Integrálszámítás

Integrálási szabályok

Tanulási cél

Szorzatfüggvényekre vonatkozó integrálási technikák megismerése és különböző típusokra való alkalmazása

Motivációs feladat

Valószínűség-számításnál találkozhatunk a következő problémával. Egy valószínűségi változó várható értékének meghatározásához szükségünk van az $\int -0,2xe^{-0,2x}dx$ határozatlan integrálra. Az integrálás nehézségét az adja, hogy nem tudunk olyan általános szabályokat mondani, ami szorzat, hányados vagy összetett függvények esetén mindig használható lenne. Azzal fogunk próbálkozni, hogy ismert deriválási szabályok megfordításával új integrálási módszereket kapjunk.

Elméleti összefoglaló

Első esetként vizsgáljuk az összetett függvény deriválási szabályát. Tudjuk, hogy összetett függvény deriválja a külső függvény deriváltja az eredeti belső függvény szerint, szorozva a belső függvény deriváltjával.

Nézzünk két példát:

Ha $\left(\sin(x^2+5x)\right)' = \cos(x^2+5x)(2x+5)$, akkor

$$\int \cos(x^2+5x)(2x+5)\,dx = \sin(x^2+5x)+c$$

Ha $\left(e^{x^4}\right)' = 4x^3 \cdot e^{x^4}$, akkor

$$\int 4x^3 \cdot e^{x^4}dx = e^{x^4} + c$$

Mi a közös a két integrálban? Mindkét esetben az integrandus egy olyan szorzatfüggvény, ahol az egyik tényező egy összetett függvény, a másik pedig éppen az összetett függvény belső függvényének deriváltja. A végeredményekben pedig az a közös, hogy csak a külső függvény primitív függvényét adtuk meg az eredeti belső függvény szerint. Az ötlet nem csak ezen két esetben működik, általában is igaz a következő tétel:

Tétel: Ha valamely intervallumon $g(x)$ egy differenciálható függvény és $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$ és ha $f(g(x))$ összetett függvény létezik, akkor $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c$.

Kidolgozott feladatok

1. **feladat**

$$\int (2x+1)(x^2+x)^3 dx$$

Megoldás

Az integrandus egy szorzatfüggvény, amelyben az egyik tényező, $(x^2+x)^3$ egy összetett függvény x^3 külső és x^2+x belső függvénnyel. Ennek deriváltja pedig $(x^2+x)' = 2x+1$. Tehát használhatjuk az új integrálászi szabályt. Csak az x^3 külső függvényhez kell primitív függvényt keresni.

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c.$$

Az új szabály szerint, a kapott primitív függvény lesz az új külső függvény, a belső pedig az eredeti.

Tehát

$$\int (2x+1)(x^2+x)^3 dx = \int \underbrace{(2x+1)}_{g'(x)} \cdot \underbrace{(x^2+x)^3}_{f(g(x))} dx = \frac{(x^2+x)^4}{4} + c$$

2. feladat

$$\int \frac{tg^5 x}{\cos^2 x} dx$$

Megoldás

Az integrandus egy törtfüggvény. Ebből az alakból nem látszik, hogy miért alkalmazhatnánk az új módszert. De ha észrevesszük, hogy $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ és az integrandust átírjuk az alábbi alakra, akkor minden a helyére kerül.

$$\int \frac{tg^5 x}{\cos^2 x} dx = \int (tgx)^5 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \underbrace{(tgx)^5}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{g'(x)} dx =$$

A $(tgx)^5$ lesz az összetett függvény x^5 külső és tgx belső függvénnyel, amelynek deriválja az integrandus másik tényzője. Minden a helyén van, alkalmazhatjuk az új integrálási módszert.

Mivel $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$ ezért

$$\int \frac{tg^5 x}{\cos^2 x} dx = \int (tgx)^5 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{(tgx)^6}{6} + c = \frac{tg^6 x}{6} + c$$

3. feladat

$$\int 3xe^{-5x^2} dx$$

Megoldás

Az integrandus egy szorzatfüggvény. e^{-5x^2} az összetett függvény e^x külső és $-5x^2$ belső függvénnyel. Mivel $\left(-5x^2\right)' = -10x$, ezért azt mondhatjuk, hogy a belső függvény deriváltja majdnem ott van. Csak a 3-ast ki kellene cserélni (-10) -re. De ezt egy bővítéssel el tudjuk érni.

$$\int 3xe^{-5x^2} dx = 3 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \int -10xe^{-5x^2} dx =$$

Ezzel a bővítéssel minden a helyére került, csak az összetett függvény külső függvényéhez kell primitív függvényt keresni az eredeti belső függvény szerint.

Mivel $\int e^x dx = e^x + c$, ezért

$$\int 3xe^{-5x^2} dx = -\frac{3}{10} \int -10xe^{-5x^2} dx = -\frac{3}{10} \int \underbrace{-10x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{e^{-5x^2}}_{f(g(x))} dx = -\frac{3}{10} \cdot e^{-5x^2} + c$$

4. feladat

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$$

Megoldás

Az integrandus egy törtfüggvény. Ebből az alakból nem látszik, hogy miért is lehetne a tanult módszert alkalmazni rá. De vegyük észre, hogy az integrandusban szerepel $\ln x$ és $\frac{1}{x}$ és tudjuk, hogy $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$. Alakítsuk át egy kicsit az integrandust.

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\cdot\sqrt{\ln x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}\cdot\underbrace{\sqrt{\ln x}}_{f(g(x))}\,dx =$$

Most már jól látható, hogy a $\sqrt{\ln x}$ összetett függvény $\sqrt{x}$ külső és $\ln x$ a belső függvény, amelynek deriváltja pedig éppen a szorzat másik tényezője. A $\sqrt{x}$ külső függvény primitív függvényét kell még megkeresni, majd venni az eredeti belső függvénnyel alkotott összetett függvényét.

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

Folytassuk az integrálást:

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\left(\ln x\right)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{\left(\ln x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + c = \frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + c$$

Elméleti összefoglaló

A szorzatfüggvény deriválási szabályának megfordításából egy újabb integrálási módszerhez juthatunk. Az alábbi tétel erről szól.

Tétel: Ha az $u\left(x\right)$ és $v\left(x\right)$ függvények differenciálhatóak, valamint $u'\left(x\right)v\left(x\right)$ integrálható, akkor az $u\left(x\right)v'\left(x\right)$ függvény is integrálható és

$$\int u\left(x\right)v'\left(x\right)dx = u\left(x\right)v\left(x\right) - \int u'\left(x\right)v\left(x\right)dx.$$

$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$

A parciális integrálás alkalmazásával az $u(x)v'(x)$ függvény integrálását az $u'(x)v(x)$ függvény integrálásra vezetjük vissza. A szabályt olyan szorzatok esetén célszerű alkalmazni, melyekben a $v'(x)$-nek megfelelő tényező könnyen integrálható, s ha az $u'(x)v(x)$ könnyebben integrálható mint $u(x)v'(x)$. A szabály alkalmazásával soha nem fejeződik be a feladat megoldása, hiszen a jobb oldalon a második tag még integrált tartalmaz. Ezért is kapta elnevezését a szabály, hiszen csak részben történik meg az integrálás. Az alkalmazás során nagyon fontos, hogy az integrálandó szorzat tényezői közül melyiket választjuk $u(x)$-nek, illetve $v'(x)$-nek. Erre vonatkozóan a kidolgozott feladatokban adunk útmutatást.

Kidolgozott feladatok

1. feladat:

$\int (2x-6) \cdot \sin x dx$

Megoldás

Az integrandus egy szorzat, s azon belül is egyik tényezője polinom, a másik pedig a $\sin x$. Próbálkozzunk az előbb megismert parciális integrálás alkalmazásával.

Válasszuk a polinomot $u(x)$-nek, mert így a szabály alkalmazása után visszamaradó integrálban majd ezen polinom deriváltja fog megjelenni, ami már csak egy konstans. Így a parciális integrálás után már nem szorzatfüggvény áll majd az integrandusban.

Legyen tehát $u(x) = 2x-6$ és $v'(x) = \sin x$.

Ekkor $u'(x) = 2$ és $v(x) = -\cos x$.

Az ismert $v'(x)$-ből integrálással kaptuk meg $v(x)$-et. Ezért fontos, hogy a $v'(x)$-nek választott tényező könnyen integrálható legyen.

Helyettesítsünk be a szabályba.

$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

$\int (2x-6) \cdot \sin x dx = (2x-6) \cdot (-\cos x) - \int -2 \cdot \cos x dx =$

A feladatot még nem oldottuk meg, hisz még van egy integrálunk. Ebből azonban a konstans szorzót kiemelhetjük, s utána már csak egy alapintegrál marad. Így az eredmény a következő lesz:

$$-(2x-6)\cdot\cos x-\int -2\cdot\cos x\,dx=-(2x-6)\cdot\cos x+2\int\cos x\,dx=$$
$$-(2x-6)\cdot\cos x+2\sin x+c.$$

2. feladat

$$\int(3x+7)\cdot 5^x\,dx$$

Megoldás

Az integrandus egy hasonló szorzat, mint amilyen az előző feladatban szerepelt. Az első tényező most is egy polinom, a második tényezőben pedig 5^x vette át a $\sin x$ szerepét. Az 5^x is könnyen integrálható, így megint a parciális integrálással próbálkozhatunk.

Legyen $u(x)=3x+7$ és $v'(x)=5^x$.

Ekkor $u'(x)=3$ és $v(x)=\dfrac{5^x}{\ln 5}$.

Helyettesítsünk be a szabályba.

$$\int u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\,dx$$

$$\int(3x+7)\cdot 5^x\,dx=(3x+7)\cdot\frac{5^x}{\ln 5}-\int 3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}dx=$$

A még meghatározandó integrálból emeljük ki a konstansokat, így már csak egy alapintegrál marad, amit meghatározunk.

$$(3x+7)\cdot\frac{5^x}{\ln 5}-\int 3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}dx=(3x+7)\cdot\frac{5^x}{\ln 5}-\frac{3}{\ln 5}\int 5^x\,dx=$$
$$(3x+7)\cdot\frac{5^x}{\ln 5}-\frac{3}{\ln 5}\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+c=\frac{5^x}{\ln 5}\left(3x+7-\frac{3}{\ln 5}\right)+c$$

A két feladatban az volt a közös, hogy olyan szorzatot kellett integrálnunk, melyek egyik tényezője egy polinom, másik tényezője pedig az a^x, e^x, $\sin x$, $\cos x$ függvények valamelyike. Ilyenkor célszerű a parciális integrálást alkalmazni olyan szereposztással, hogy $u(x)$ a polinom legyen, $v'(x)$ pedig a másik tényező. A szabályt használva a visszamaradó integrálban eggyel alacsonyabb fokszámú polinom marad már csak. Ha az eredeti polinom elsőfokú volt, akkor a visszamaradó integrálban $u'(x)$ már csak egy konstans lesz, ami az integrálból kiemelhető. A $v'(x)$-nek megfelelő függvényt könnyen tudjuk integrálni, hiszen az a^x, e^x, $\sin x$, $\cos x$ függvények mindegyike alapintegrál. Ráadásul az integrálás eredményeként kapott $v(x)$ függvényt is könnyű integrálni, mert az is alapintegrál, vagy annak számszorosa lesz. Ez akkor fontos, ha a polinom nem elsőfokú. Ilyenkor a szabályt többször kell alkalmazni egymás után, egészen addig, míg a polinomból csak egy konstans marad a deriválások után. Erre majd a későbbiekben mutatunk példát.

3. feladat

$$\int (4x+3)\cdot \ln x dx$$

Megoldás

Ismét szorzatot kell integrálnunk, és az egyik tényező most is polinom, de a másik tényezőben álló $\ln x$ más típusú mint ami az előző két feladatban szerepelt. Akkor ott olyan függvény állt, amely alapintegrál volt. A $\ln x$ nem ilyen függvény. Ezért nem célszerű őt $v'(x)$-nek választani, hiszen akkor a $v(x)$-et nem könnyű meghatározni. Legyen tehát a szereposztás most a parciális integrálás során a következő:

$u(x)=\ln x$ és $v'(x)=4x+3$.

Ekkor $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ és $v(x)=4\cdot\dfrac{x^2}{2}+3x=2x^2+3x$.

Helyettesítsünk ezután a szabályba.

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$$

$$\int (4x+3)\cdot \ln x dx=\left(2x^2+3x\right)\cdot \ln x-\int\left(2x^2+3x\right)\cdot\frac{1}{x}dx=$$

A még meghatározandó integrálban egyszerűsítsünk, majd végezzük el az integrálást. Nem lesz nehéz dolgunk, mert az egyszerűsítés után egy polinomot kell integrálnunk.

$$=\left(2x^2+3x\right)\cdot \ln x-\int (2x+3)dx=\left(2x^2+3x\right)\cdot \ln x-\left(x^2+3x\right)+c$$

4. feladat

$\int x^3 \cdot \ln x dx$

Megoldás

Hasonló szorzatot kell integrálnunk mint az előző feladatban, csak most a polinom nem több tagból áll, hanem csak egyetlen tagból. Ugyanúgy járhatunk el, mint az előbb.

Legyen $u(x) = \ln x$ és $v'(x) = x^3$.

Ekkor $u'(x) = \frac{1}{x}$ és $v(x) = \frac{x^4}{4}$.

Helyettesítsünk ezután a szabályba.

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

$$\int x^3 \cdot \ln x dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

A visszamaradó integrálban most is egyszerűsítsünk, a konstans szorzót pedig emeljük ki. Mivel x-nek egy hatványa marad csak, így ezt már könnyen tudjuk integrálni.

$$\frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c$$

Az eredmény egyszerűbb alakban is felírható, ha kiemeljük amit lehet.

$$\frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + c$$

5. feladat

$\int \ln x dx$

Megoldás

Az előző négy feladatban szorzat állt az integrálban, de most nem. Azaz egy egyszerű trükkel most is szorzattá alakíthatjuk. Írjuk az $\ln x$-et $1 \cdot \ln x$ formában. Az 1 is egy polinom, csak nagyon egyszerű polinom, hiszen 0 a fokszáma. $\left(1 = x^0\right)$ Így már ugyanúgy járhatunk el, mint az előző két feladatban.

Legyen $u(x)=\ln x$ és $v'(x)=1$.

Ekkor $u'(x)=\frac{1}{x}$ és $v(x)=x$.

Helyettesítsünk ezután a szabályba.

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx$$

$$\int 1\cdot \ln x dx = x\cdot \ln x-\int x\cdot \frac{1}{x}dx$$

A visszamaradó integrálban egyszerűsítsünk, majd hajtsuk végre az integrálást.

$$x\cdot \ln x-\int x\cdot \frac{1}{x}dx = x\cdot \ln x-\int 1dx = x\cdot \ln x - x + c$$

Az eredmény kiemelés után most is felírható más alakban.

$$x\cdot \ln x - x + c = x(\ln x - 1)+c$$

Az utolsó három feladatban olyan szorzatokat kellett integrálni, melyek egyik tényezője polinom volt, ez lehetett csak egy konstans is, a másik tényezője pedig az $\ln x$. Ilyenkor is alkalmazható a parciális integrálás, de nem a polinomot kell $u(x)$-nek választani, hanem az $\ln x$-et. Ennek oka az, hogy az $\ln x$ nem alapintegrál, így nem olyan könnyen integrálható mint például a $\sin x$. Természetesen ez azt is jelenti, hogy ilyenkor a polinom lesz a $v'(x)$. Ez jó is, hiszen egy polinomban csak pozitív egész kitevős hatványfüggvények állhatnak, amelyek pedig könnyen integrálhatóak. Az integrálás növeli a hatványok fokszámát, így az integrálás utáni polinomban nem szerepel konstans tag. A legalacsonyabb fokszámú tag is legalább elsőfokú. Mivel az $\ln x$ deriváltja $\frac{1}{x}$, így a visszamaradó integrálban egy legalább elsőfokú tagokat tartalmazó polinomot szorzunk $\frac{1}{x}$-szel. Ilyenkor mindig egyszerűsíthetünk x-szel, és egy polinomot kapunk. Ezt pedig könnyen tudjuk integrálni.

További kidolgozott feladatok

1. feladat

$$\int \left(4x^2-6x+5\right)\cdot \cos x dx$$

Megoldás

Az integrandus egy szorzat, melynek első tényezője egy polinom, második tényezője pedig a $\cos x$. Ilyen esetben a parciális integrálás $\left(\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v\right)$ vezet célhoz.

Legyen $u = 4x^2 - 6x + 5$ és $v' = \cos x$.

Ekkor $u' = 8x - 6$ és $v = \sin x$.

Helyettesítsünk a szabályba.

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

$$\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x dx = \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \sin x - \int \left(8x - 6\right) \cdot \sin x dx$$

A még meghatározandó integrál ugyanolyan típusú, mint amilyen az eredeti feladat volt, csak 1-gyel alacsonyabb a polinom fokszáma, azaz már csak elsőfokú. Ezért újra alkalmazzuk a parciális integrálást.

Legyen $u = 8x - 6$ és $v' = \sin x$.

Ekkor $u' = 8$ és $v = -\cos x$.

Amikor a szabályba helyettesítünk, akkor figyeljünk oda, hogy az integrál előtt negatív előjel állt, ami az integrál helyére kerülő mindkét tagra vonatkozik majd. Ezért célszerű zárójelet használni a behelyettesítésnél, hogy csökkentsük a hiba lehetőségét.

$$\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x dx = \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \sin x - \left((8x - 6) \cdot (-\cos x) - \int 8(-\cos x) dx\right)$$

Bontsuk fel a zárójelet, és emeljük ki a konstanst az integrálból.

$$\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x dx = \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x - 8\int \cos x dx$$

Már csak egy alapintegrálást kell elvégezni, majd amit lehet össze kell vonni. Az eredmény a következő:

$$\int \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \cos x dx = \left(4x^2 - 6x + 5\right) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x - 8\sin x + c =$$
$$= \left(4x^2 - 6x - 3\right) \cdot \sin x + (8x - 6) \cdot \cos x + c.$$

2. feladat

$$\int (7x + 13) \cdot e^{-2x} \mathrm{d}x$$

Megoldás

Az integrandus egy szorzat, melynek első tényezője egy polinom, második tényezője pedig egy exponenciális függvény egy lineáris belső függvénnyel. A korábbi feladatok azt sugallják, hogy most is alkalmazzuk a parciális integrálást. A szokott módon a polinomot deriváljuk, és e^{-2x} -t pedig integráljuk.

Az integrálásnál használjuk az előző félévben már tanult szabályt:

$$\int f\left(ax+b\right)=\frac{F\left(ax+b\right)}{a}+c$$

Ennek eredményeként kapjuk a következő primitív függvényt.

$$\int e^{-2x}dx=\frac{e^{-2x}}{-2}+c$$

Most már alkalmazzuk a parciális integrálást.

Legyen $u=7x+13$ és $v'=e^{-2x}$.

Ekkor $u'=7$ és $v=\frac{e^{-2x}}{-2}$.

Helyettesítsünk be.

$$\int(7x+13)\cdot e^{-2x}\mathrm{d}x=(7x+13)\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}-\int 7\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\mathrm{d}x=-(7x+13)\cdot\frac{e^{-2x}}{2}+\int 7\cdot\frac{e^{-2x}}{2}\mathrm{d}x=$$

Az új integrandust egyszerűbb alakra tudjuk hozni, ha a konstans szorzókat kivisszük az integráljel elé.

$$-(7x+13)\cdot\frac{e^{-2x}}{2}+\frac{7}{2}\int e^{-2x}\mathrm{d}x=$$

Vegyük észre, hogy a e^{-2x} integrálását a feladat megoldása során már egyszer elvégeztük.

$$-(7x+13)\cdot\frac{e^{-2x}}{2}+\frac{7}{2}\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}+c=-(7x+13)\cdot\frac{e^{-2x}}{2}-\frac{7}{4}\cdot e^{-2x}+c$$

A kapott eredményt rövidebb alakban is fel tudjuk írni, ha $\frac{1}{2}e^{-2x}$ -t kiemeljük.

$$-(7x+13)\frac{e^{-2x}}{2}-\frac{7}{4}e^{-2x}+c=\frac{e^{-2x}}{2}\left(-7x-13-\frac{7}{2}\right)+c=\frac{e^{-2x}}{2}\left(-7x-16,5\right)+c$$

Az eredmény:

$$\int(7x+13)\cdot e^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{e^{-2x}}{2}\left(-7x-16,5\right)+c$$

3. feladat

$$\int 10\cdot\ln(5x)\mathrm{d}x$$

Megoldás

Az integrandus egy szorzat, melynek első tényezője egy polinom, második tényezője pedig logaritmusfüggvény egy lineáris belső függvénnyel. Használjuk a parciális integrálást. A korábbi feladatok megoldása alapján a logaritmus függvényt deriváljuk és a konstans függvényt pedig integráljuk.

Legyen $u = \ln(5x)$ és $v' = 10$.

Ekkor $u' = \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{1}{x}$ és $v = 10x$

Helyettesítsünk be.

$$\int 10 \ln(5x) \mathrm{d}x = 10x \ln(5x) - \int 10x \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x = 10x \ln(5x) - \int 10 \, \mathrm{d}x =$$

Vegyük észre, hogy a lineáris belső függvény ellenére is működik a parciális integrálás. Az egyszerűsítést után most is csak egy alapintegrálhoz jutottunk.

Tehát a végeredmény:

$$\int 10 \cdot \ln(5x) \mathrm{d}x = 10x \ln(5x) - 10x + c$$

4. feladat

$$\int (x^4 + 7x^2) \ln(x) \mathrm{d}x$$

Megoldás

Az integrandus egy polinom és $\ln x$ szorzatából áll. Ez is egy típusfeladat a parciális integrálásra. Már tudjuk, hogy ilyen esetben a logaritmusfüggvényt fogjuk deriválni.

Legyen $u = \ln x$ és $v' = x^4 + 7x^2$.

Ekkor $u' = \frac{1}{x}$ és $v = \frac{x^5}{5} + 7 \cdot \frac{x^3}{3}$.

Helyettesítsünk be:

$$\int (x^4 + 7x^2) \ln(x) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^5}{5} + 7 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \ln x - \int \left(\frac{x^5}{5} + 7 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \frac{1}{x} \mathrm{d}x =$$

Ebben az esetben is egyszerűsítsünk x -szel az új integrandusban.

$$\left(\frac{x^5}{5}+7\frac{x^3}{3}\right)\ln x-\int\left(\frac{x^5}{5x}+7\cdot\frac{x^3}{3x}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^5}{5}+7\cdot\frac{x^3}{3}\right)\ln x-\int\left(\frac{x^4}{5}+7\cdot\frac{x^2}{3}\right)\mathrm{d}x=$$

Az integrál mögött most is egy egyszerű polinom van, csak az együtthatók nem szép egész számok, mint az előző feladatoknál. Írjuk át az integrandust a követező alakba, hogy az integrálás lépései jól láthatóak legyenek.

$$\left(\frac{x^5}{5}+7\cdot\frac{x^3}{3}\right)\ln x-\int\left(\frac{1}{5}\cdot x^4+\frac{7}{3}\cdot x^2\right)\mathrm{d}x=$$

Most már csak tagonkénti integrálást kell alkalmazni hatványfüggvényekre.

$$\left(\frac{x^5}{5}+7\frac{x^3}{3}\right)\ln x-\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{7}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\right)+c=\left(\frac{x^5}{5}+7\cdot\frac{x^3}{3}\right)\ln x-\frac{x^5}{25}-7\cdot\frac{x^3}{9}+c$$

Tehát a végeredmény:

$$\int(x^4+7x^2)\ln(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^5}{5}+7\cdot\frac{x^3}{3}\right)\ln x-\frac{x^5}{25}-7\cdot\frac{x^3}{9}+c$$

5. feladat

$$\int\ln^2 x\mathrm{d}x$$

Megoldás

Már a korábbiakban csak $\ln x$ -t kiintegráltuk. Az ötlet az volt, hogy egy egyes szorzóval a feladatot parciális integrálásra vezettük vissza. Alkalmazzuk ugyanezt az ötletet.

$$\int\ln^2 x\mathrm{d}x=\int 1\cdot\ln^2 x\mathrm{d}x=$$

Legyen $u=\ln^2 x$ és $v'=1$.

Ekkor $u'=2\ln x\cdot\frac{1}{x}$ és $v=x$.

Helyettesítsünk be, majd az új integrandusban egyszerűsítsünk x -szel.

$$x\ln^2 x-\int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x\ln^2 x-\int 2\ln x\mathrm{d}x=$$

Fejezzük be az integrálást. Egy szorzatot kaptunk, melynek egyik tényezője 2 , ami egy nulladfokú polinom, a másik pedig $\ln x$. Alkalmazzuk újra a parciális integrálást.

Legyen $u = \ln x$ és $v' = 2$.

Ekkor $u' = \frac{1}{x}$ és $v = 2x$.

Helyettesítsünk be, de ügyeljünk arra, hogy az integrál előtti negatív előjel az újonnan kapott mindkét kifejezésre vonatkozik, így tegyük ki most is a zárójelet.

$$= x\ln^2 x - \left(2x\ln x - \int \underbrace{2x \cdot \frac{1}{x}}_{2} \mathrm{d}x \right) =$$

Az új integrandusban elvégezve az egyszerűsítést csak 2 -t kell kiintegrálni:

$$x\ln^2 x - \left(2x\ln x - 2x\right) + c = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c$$

A végeredmény tehát:

$$\int \ln^2 x \mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c$$