen metszéspontok helyét az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásai adják, azaz ilyenkor a függvény zérushelyeit határozzuk meg. Jelen esetben az alábbi egyenletet kell megoldanunk.

$$\ln(x^2 + 1) = 0$$

Tekintsük mindkét oldalt kitevőnek, s emeljük fel az e számot a kitevőre.

$$e^{\ln(x^2+1)} = e^0$$

A bal oldalon függvény és inverze áll egy összetételben, így ott valójában csak az argumentum, azaz x^2+1 áll.

$$x^2+1 = e^0 = 1$$

Ennek az egyenletnek pedig nyilvánvalóan csak az $x=0$ a megoldása. A függvénynek tehát most csak egy zérushelye van, és ez az $x=0$. A függvény grafikonja tehát átmegy az origón, így egyetlen helyen van közös pontja az x és az y tengellyel.

Mivel korábban már kiderült, hogy $f(0)=0$, így előre tudhattuk, hogy az $x=0$ zérushely lesz. Az egyenlet megoldásával azt igazoltuk, hogy csak ez az egyetlen zérushely létezik.

3. Szimmetria tulajdonságok vizsgálata.

Mivel tudjuk, az x^2+1 páros függvény, s jelen esetben ez a belső függvény egy összetett függvényben, így sejthető, hogy függvényünk páros lesz. Igazoljuk ezt. Egy függvény akkor páros, ha $f(-x)=f(x)$ minden $x \in D_f$ esetén. Ennek teljesülését kell ellenőriznünk.

$$f(-x) = \ln\left((-x)^2+1\right) = \ln\left(x^2+1\right) = f(x)$$

Ez minden $x \in D_f$ esetén teljesül, tehát valóban páros a függvény. A grafikonja így szimmetrikus lesz az y tengelyre.

4. Határértékek az értelmezési tartomány szélein.

Mivel az értelmezési tartomány a valós számok halmaza, így két határértéket kell csak vizsgálnunk, egyrészt a mínusz végtelenben, másrészt pedig a végtelenben. Mert összetett függvény határértékét kell vizsgálnunk, így először a belső függvény határértékét határozzuk meg, majd vesszük a külső függvény határértékét azon a helyen, ahova a belső függvény tart.

Kihasználva, hogy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+1\right)=\infty$$

Kihasználva, hogy $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+1\right)=\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(x^2+1\right)=\infty$$

Mivel a függvény páros, így előre tudhattuk, hogy a mínusz végtelenben és a végtelenben meg fog egyezni a határérték.

5. Monotonitás és szélsőérték vizsgálata.

Deriváljuk a függvényt. Az összetett függvényekre vonatkozó szabályt használjuk.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)' = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

Oldjuk meg az $f'(x)=0$ egyenletet.

$$\frac{2x}{x^2+1}=0$$

Csak a számlálót kell vizsgálnunk, így a $2x=0$ egyenletet kapjuk, aminek nyilván $x=0$ az egyetlen megoldása.

Készítsük el a szokásos táblázatot.

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

A minimum értékét megkapjuk, ha a függvénybe 0-t helyettesítünk. Mivel ezt már korábban megtettük, így tudjuk, hogy

$f(0)=0$.

Nem csak áthalad tehát az origón a függvény hanem itt lokális minimuma is van. A táblázatból az is látható, hogy ez a minimum nem csak lokális, hanem globális is, azaz a függvény a teljes értelmezési tartományán itt veszi fel a legkisebb értéket.

6. Konvexitás vizsgálata, inflexiós pontok meghatározása.

Állítsuk elő a második deriváltat is. Most a törtekre vonatkozó szabályt kell alkalmaznunk.

$$f''(x)=\frac{2\cdot\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Oldjuk meg az $f''(x)=0$ egyenletet.

$$\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0$$

Ismét csak a számlálóval kell foglalkoznunk, így a $2-2x^2=0$ egyenletet kapjuk.

Ebből az $x^2=1$ egyenlet következik, aminek megoldásai $x=\pm1$.

A második derivált előjelének vizsgálatakor nyilván csak a számlálóval kell foglalkozni, hisz a nevező biztosan pozitív.

Mivel a $2-2x^2$ olyan másodfokú függvény, amelyben a főegyüttható negatív, így a két gyök között vesz fel pozitív, s a kisebb gyök előtt ill. a nagyobb gyök után negatív értékeket. Így az alábbiakat mondhatjuk.

Ha $x<-1$, akkor $f''(x)<0$.

Ha $-1 < x < 1$, akkor $f''(x) > 0$.

Ha $x > 1$, akkor $f''(x) < 0$.

Készítsük most el a konvexitásról a táblázatot.

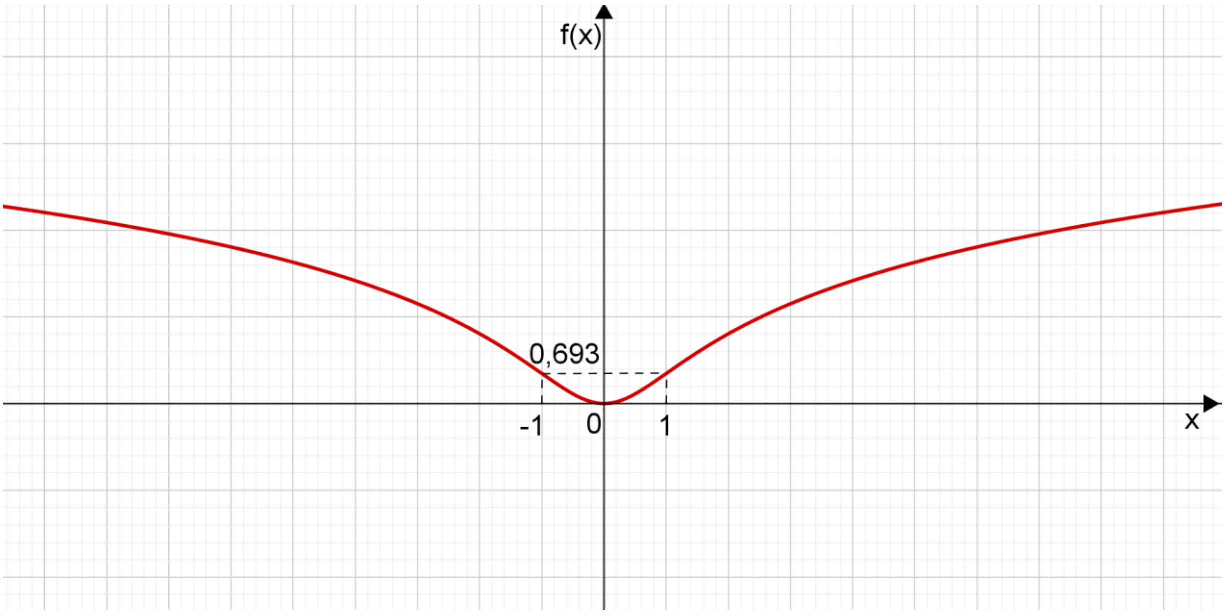
x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;1[$	1	$]1;\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkáv $\cap$	inflexiós pont	konvex $\cup$	inflexiós pont	konkáv $\cap$

Határozzuk meg az inflexiós pontok második koordinátáit. Helyettesítsük a függvénybe az inflexiós pontok helyét, azaz a ± 1-et. Mivel a függvény páros, így nyilván meg fog egyezni a két helyen a függvény értéke.

$$f(-1) = f(1) = \ln(1^2 + 1) = \ln 2 \approx 0,693$$

7. Grafikon rajzolása.

Az eddig megszerzett információk alapján vázlatosan megrajzolhatjuk a függvény grafikonját. Először jelöljük meg a nevezetes pontokat a koordináta rendszerben. Ilyenek a tengelymetszetek, a szélsőértékek, és az inflexiós pontok. Ezután felhasználva a határértékeket, a monotonitási és konvexitási viszonyokat vázoljuk a grafikont. Így az ábrán látható alakú grafikont kapjuk.



8. Az értékkészlet meghatározása.

Az ábráról leolvasható, hogy 0 a legkisebb érték, melyet felvesz a függvény. Így a függvény értékkészlete a következő:

$$R_f = [0;\infty[.$$