6. Számsorozat fogalma és tulajdonságai

Tanulási cél: A számsorozat fogalmának és elemi tulajdonságainak megismerése. A monotonitás, korlátosság vizsgálatának elsajátítása. Nevezetes sorozatok határértékének megismerése.

Motivációs feladat:

Változtassunk az egyszerű kamatos kamatra adott feladaton. Ne egyszer fizessünk be a bankba egy bizonyos összeget, hanem rendszeresen, például havonta. Feltéve, hogy tőkésítés is havonta történik, és a kamatláb fix, vajon mennyi pénzt sikerül összegyűjteni 5 hónap alatt?

Az első alkalommal befizetett összegnél ötször kell kamatos kamatot számolni, a másodiknál már csak négyszer, és így tovább.

$$T_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^5+T_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^4+T_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^3+T_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+T_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^1$$

A fenti képletbe behelyettesítve tudunk számolni. Kicsit időigényes, de még megoldható. De mi van akkor, ha 5 évről lenne szó? A felírt összeg hasonló gondolatmenettel már az $5\cdot 12=60$ tőkésítés miatt 60 tagból állna. Hogyan lehetne ezt az összeget minél egyszerűbben kiszámolni?

Ilyen és ehhez hasonló feladatokra ad választ a matematika következő fejezete, amit *számsorozatok*nak nevezünk.

Elméleti összefoglaló

Speciális függvényekkel fogunk foglalkozni, amelyek értelmezési tartománya a természetes számok halmaza, de helyettesítési értékként már bármilyen valós számot kaphatunk.

A függvényeknél szokásos jelöléstől is kicsit eltérünk. Eddig a függvényeket f -fel, g -vel vagy h -val jelöltük. Most az a, b vagy c betűket használjuk. A független változót pedig x helyett n -nel jelöljük, ami alsó indexként jelenik meg. Ez a jelölésbeli eltérés azonnal felismerhetővé teszi, hogy a függvények egy speciális halmazával, a számsorozatokkal foglalkozunk.

Definíció: Számsorozatnak nevezzük azokat a speciális függvényeket, amelyek a természetes számokhoz egy-egy valós számot rendelnek.

$$a(n)=a_n:\mathbb{N}\to\mathbb{R}.$$

Nézzünk meg egy-két konkrét sorozatot és próbáljunk meg egyszerű logikai következtetésekkel a legelemibb tulajdonságaitkat leolvasni.

1. *Példa:* $a_n=\frac{1}{n}$, ha n=1;2;...

Írjuk fel a sorozat néhány tagját. Ha a sorozatot megadó képletben az n helyére az 1-et írunk, megkapjuk az első elemet. Ha 2-t írunk a másodikat, és így tovább.

$$a_1=\frac{1}{1}=1\quad a_2=\frac{1}{2}\quad a_3=\frac{1}{3}\quad a_4=\frac{1}{4}\quad a_{10}=\frac{1}{10}\quad a_{100}=\frac{1}{100}\quad a_{1000}=\frac{1}{1000}.$$

Ha n helyére egyre nagyobb természetes számot írunk, akkor reciproka egyre kisebb pozitív szám lesz. Azaz nagyobb indexhez kisebb helyettesítési érték tartozik. A függvényeknél már megismert hasonló tulajdonság alapján az ilyen sorozatokat nevezzük *szigorúan monoton csökkenő*knek.

Ebből az következik, hogy az első elemnél, azaz 1-nél nagyobbat a sorozat nem vesz fel. Szintén a függvényekhez hasonlóan, mondjuk azt, hogy a sorozat *felső korlát*ja 1, azaz a sorozat *felülről korlátos*. A sorozat csak pozitív értékeket vesz fel, így minden sorozatbeli elem nagyobb 0-nál. Ezt a tulajdonságot hívjuk úgy, hogy a sorozat *alulról korlátos* és a nullát nevezzük *alsó korlát*nak.

Vegyük észre, hogy a sorozat nagyon nagy indexű elemei egyre közelebb és közelebb esnek nullához. Úgy is mondhatnánk, hogy a sorozat nagyon nagy indexű elemei minden határon túl megközelítik a nullát. Ezt az érdekes tulajdonságot a továbbiakban úgy mondjuk, hogy a sorozatnak a *határérték*e nulla és jelöljük a következőképpen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{vagy} \quad a_n \to 0 \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{n} \to 0$$

Megjegyzés: Hasonló következtetésekhez juthatunk az $a_n = \dfrac{\text{pozitív valós}}{n^k}$ típusú sorozatoknál (k természetes szám), például az $a_n = \dfrac{5}{n^3}$ sorozatnál.

2. *Példa:* $c_n = 5^n$ ha n=1; 2;...

Írjuk fel a sorozat néhány elemét.

$c_1 = 5 \quad c_3 = 125 \quad c_{10} = 9\ 765\ 625 \quad c_{100} \approx 7{,}8 \cdot 10^{69} \quad c_{1000} = 5^{1000}$

A képlet alapján mondhatjuk, hogy minden elem 5-szöröse az előtte lévőnek. Ez pedig azt jelenti, hogy a sorozat minden eleme nagyobb, mint a nála eggyel kisebb indexű. Ezt a későbbiekben *szigorúan monoton növekedés*nek nevezzünk.
A sorozat pozitív tagokból áll, így a nulla most is alsó korlát. De tudunk adni ennél jobb, a nullánál nagyobb alsó korlátot is. A szigorú monoton növekedés miatt a sorozat legkisebb eleme egyben a sorozat alsó korlátja is. Ennél jobb, ennél nagyobb alsó korlát már nem adható. Ezt szokás a sorozat legnagyobb alsó korlátjának nevezni. Tehát most a legnagyobb alsó korlát 5.
A sorozat néhány tagja alapján úgy tudnánk megfogalmazni, hogy a sorozat tagjai a nagyon nagy számok fele tartanak, felső korlát nincs. Ezt a tulajdonságot nevezzük a későbbiekben úgy, hogy a sorozat határértéke plusz végtelen. Jele:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty \quad \text{vagy} \quad c_n \to \infty .$$

3. *Példa:* $d_n = (-2)^n$, ha $n \in \mathbb{N}$.

Írjuk fel a sorozat néhány tagját.

$d_1 = -2 \quad d_4 = 16 \quad d_{10} = 1024 \quad d_{100} \approx 1{,}26 \cdot 10^{30}$

Az a sejtés, hogy a sorozat szigorúan monoton nő. Pedig ez nem igaz.

$d_1 = -2 \quad d_2 = 4 \quad d_3 = -8 \quad d_4 = 16 \quad d_5 = -32$

Most már jobban látjuk, hogy ez a sorozat hol pozitív, hol negatív értékeket vesz fel. Ezt nevezzük úgy, hogy a sorozat nem monton nő, nem monoton csökken, egyszerűbben *nem monoton*. Ebből a példából jól látható, hogy néhány tag felírása nem elegendő, hogy a monotonitást egyértelműen eldöntsük.
Ez a sorozat az előző kettőtől teljesen eltér. A nagy indexű tagok a nagyon nagy pozitív és a nagyon kicsi negatív értékek között ingadozik. Most nem tudunk adni olyan számot, amit a nagy indexű tagok minden határon túl megközelítenek.
A felírt példák alapján a sorozatok jellemzésénél három fontos tulajdonságot fogunk vizsgálni. A monotonitást, a korlátosságot és a határértéket. Adjuk meg ezen tulajdonságok pontos definícióit!

Definíció: Egy a_n sorozat monoton növekvő, ha $a_n \leq a_{n+1}$ minden n természetes szám esetén.
Definíció: Egy a_n sorozat szigorúan monoton növekvő, ha $a_n < a_{n+1}$ minden n természetes szám esetén.
Definíció: Egy a_n sorozat monoton csökkenő, ha $a_n \geq a_{n+1}$ minden n természetes szám esetén.
Definíció: Egy a_n sorozat szigorúan monoton csökkenő, ha $a_n > a_{n+1}$ minden n természetes szám esetén.

Monotonitás precíz vizsgálatához több módszer is alkalmazható. Mi az alábbi tételeket fogjuk használni.

Tételek:
Ha $a_{n+1} - a_n > 0$ minden n természetes szám esetén, akkor a_n szigorúan monoton növekvő.
Ha $a_{n+1} - a_n \geq 0$ minden n természetes szám esetén, akkor a_n monoton növekvő.
Ha $a_{n+1} - a_n < 0$ minden n természetes szám esetén, akkor a_n szigorúan monoton csökkenő.
Ha $a_{n+1} - a_n \leq 0$ minden n természetes szám esetén, akkor a_n monoton csökkenő.

Definíció: Egy a_n sorozatot felülről korlátosnak nevezzük, ha létezik egy olyan K valós szám, amelyre $a_n \leq K$ teljesül minden n természetes szám esetén, és a K számot a sorozat felső korlátjának nevezzük.
Definíció: Egy a_n sorozatot alulról korlátosnak nevezzük, ha létezik egy olyan k valós szám, amelyre $a_n \geq k$ teljesül minden n természetes szám esetén, és a k számot a sorozat alsó korlátjának nevezzük.
Definíció: Egy sorozatot korlátosnak nevezünk, ha alulról és felülről is korlátos.

Ha egy sorozatnak van alsó korlátja, akkor végtelen sok van, hiszen az ennél kisebb összes szám is alsó korlát lesz. Az alsó korlátok tehát egy halmazt alkotnak. Ebben a halmazban mindig van egy legnagyobb elem, melyet a *legnagyobb alsó korlát*nak nevezünk.

Ha egy sorozatnak van felső korlátja, akkor végtelen sok van, hiszen az ennél nagyobb összes szám is felső korlát lesz. A felső korlátok is egy halmazt alkotnak. Ebben a halmazban mindig van egy legkisebb elem, melyet a *legkisebb felső korlát*nak nevezünk.

Kidolgozott feladatok:

1. **feladat:** Írja fel az alábbi sorozat első 3, majd a 21-edik tagját!

$$a_n = \frac{3n+4}{5n-1}, \qquad \text{ha} \qquad n = 1; 2; \ldots$$

Megoldás: Helyettesítsünk a sorozatot megadó képletbe az n helyére rendre egyet, kettőt, hármat, legvégül pedig huszonegyet.

$$a_1 = \frac{3\cdot 1+4}{5\cdot 1-1} = \frac{7}{4}$$

$$a_2 = \frac{3\cdot 2+4}{5\cdot 2-1} = \frac{10}{9}$$

$$a_3 = \frac{3\cdot 3+4}{5\cdot 3-1} = \frac{13}{14}$$

$$a_{21} = \frac{3\cdot 21+4}{5\cdot 21-1} = \frac{67}{104}$$

2. **feladat:** Írja fel az alábbi sorozat $n+1$-edik, majd az $n-2$-edik elemét!

$$a_n = \frac{3n+4}{5n-1}, \qquad \text{ha} \qquad n = 1; 2; \ldots$$

Megoldás: Ha a sorozat $n+1$-edik elemét szeretnénk meghatározni, akkor n helyére a sorozat képletébe nem egy konkrét számot, hanem $n+1$-et kell írni. Hasonlóan az $n-2$ -edik elem felírásához n helyére írjunk $n-2$-t, és rendezzük a számlálót és a nevezőt is.

$$a_{n+1} = \frac{3(n+1)+4}{5(n+1)-1} = \frac{3n+7}{5n+4}$$

$$a_{n-2} = \frac{3(n-2)+4}{5(n-2)-1} = \frac{3n-2}{5n-11}$$

3. **feladat:** Vizsgálja meg az alábbi sorozatot monotonitás szempontjából!

$$a_n = \frac{4n-3}{n}, \qquad \text{ha} \qquad n = 1; 2; \ldots$$

Megoldás: Néhány elem felírásából már azt sejtjük, hogy a sorozat monoton növekvő. Bizonyítsuk be, hogy jó a sejtésünk.

A definíció szerint bármely két egymás követő elemet kell összehasonlítani. Vigyázzunk, nem két konkrét elempárról van szó, hanem bármelyik kettőről. Ennek egyik módszere az, hogy a sorozat $n+1$-edik és n-edik tagjainak különbségét vizsgáljuk bármely természetes szám esetén. Állítsuk elő a sorozat $n+1$ -edik elemét.

$$a_{n+1} = \frac{4(n+1)-3}{(n+1)} = \frac{4n+1}{n+1}$$

Most már felírhatjuk a különbséget.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4n+1}{n+1} - \frac{4n-3}{n} =$$

Hozzuk közös nevezőre a törteket.

$$=\frac{4n+1}{n+1}-\frac{4n-3}{n}=\frac{n(4n+1)-(4n-3)(n+1)}{n(n+1)}=$$

Számlálóban végezzük el a kijelölt műveleteket.

$$=\frac{4n^2+n-\left(4n^2+n-3\right)}{n\left(n+1\right)}=\frac{3}{n\left(n+1\right)}=\frac{+}{+\cdot+}>0$$

Vizsgáljuk meg a kapott törtet. Azt látjuk, hogy a számláló pozitív. Mivel n természetes szám, a nevező is csak pozitív lehet, hiszen két pozitív szám szorzata pozitív. Ez azt jelenti, hogy mindig nagyobb számból vonunk ki egy kisebbet, tehát két egymást követő elemnél a nagyobb indexű mindig nagyobb a nála éppen eggyel kisebb indexű elemnél. Tehát definíció szerint a_n szigorúan monoton nő.

4. feladat: Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából az előbb már vizsgált a_n sorozatot.

$$a_n=\frac{4n-3}{n},\qquad \text{ha}\qquad n=1;2;...$$

Megoldás: Az a_n sorozatról már tudjuk, hogy szigorúan monoton növekvő. Ez azt jelenti, hogy az első elem kisebb, mint bármely utána következő elem. Így az első elem alsó korlátnak tekinthető.

$$a_1=k=1\le a_n \quad \text{minden} \quad n \text{ természetes szám esetén.}$$

Vajon van-e felső korlátja a sorozatnak? Lehet, hogy minden határon túl növekednek az értékék? Ennek eldöntésére alakítsuk át a sorozat képletét. Osszunk le tagonként n-nel!

$$a_n=\frac{4n-3}{n}=4-\frac{3}{n}<4$$

Ebből az alakból nagyon jól látszik, hogy 4-ből mindig kivonunk egy kicsi pozitív számot. Tehát a sorozat felső korlátja 4, és ez azt is jelenti, hogy a_n korlátos. A sorozat minden tagja legalább 1 és kisebb, mint 4.

5. feladat: Vizsgálja meg az alábbi sorozatot monotonitás szempontjából!

$$a_n=\frac{n+3}{n+1},\qquad \text{ha}\qquad n=1;2;...$$

Megoldás: Monotonitás eldöntéséhez vizsgáljuk meg az $a_{n+1}-a_n$ különbség előjelét! Írjuk fel először az $n+1$-edik tagot.

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)+3}{(n+1)+1}=\frac{n+4}{n+2}$$

Most már fel tudjuk írni a vizsgálandó különbséget.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+4}{n+2}-\frac{n+3}{n+1}=\frac{(n+4)(n+1)-(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)}=$$

Végezzük el a számlálóban a kijelölt szorzásokat, majd rendezzük a kifejezéseket.

$$=\frac{n^2+5n+4-(n^2+5n+6)}{(n+1)(n+2)}=\frac{-2}{(n+1)(n+2)}=\frac{-}{+\cdot+}<0$$

Rendezés után a számlálóban csak egy negatív szám maradt. A nevezőben egy szorzat van, amelynek mindkét tényezője pozitív minden lehetséges n -re, így egy negatív és egy pozitív szám hányadosa csak egy negatív szám lehet. Ez azt jelenti, hogy rendre kisebb számból vonunk ki egy nagyobbat, tehát két egymást követő elemnél a nagyobb indexű elem mindig kisebb a nála éppen eggyel kisebb indexűnél. Tehát definíció szerint a_n szigorúan monoton csökkenő.

6. feladat: Vizsgálja meg az alábbi sorozatot korlátosság szempontjából!

$$a_n = \frac{n+3}{n+1}, \qquad \text{ha} \qquad n = 1; 2; ...$$

Megoldás: Az a_n sorozatot már monotonitás szempontjából vizsgáltuk és azt kaptuk, hogy a_n szigorúan monoton csökken. Ez azt jelenti, hogy az első elem nagyobb, mint bármely utána következő elem, így az első elem felső korlátnak tekinthető.

$$a_1 = K = \frac{4}{2} \geq a_n \quad \text{minden} \quad n = 1; 2; ... \text{ esetén}$$

Vajon van-e alsó korlátja a sorozatnak? Vegyük észre, hogy a sorozat minden eleme nagyobb 0-nál, mivel a számláló és a nevező is pozitív minden lehetséges n -re. Így a 0 a definíció szerint alsó korlátnak tekinthető. Nézzük meg, hogy tudunk-e találni egy jobb, a 0-nál nagyobb alsó korlátot. Írjuk át a sorozatot egy másik formába:

$$a_n = \frac{n+3}{n+1} = \frac{n+1+2}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} + \frac{2}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1} > 1$$

A kapott kifejezésből jól látható, hogy 1-hez rendre egy pozitív számot adunk, tehát 1 is egy alsó korlát. Bebizonyítható, hogy ennél jobb, azaz nagyobb alsó korlát már nem létezik, de ennek bizonyításától eltekintünk.

Megjegyzés: Szemléletesen megfogalmazva a számláló nagyobb a nevezőnél minden n természetes szám esetén, akkor a tört csak 1-nél nagyobb szám lehet, tehát az 1 alsó korlát.

7. feladat: Vizsgálja meg monotonitás szempontjából az alábbi sorozatot!

$$b_n = \frac{3-4n}{5-7n}, \qquad \text{ha} \qquad n = 1; 2; ...$$

Megoldás: Az előző feladathoz hasonlóan vizsgáljuk az $n+1$-edik és n-edik tag különbségét.

Először írjuk fel az $n+1$-edik elemét a sorozatnak!

$$b_{n+1} = \frac{3-4(n+1)}{5-7(n+1)} = \frac{-4n-1}{-7n-2}$$

Most már felírható a vizsgálandó különbség:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{-4n-1}{-7n-2} - \frac{3-4n}{5-7n} = \frac{(-4n-1)(5-7n)-(3-4n)(-7n-2)}{(-7n-2)(5-7n)} =$$

Végezzük el a számlálóban a kijelölt szorzásokat, majd rendezzük a kifejezéseket!

$$= \frac{28n^2 - 13n - 5 - (28n^2 - 13n - 6)}{(-7n-2)(5-7n)} = \frac{1}{(-7n-2)(5-7n)} = \frac{+}{- \cdot -} > 0$$

A számlálóban a rendezés után most egy pozitív számot kaptunk. A nevezőben lévő mindkét tényező negatív minden lehetséges n esetén. Így a tört is mindig pozitív, ami azt jelenti, hogy a vizsgált sorozat szigorúan monoton növekvő.

8. feladat: Vizsgálja meg korlátosság szempontjából az alábbi sorozatot!

$$b_n = \frac{3-4n}{5-7n}, \qquad \text{ha} \qquad n = 1; 2; ...$$

Megoldás: Az előző feladatból tudjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton nő, így a legkisebb tagja az első elem, ami tekinthető alsó korlátnak. Írjuk fel a sorozat néhány tagját, hogy vajon lehet-e felső korlátja?

$b_1 = \frac{1}{2} = 1 \quad b_2 = \frac{5}{9} \quad b_{10} = \frac{37}{65} \quad b_{100} = \frac{397}{695} \quad b_{1000} = \frac{3997}{6995}$

A felírt tagok alapján 1-nél kisebb számokat kapunk. Bizonyítsuk, be, hogy ez minden elemre teljesül.

$\frac{3-4n}{5-7n} < 1$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát $5-7n$-nel, ami mindig negatív, ha n természetes szám. Vigyázzunk, ilyenkor az egyenlőtlenség iránya megváltozik!

$3-4n > 5-7n \quad \rightarrow \quad 3n > 2 \quad \rightarrow \quad n > \frac{2}{3}$

A kapott egyenlőtlenség mindig fennáll, ha $n = 1; 2; ...$ természetes szám. Tehát a sejtés igaz, 1 a sorozat egyik felső korlátja. A sorozat felülről és alulról is korlátos.

9. feladat: Vizsgálja meg az alábbi sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából!

$$c_n = 7n^3, \quad \text{ha} \quad n = 1; 2; ...$$

Megoldás: Vizsgáljuk először a monotonitást! Az a sejtésünk, hogy a sorozat monoton növekvő. Írjuk fel az $n+1$-edik elemet!

$$c_{n+1} = 7\left(n+1\right)^3$$

Írjuk fel a $n+1$-edik és az n-edik tag különbségét!

$$c_{n+1} - c_n = 7(n+1)^3 - 7n^3 = 7 \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 7n^3 = 21n^2 + 21n + 7 > 0$$

Mivel rendezés után a különbség három pozitív tag összegére egyszerűsödik, így a sorozat szigorúan monoton növekvő.

Vizsgáljuk most a korlátosságot! A szigorú monoton növekedés miatt a sorozat alsó korlátja a sorozat első eleme, azaz $k = c_1 = 7 \le c_n$, ha n természetes szám.

Vajon van-e felső korlát? Úgy érezzük, hogy nincsen felső korlátja a sorozatnak, ami azt jelenti, hogy bármilyen nagy pozitív számot is adnánk meg, mindig van olyan sorozatbeli elem, ami ezt a nagy számot képes meghaladni. Szemléletesen fogalmazva, bármely nagy pozitív számnál létezik nagyobb eleme a sorozatnak.

Például legyen a nagyon nagy szám 700 000. Azt sejtjük, hogy van olyan tagja a sorozatnak, ami nagyobb, mint 700 000.

$$7n^3 > 700\,000 \quad \rightarrow \quad n^3 > 100\,000 \quad \rightarrow \quad n > 46{,}42$$

Vegyük a sorozat 47. tagját. $c_{47} = 7 \cdot 47^3 = 726\,761$ Valóban nagyobb, mint 700 000. A módszert bármely nagy számra használhatjuk, így c_n felülről nem korlátos. Vegyük észre azonban azt is, hogy ha a megoldásban az is benne van, hogy a sorozat összes olyan tagja, amelynek indexe meghaladja a 46-t, 700 000-nél nagyobb lesz.

Megjegyzés: Hasonlóan eredményre jutnánk a $c_n = n^k$ típusú sorozatoknál (k természetes szám). De ugyanezt mondhatjuk el akkor is, ha a kitevőre csak annyit kötünk ki, hogy legyen pozitív. Például a $c_n = n^{\frac{3}{2}} = \sqrt{n^3}$ sorozat szintén szigorúan monoton nővekvő és felülről nem korlátos.

10. feladat: Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából!

$$a_n = 7^{2n} \quad \text{és} \quad b_n = -7^{2n}, \quad \text{ha} \quad n = 1; 2; \ldots$$

Megoldás: Az a sejtésünk, hogy az a_n sorozat monoton növekvő.

Írjuk fel $n+1$-edik elemet.

$$a_{n+1} = 7^{2(n+1)}$$

Írjuk fel a $n+1$-edik és az n-edik tag különbségét.

$$a_{n+1} - a_n = 7^{2n+2} - 7^{2n} = 7^2 \cdot 7^{2n} - 7^{2n} = 7^{2n}(49-1) = 48 \cdot 7^{2n} > 0$$

Mivel 7 bármely hatványa csak pozitív lehet, így a különbség minden lehetséges n-re pozitív. A sorozat tehát szigorúan monoton növekvő, de akkor a sorozat legkisebb eleme és egyben alsó korlátja is 49.
A sorozat néhány tagját felírva, érezzük, hogy a sorozat nagyon erősen növekszik. Azt tudjuk mondani, hogy a sorozatnak nincs felső korlátja, mivel bármilyen nagyon nagy számot adunk, mindig létezik a sorozatnak olyan tagja, ami nagyobb, mint az előre megadott nagyon nagy szám. Szemléletesen fogalmazva, bármely nagy számnál létezik nagyobb eleme a sorozatnak.
Például legyen a nagyon nagy szám a 10 000 000 000. Milyen n -re fog teljesülni, hogy

$$7^{2n} < 10\,000\,000\,000$$

Vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát!

$$2n \cdot \ln 7 < \ln(10\,000\,000\,000)$$

Osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát $2\ln 7$-tel, ami egy pozitív szám.

Így az egyenlőtlenség iránya nem változik.

$$n > \frac{\ln(10\,000\,000\,000)}{2\ln 7} \approx 5{,}92$$

Azt kaptuk, hogy ha $n = 6$, akkor $a_6 = 7^{6\cdot 2} = 7^{12} = 13\,841\,287\,201$, tényleg nagyobb, mint 10 milliárd. Ez a módszer bármilyen nagy pozitív számnál használható. Tehát a_n valóban felülről nem korlátos.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a megoldásban az is benne van, hogy ha $n > 5$, azaz a 6. tagtól kezdve a sorozat összes többi tagja már nagyobb, mint 10 milliárd.

A b_n sorozat tulajdonságait a mínusz előjel épp az ellenkezőjére megváltoztatja. A növekedésből csökkenés, az alsó korlátból, felső korlát lesz. Így a b_n sorozat szigorúan monoton csökkenő, felső korlátja -49, és alulról nem korlátos, a nagyon kicsi negatív értékek fele tart.
Megjegyzés: Általában is mondhatjuk, hogy a q^n típusú sorozatok, ha $q > 1$ szigorúan monoton növekednek, alulról korlátossak, de felülről nem.

11. feladat: Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság alapján az alábbi sorozatot!

$$d_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{ha} \quad n = 1; 2; \ldots$$

Megoldás: Írjuk fel a sorozat első 5 tagját.

$$d_1 = -0,5; \quad d_2 = 0,25; \quad d_3 = -0,125;$$
$$d_4 = 0,0625 \quad d_5 = 0,03125;$$

Jól látható, hogy a sorozat egymás után következő elemei felváltva pozitívak illetve negatívak. Így azt mondhatjuk, hogy a sorozat nem monoton növekvő és nem monoton csökkenő, egyszerűbben nem monoton.

Mivel 0,5 pozitív egész hatványai 0 és 1 közé esnek, így a páros indexű tagok 0 és 1 közé, a páratlan indexűek pedig -1 és 0 közé esnek. Tehát a sorozat korlátos és felső korlát 1, alsó korlát -1.

Másrészt az is látszik, hogy a sorozat nevezője egyre nagyobb, így az a sejtésünk, hogy a sorozat hol pozitív, hol negatív előjelű számokkal, de minden határon túl megközelíti a nullát, tehát $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$.

Megjegyzés: Hasonló eredményre jutunk a q^n típusú sorozatoknál, ha $|q| < 1$, akkor korlátosak, és minden határon túl megközelítik a nullát.

Elméleti összefoglaló

Egy sorozat határértéke azt mutatja meg, hogy nagyon nagy indexek esetén egy adott sorozat milyen értékeket vehet fel. Találkoztuk már olyan sorozattal, amire azt mondtuk, hogy nagy index esetén a sorozat elemei egy bizonyos szám (jelöljük A-val) közelében vannak. A közelséget fogalmazzuk meg a sorozat elemeinek és az A számnak az eltérésével, távolságával, ami csak pozitív szám lehet. Ezt az eltérést $|a_n - A|$-kel tudjuk kifejezni, ahogy két szám eltérését, távolságát megadhatjuk a számok különbségének abszolútértékével. Például -3 és 5 eltérése, távolsága: $|-3-5| = 8$.

Definíció: Az a_n sorozat határértéke az A valós szám, ha bármely ε kicsi pozitív számhoz létezik olyan N küszöbszám, ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$ teljesül.

Átfogalmazva: *Akkor mondjuk, hogy egy sorozat határértéke A valós szám, ha bármilyen kicsi eltérést, távolságot (*ε-t*) engedünk is meg az A-tól, a sorozat kellően nagy indexű elemei még ennél is közelebb vannak A-hoz.*

Szemléletesen: Egy a_n sorozat határértéke egy A valós szám, ha nagyon nagy indexek esetén a sorozat elemei az A szám körül sűrűsödnek, másképpen A-t minden határon túl megközelítik.

Definíció: Egy sorozatot konvergensnek nevezünk, ha létezik véges határértéke, minden más esetben divergensnek.

Tételek:

Ha egy sorozat felülről korlátos és monoton növekvő, akkor a sorozat konvergens.

Ha egy sorozat alulról korlátos és monoton csökkenő, akkor a sorozat konvergens.

A divergens sorozatok között különböztessük meg azokat, amelyek minden határon túl növekednek. illetve csökkennek. Az ilyen sorozatokra mondjuk azt, hogy tágabb értelemben vett konvergens sorozatok, és plusz illetve mínusz végtelenbe tartanak.

Definíció: Egy a_n sorozat határértéke $+\infty$, ha bármely $K>0$ valós számhoz létezik olyan N küszöbszám, ha $n>N$, akkor $a_n>K$ is teljesül. Jele: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$

Átfogalmazva: Egy a_n sorozat határértéke $+\infty$, ha bármilyen nagy számot adunk is meg, van olyan küszöbszám, amelynél nagyobb indexű elemek még ennél is nagyobbak.

Definíció: Egy a_n sorozat határértéke $-\infty$, ha bármely $k<0$ valós számhoz létezik olyan N küszöbszám, ha $n>N$, akkor $a_n<k$ is teljesül. Jele: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$

Átfogalmazva: Egy a_n sorozat határértéke $-\infty$, ha bármilyen kicsi negatív számot adunk is meg, van olyan küszöbszám, amelynél nagyobb indexű elemek még ennél is kisebbek.

Nevezetes határértékek:

1. Konstans sorozat (minden tagja ugyanaz a valós szám) határértéke önmaga.
$a_n=c\to c \qquad \mathrm{c}\in\mathbb{R}$

Példa:

$$a_n=2\to 2 \qquad \mathrm{b}_n=-4,2\to -4,2$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n^k=\infty, \quad$ ha $\quad k>0$

Példa:

$$\lim_{n\to\infty} n^5=\infty \text{ vagy } \lim_{n\to\infty} n^{\frac{4}{5}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{n^4}=\infty$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} n^k=0, \quad$ ha $\quad k<0$

Példa:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-5}=0 \text{ vagy } \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{4}{7}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{n^4}}=0$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\text{valós szám}}{n^k}=0, \quad$ ha $\quad k>0$ valós szám

Példa:

$$\frac{5}{n^2} \to 0 \quad \text{vagy} \quad \frac{-3,4}{n^7} \to 0 \quad \text{vagy} \quad \frac{2}{n^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \to 0$$

6.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{ha } q > 1 \\ 0 & \text{ha } |q| < 1 \\ \text{divergens} & \text{ha } q \le -1 \end{cases}$$

Példa:

$$(4,3)^n \to \infty \quad (0,7)^n \to 0 \quad (-0,43)^n \to 0 \quad (-6)^n \to \text{divergens}$$

7.

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \text{divergens}$$

8. Matematika egyik nevezetes sorozata $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat. Be lehet bizonyítani, hogy szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, azaz egy konvergens sorozat. A határértéke pedig egy irracionális szám, amit e-vel jelölünk és 5 tizedesjegy pontossággal az értéke pedig: $e \approx 2,71828$.

Matematikában az e-nek kitüntetett szerepe van, ezzel az alappal szokás megadni exponenciális és logaritmus függvényt is ($f(x) = e^x$, $g(x) = \log_e x = \ln x$).

A sorozat határértéke megváltozik, ha a számlálóban lévő 1-et bármilyen más valós számra lecseréljük.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a, \ a \in \mathbb{R}$$

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Az $a_n = \frac{8}{5n+7}$ sorozat határértéke 0. Adjon küszöbszámot az $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ -hez!

Megoldás: Azt szeretnénk meghatározni, hogy a sorozat milyen indexű tagjától kezdve fogják tagjai a 0-t $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ -nél kisebb eltéréssel megközelíteni.

A definícióból tudjuk, hogy ehhez azt kell megvizsgálni, hogy a sorozat milyen indexű elemei fogják teljesíteni az $|a_n - 0| < \frac{1}{1000}$ egyenlőtlenséget.

Oldjuk meg az egyenlőtlenséget!

$$\left|\frac{8}{5n+7} - 0\right| < \frac{1}{1000}$$

Az abszolút értéken belül egy pozitív szám van, így az abszolút érték elhagyható.

$$\frac{8}{5n+7} < \frac{1}{1000}$$

Oldjuk meg a kapott egyenlőtlenséget!

$$8000 < 5n + 7 \quad \rightarrow \quad \frac{7993}{5} < n \quad \rightarrow \quad 1598{,}6 < n$$

Tehát a 0,001-hez tartozó küszöbszám, azaz N=1598. Ez azt jelenti, hogy a sorozat 1599. tagjától kezdve a sorozatbeli elemek a 0-t 0,001-nél kisebb eltéréssel közelítik meg. A sorozat végtelen sok tagja a 0-t 0,001-nál kisebb eltéréssel közelíti meg és csak véges sok van, amelyekre ez nem teljesül.

Megjegyzés: Természetesen köszöbszámnak 1598-nál nagyobb számok is megfelelnek. De a feladatok megoldásánál mindig igyekszünk a legkisebb ilyen értéket megadni. Ha ε-nak egyre kisebb értéket adunk, az előző megoldás alapján mindig találunk egy küszöbszámot. Ez azt jelenti, hogy a sorozat elemei egyre közelebb és közelebb kerülnek 0-hoz.

2. feladat: Az $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$ sorozat határértéke 3. Adjon küszöbszámot az $\varepsilon = \frac{1}{100}$-hoz!

Megoldás: Azt szeretnénk meghatározni, hogy a sorozat milyen indexű tagjától kezdve fogják a 3-t $\varepsilon = \frac{1}{100}$-nél kisebb eltéréssel megközelíteni.

Írjuk fel a vizsgálandó egyenlőtlenséget!

$$\left| \frac{3n+1}{n+2} - 3 \right| < \frac{1}{100}$$

Hozzunk közös nevezőre:

$$\left| \frac{3n+1-3(n+2)}{n+2} \right| < \frac{1}{100}$$

Rendezzük a számlálót:

$$\left| \frac{-5}{n+2} \right| < \frac{1}{100}$$

Az abszolút értéken belül egy negatív szám van, mivel számláló negatív, nevező pozitív minden lehetséges n esetén. Egy negatív szám abszolút értékét megkapjuk, ha szorozzuk a számot -1-gyel.

$$-1 \cdot \frac{-5}{n+2} < \frac{1}{100} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{n+2} < \frac{1}{100}$$

Oldjuk meg a kapott egyenlőtlenséget!

$$\frac{5}{n+2} < \frac{1}{100} \quad \rightarrow \quad 500 < n + 2 \quad \rightarrow \quad 498 < n$$

Tehát a 0,01-hoz tartozó küszöbszám 498, ami azt jelenti, hogy a 499. indexű tagjától kezdve a sorozat elemei a 3-t 0,01-nál kisebb eltéréssel közelítik meg. A sorozat végtelen sok tagja a 3-t 0,01-nál kisebb eltéréssel közelíti meg és csak véges sok van, amelyekre ez nem teljesül.

3. feladat: Határozza meg az $a_n = n^7$, $b_n = n^{\frac{7}{3}}$, $c_n = n^{-7}$, $d_n = n^{-\frac{2}{5}}$ sorozat határértékét!

Megoldás: A sorozatok n különböző kitevőjű hatványai. Ilyen esetekben a kitevő előjele dönti el a határértéket. Ha a kitevő pozitív, akkor a határérték ∞, ha a kitevő negatív, akkor pedig 0.

$$a_n = n^7 \to \infty, \qquad b_n = n^{\frac{7}{3}} \to \infty, \qquad (\text{kitevő pozitív})$$

$$c_n = n^{-7} = \frac{1}{n^7} \to 0, \qquad d_n = n^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{n^2}} \to 0 \qquad (\text{kitevő negatív})$$

4. feladat: Határozza meg az $a_n = \frac{4}{n^6}$, $b_n = \frac{-1}{n^{\frac{7}{3}}}$, $c_n = -1$, $d_n = \frac{2}{7}$ sorozat határértékét!

Megoldás: Az első két sorozatnál valós számot osztunk n pozitív kitevőjű hatványaival. Ezek rendre 0-hoz tartanak.

$$a_n = \frac{4}{n^6} \to 0, \qquad b_n = \frac{-1}{n^{\frac{7}{3}}} \to 0 \qquad \left(\text{mivel} \quad \frac{\text{valós}}{n^k} \to 0\right)$$

Az utolsó kettő egyszerű konstans sorozatok.

$$c_n = -1 \to -1, \qquad d_n = \frac{2}{7} \to \frac{2}{7} \qquad (\text{konstans sorozat önmagához tart})$$

5. feladat: Határozza meg az $a_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ sorozat határértékét!

Megoldás: A vizsgált sorozat q^n típusú és az alap $\frac{3}{5}$.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{ha } q > 1 \\ 0 & \text{ha } |q| < 1 \\ \text{divergens} & \text{ha } q \le -1 \end{cases}$$

A nevezetes határérték 2. sora szerint, ha az alap abszolútértékben 1-nél kisebb, akkor a határérték 0.

Tehát $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0.$

6. feladat: Határozza meg az $a_n = (-3{,}1)^n$ sorozat határértékét!

Megoldás: A vizsgált sorozat q^n típusú és az alap $-3{,}1$.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{ha } q > 1 \\ 0 & \text{ha } |q| < 1 \\ \text{divergens} & \text{ha } q \le -1 \end{cases}$$

A nevezetes határértéknek most 3. sorát kell nézni, mert az alap -1-nél kisebb, akkor határérték nem létezik.

Tehát $\lim_{n\to\infty}(-3{,}1)^n =$ divergens.

7. feladat: Határozza meg a $b_n = \left(1+\frac{7}{n}\right)^n$ sorozat határértékét!

Megoldás: Fel kell ismerni, hogy ebben az esetben az alábbi nevezetes határértékkel van dolgunk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a,\ \ a\in\mathbb{R}.$$

Mivel most $a=7$, így

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^n = e^7$$

8. feladat: Határozza meg a $b_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^n$ sorozat határértékét!

Megoldás: Fel kell ismerni, hogy ebben az esetben az alábbi nevezetes határértékkel van dolgunk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a,\ \ a\in\mathbb{R}$$

Fontos, hogy a tört előtti előjel plusz legyen. Ha a mínuszjelet bevisszük a számlálóba, akkor $a=-5$, így

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^n = \left(1+\frac{-5}{n}\right)^n = e^{-5} = \frac{1}{e^5}$$

7. Műveletek konvergens és tágabb értelemben vett konvergens sorozatokkal

Végtelen geometriai sor

Tanulási cél: Konvergens és tágabb értelemben vett konvergens sorozatokkal végzett műveletek megismerése, és ezek segítségével határérték meghatározása. Végtelen geometriai sor megismerése és alkalmazása pénzügyi számításoknál.

Motivációs feladat

Most már ismerjük a sorozat határértékének fogalmát és néhány nevezetes határértéket. Ezek ismeretében próbáljunk meg megadni a határértékét az alábbi sorozatnak.

$$a_n = 2+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}$$

Ha n nagyon nagy a törtek értékei nagyon kicsik, tehát a sorozat 2-höz közeli értékeket vesz fel. Úgy tűnik, hogy a határérték a tagok határértékeinek összege. Vajon általában is igaz lehet, hogy konvergens sorozatok összegénél a határértékek összeadódnak?

Elméleti összefoglaló

A sejtés valóban igaz. Ha konvergens sorozatokkal műveleteket hajtunk végre, akkor a határértékekre az alábbi tételeket mondhatjuk ki.

Tétel: Ha $a_n \to A, b_n \to B$, valamint A és B tetszőleges valós számok, akkor

1.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$$

3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}, \quad \text{ha} \quad B \neq 0$$

4.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}, \quad \text{ha} \quad \mathrm{a}_n \geq 0 \quad \text{és} \quad k\text{=2;3;...}$$

Megjegyzés: Szemléletesen úgy fogalmazhatók meg a tételek, hogy ha konvergens sorozatokkal műveleteket végzünk, akkor a határértékekkel ugyanazokat a műveleteket végezzük el. Ha a számolás elvégezhető (0-val nem tudunk osztani), akkor készen vagyunk.

Hasonló tételek igazak a tágabb értelemben vett konvergencia esetén is, de bizonyos esetekben a határérték nem adható meg ilyen egyszerűen.

Tételek: Legyen $c_n \to \infty$ és $d_n \to \infty$. Ekkor a következő tételek érvényesek:

1.

$$\lim_{n\to\infty}(c_n + d_n) = \infty + \infty = \infty$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}(c_n - d_n) = \infty - \infty = ?$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} c_n \cdot d_n = \infty \cdot \infty = \infty$$

4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n} = \frac{\infty}{\infty} = ?$$

5.

Legyen $a_n \to A$ és $c_n \to \infty$, akkor $\lim_{n\to\infty}(c_n \pm a_n) = \infty \pm A = \infty$

6.

$$\text{Legyen } \; a_n \to A \text{ és } c_n \to \infty, \text{ akkor } \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = A - \infty = -\infty$$

7.

$$\text{Legyen } A \in \mathbb{R}, \text{ ekkor } A \cdot c_n \to \begin{cases} \infty & \text{ha } A > 0 \\ 0 & \text{ha } A = 0 \\ -\infty & \text{ha } A < 0 \end{cases}$$

8.

$$\text{Legyen } a_n \to A \text{ és } c_n \to \infty, \text{ ekkor } a_n \cdot c_n \to \begin{cases} \infty & \text{ha } A > 0 \\ ? & \text{ha } A = 0 \\ -\infty & \text{ha } A < 0 \end{cases}$$

9.

$$\text{Ha } a_n \to 0, \quad \text{akkor } \quad \frac{1}{a_n} \to \begin{cases} \infty & \text{ha } a_n > 0 \text{ minden } n\text{-re} \\ -\infty & \text{ha } a_n < 0 \text{ minden } n\text{-re} \end{cases}$$

10.

$$\text{Ha } \quad a_n \to \infty, \quad \text{ekkor } \quad \frac{\text{valós szám}}{a_n} \to \frac{\text{valós szám}}{\infty} = 0$$

Gyűjtsük össze azon eseteket, amikor a határértékről semmit nem tudunk mondani. Ilyenek például rövid jelöléssel a $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. A kritikus esetekben a sorozatokat valamilyen azonos átalakítással nem kritikus típusban visszük át, és ezután határozzuk meg a határértékeket.

Kidolgozott feladatok:

1. feladat: Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$a_n = 6 \cdot \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{100} - 7 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n$$

Megoldás: Használjuk fel az ismert nevezetes határértékeket és határérték tételeket.

Mivel $1 + \frac{8}{n} \to 1$, akkor $\left(1 + \frac{8}{n}\right)^{100} \to 1^{100} = 1$.

Másrészt mivel $\frac{8}{3} > 1$, ezért $\left(\frac{8}{3}\right)^n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(6 \cdot \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{100} - 7 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^n\right) = 6 \cdot 1^{100} - 7 \cdot \infty = 6 - \infty = -\infty$$

2. feladat: Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Megoldás: Használjuk fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3$$

Másrészt mivel $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, ezért $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = e^3 + 0 = e^3$$

3. **feladat:** Határozza meg az alábbi határértékét!

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{-n} + n^{-0.5}\right) =$$

Megoldás: Alakítsuk ki a nevezetes határértékeket, majd alkalmazzuk a megfelelő határérték tételt!

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{-n} + n^{-0.5}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{5}{n}\right)^n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{e^5} + 0 = \frac{1}{e^5} = e^{-5}$$

4. **feladat:** Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty}(3n^4 + \sqrt{7}n^5 - \frac{4}{3}n^2) =$$

Megoldás: Egy polinom határértékét kell meghatározni. Keressük meg n-nek a legmagasabb fokszámú hatványát, majd emeljük ki. A kialakított szorzatban tényezőnként olvassuk le a határértékeket és alkalmazzuk a megfelelő határérték tételt.

$$= \lim_{n\to\infty}(3n^4 + \sqrt{7}n^5 - \frac{4}{3}n^2) = \lim_{n\to\infty} n^5 \cdot \left(\frac{3}{n} + \sqrt{7} - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n^3}\right) = \infty \cdot \sqrt{7} = \infty$$

Megjegyzés: Egy polinom határértékét mindig n-nek a legmagasabb fokszámú kifejezése határozza meg. Ha együtthatója pozitív, akkor a polinom plusz végtelenbe tart, ha negatív, akkor mínusz végtelenbe. Így egy polinom határértéke ránézésre leolvasható.

5. **feladat:** Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{5n^4 - 2n^2 + 1} =$$

Megoldás: Ebben az esetben nem egy egyszerű polinom határértékét szeretnénk eldönteni, hanem annak egy gyökös kifejezését. Használjuk az előző módszert! A gyökön belül emeljük ki n-nek a legmagasabb kitevőjű hatványát, majd a szorzattá alakítás után tényezőnként vonjunk gyököt!

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{5n^4 - 2n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^4\left(5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right)} = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \sqrt{5 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}} =$$

Tényezőnként olvassuk le a határértékeket, és képezzük ezek szorzatát!

$$=\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \sqrt{5-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \infty \cdot \sqrt{5} = \infty$$

Megjegyzés: Vigyázzunk nagyon a különböző gyökös kifejezésekkel! Ha gyök alatt összeg vagy különbség áll, nem szabad tagonként gyököt vonni. Ismerni kell ezenkívül a gyökös kifejezések hatvánnyá való átírását, illetve fordítva. Hol az egyik, hol a másik alak a célravezető.

6. feladat: Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{2+n-n^4} =$$

Megoldás: Először a gyökön belül emeljük ki n legmagasabb hatványát, majd vonjunk tényezőnként gyököt!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{2+n-n^4} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{n^4\left(\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^3}-1\right)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{n^4} \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^3}-1} =$$

Az első gyökös kifejezést írjuk fel hatvány alakban, majd olvassuk le tényezőnként a határértékeket. Az első tényezőben n hatványkitevője egy pozitív szám, így

$$=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[5]{\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^3}-1} = \infty \cdot \sqrt[5]{-1} = \infty \cdot (-1) = -\infty$$

7. feladat: Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-5}{6n^2+7n-15} =$$

Megoldás: Vizsgáljuk meg külön a számláló és a nevező határértékét.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-5}{6n^2+7n-15} = \frac{\infty}{\infty}$$

Ez egy kritikus eset, ebből az alakból még nem tudjuk leolvasni a határértéket. Mind a számlálóban mind a nevezőben emeljük ki a n legmagasabb kitevőjű hatványait, azaz az n^2-et. Az egyszerűsités után olvassuk le a számlálóban és a nevezőben a határértékeket, és alkalmazzuk a határérték tételeket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-5}{6n^2+7n-15} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(6+\frac{7}{n}-\frac{15}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{6+\frac{7}{n}-\frac{15}{n^2}} =$$

$$=\lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{6+\frac{7}{n}-\frac{15}{n^2}} = 1 \cdot \frac{1+0-0}{6+0-0} = \frac{1}{6}.$$

8. feladat: Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-11n^3-n+11}{4+7n^2} =$$

Megoldás: Vizsgáljuk meg a számláló és a nevező határértékét.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-11n^3-n+11}{4+7n^2} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Egy kritikus esetet kell vizsgálni. Most is emeljük ki a számlálóban és a nevezőben is n legmagasabb kitevőjű hatványait, majd az előzőekhez hasonlóan próbáljunk meg egyszerűsíteni!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-11n^3-n+11}{4+7n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{3}{n}-11-\frac{1}{n^2}+\frac{11}{n^3}\right)}{n^2\left(\frac{4}{n^2}+7\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2}\cdot\frac{\frac{3}{n}-11-\frac{1}{n^2}+\frac{11}{n^3}}{\frac{4}{n^2}+7}=$$

Most az n-es tagok nem ejtik ki egymást, egy két tényezős szorzat alakult ki. Tényezőként olvassuk le a határértékeket.

$$=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{\frac{3}{n}-11-\frac{1}{n^2}+\frac{11}{n^3}}{\frac{4}{n^3}+7}=\infty\cdot\frac{0-11-0+0}{0+7}=\infty\cdot\left(-\frac{11}{7}\right)=-\infty$$

9. feladat: Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)(2n+3)}{n^2(3n-1)^2}=$$

Megoldás: Ha elvégezzük a kijelölt műveleteket a számlálóban és a nevezőben is, akkor két polinom hányadosának határértékét kell meghatározni.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)(2n+3)}{n^2(3n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+2n+3)}{n^2(9n^2-6n+1)}=$$

Most már az előzőekhez hasonlóan járjunk el.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+2n+3}{9n^4-6n^3+n^2}=\frac{\infty}{\infty}=$$

Kritikus esetet vizsgálunk, emeljük ki a n legmagasabb kitevőjű hatványát külön a számlálóban, külön a nevezőben, alakítsunk ki két tényezős szorzatot, ha lehet egyszerűsítsünk.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^4}\cdot\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{9-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{9-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}=$$

Az első tényező 0-hoz, a második $\frac{2}{9}$-hez, így a határérték 0.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{9-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}=0\cdot\frac{2+0+0+0}{9-0+0}=0\cdot\frac{2}{9}=0$$

Megjegyzés: Az előző feladatok azonos jellegűek voltak. Olyan kifejezések határértékét kerestük, melyekben polinomot polinommal osztottunk, s a határérték típusa $\frac{\infty}{\infty}$ volt. Ilyenkor célszerű n-nek a legmagasabb kitevőjű hatványát kiemelni mind a számlálóban, mind a nevezőben, majd egyszerűsíteni. Az átalakítás után már csak olyan kifejezések szerepelnek, amelyeknek külön-külön már ismerjük a határértékét. Végül alkalmazni kell a megfelelő határérték tételeket.

10. feladat: Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{\sqrt{1+7n^2}}=$$

Megoldás: A tört gyököt tartalmaz. Számlálóban emeljük ki n-et, a nevezőben először emeljük ki a gyökön belül n^2-t, majd tényezőnként vonjunk gyököt! Az egyszerűsítés után már tudunk határértéket számolni.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{\sqrt{1+7n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3+\frac{4}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n^2}+7\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\cdot\frac{3+\frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+7}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+7}}=\frac{3}{\sqrt{7}}$$

11. feladat: Határozza meg az $a_n=4^n-6^n$ sorozat határértékét!

Megoldás: A feladat $\infty-\infty$ típusú. Az egynél nagyobb alapú exponenciális kifejezéseknél a nagyobb alapú exponenciálist kell kiemelni.

$$\lim_{n\to\infty}(4^n-6^n)=\lim_{n\to\infty}6^n\left(\frac{4^n}{6^n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}6^n\left(\left(\frac{4}{6}\right)^n-1\right)=\infty\left(0-1\right)=-\infty$$

Felhasználva, hogy $\left(\frac{4}{6}\right)^n\to 0,\quad$ mivel $\left|\frac{4}{6}\right|<1.$

12. feladat: Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot 3^{n-1}+4}{5-2\cdot 3^{n+2}}=$$

Megoldás: Egy tört határértékét kell meghatározni, amelyben exponenciális kifejezések vannak. Nézzük meg, hogy hova tart a számláló és hova a nevező.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot 3^{n-1}+4}{5-2\cdot 3^{n+2}}=\frac{\infty+4}{5-\infty}=\frac{\infty}{-\infty}$$

Kritikus esetet kell vizsgálni. Ahhoz, hogy ki tudjunk emelni, hatványozás azonosságait felhasználva alakítsuk ki 3^n számszorosát, úgy hogy a kitevőben csak n legyen.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot 3^{n-1}+4}{5-2\cdot 3^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot 3^{-1}\cdot 3^n+4}{5-2\cdot 3^2\cdot 3^n}=$$

Most már kiemelhetjük a számlálóban és nevezőben külön-külön a legnagyobb alapú exponenciális alakot. Ha lehet egyszerűsítsünk.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{3}\cdot 3^n+4}{5-18\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n}\cdot\frac{\frac{7}{3}+\frac{4}{3^n}}{\frac{5}{3^n}-18}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{3}+\frac{4}{3^n}}{\frac{5}{3^n}-18}=-\frac{\frac{7}{3}}{18}=-\frac{7}{54}$$

13. feladat: Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+2}+4^{n+1}}{1-8\cdot 5^{n+1}}=$$

Megoldás: Egy tört határértékét kell meghatározni, amelyben exponenciális kifejezések vannak. Nézzük meg, hogy hova tart a számláló és hova a nevező.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+2}+4^{n+1}}{1-8\cdot 5^{n+1}}=\frac{\infty}{-\infty}$$

Kritikus esetet kell vizsgálni. Ahhoz, hogy ki tudjunk emelni, hatványozás azonosságait felhasználva érjük el, hogy a kitevőkben csak n legyen.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+2}+4^{n+1}}{1-8\cdot 5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^2\cdot 7^n+4\cdot 4^n}{1-8\cdot 5\cdot 5^n}=$$

Most már kiemelhetjük a számlálóban és nevezőben külön-külön a legnagyobb alapú exponenciális alakot. Ha lehet egyszerűsítsünk.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n\left(49+4\cdot\frac{4^n}{7^n}\right)}{5^n\left(\frac{1}{5^n}-40\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{5^n}\cdot\frac{49+4\left(\frac{4}{7}\right)^n}{\left(\frac{1}{5}\right)^n-40}=$$

Nem tudunk úgy egyszerűsíteni, mint az előző feladatnál megtettük. Két tényezős szorzat alakult ki, ahol az első tényező végtelenbe tart, mivel az exponenciális kifejezés alapja egy 1-nél nagyobb szám.

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^n\cdot\frac{49+4\left(\frac{4}{7}\right)^n}{\left(\frac{1}{5}\right)^n-40}=\infty\cdot\frac{49+4\cdot 0}{0-40}=\infty\cdot\left(-\frac{49}{40}\right)=-\infty$$

Elméleti összefoglaló

Legyen a_n egy tetszőleges valós számsorozat. Ha a sorozat tagjait összeadjuk egy végtelen összeget kapunk, amit *végtelen sor*nak nevezünk.

Nézzünk néhány nevezetes sort.

Ha $a_n=\frac{1}{n}$, akkor belőle előállítható sor:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\qquad(\text{harmonikus sor})$$

Ha $a_n=\frac{1}{n^2}$, akkor belőle előállítható sor:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\cdots\qquad(\text{hiperharmonikus sor})$$

Definíció: Az a_n sorozatot mértani sorozatnak nevezzük, ha $a_n=a\cdot q^{n-1}$, ahol n természetes szám és q-t a mértani sorozat *kvóciens*ének nevezzük.

Definíció: Ha $a_n=a\cdot q^{n-1}$ egy mértani sorozat, akkor a belőle képezhető sort geometriai sornak (másnéven mértani sornak) nevezzük.

A geometriai sor általános alakja:

$$a+a\cdot q+a\cdot q^2+\cdots+a\cdot q^{n-1}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}a\cdot q^{n-1} \quad \text{ahol} \quad q\neq 0,\ \text{a}\neq 0$$

Definíció: Az $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots$ tetszőleges végtelen sor n-edik részletösszegének nevezzük az $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ összeget. A sorhoz rendelhető részletösszegek egy sorozatot alkotnak.

Példa: Harmonikus sorra írjuk fel a részletösszegek sorozatának első 5 tagját.

Az első részletösszeg a sor első tagjából áll. A második részletösszeg a sor első két tagjának az összege. A harmadik részletösszeg a sor első három tagjának az összege és így tovább.

$$S_1=1 \quad S_2=1+\frac{1}{2} \quad S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \quad S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \quad S_5=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

A hiperharmonikus sor 8. részletösszege a sor első 8 tagjának az összege.

$$S_8=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}$$

A geometriai sor n. részletösszege a sor első n tagjának az összege.

$$S_n=a_1+a_1\cdot q+a_1\cdot q^2+\cdots+a_1\cdot q^{n-1}$$

A felírt példák alapján látszik, hogy ha n növekszik, a részletösszegek sorozata a sor egyre több és több tagját tartalmazza. Így, ha a részletösszegek S_n sorozatának van határértéke, akkor azt indokolt a sor összegének tekinteni.

Definíció: Ha egy tetszőleges sornál a részletösszegek S_n sorozatának van véges határértéke, akkor azt a sor összegének nevezzük. Ilyenkor a sort konvengensnek mondjuk. Ha a részletösszegek sorozatának nincs véges határértéke, akkor a sort divergensnek nevezzük.

Tétel: A harmonikus sor divergens, a hiperharmonikus sor pedig konvergens.

A geometriai sor egy kivételes esetbe tartozik. A részletösszegek S_n sorozatának határértéke a q kvóciens értékétől függ.

Tétel: A $\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}$ geometriai sor esetén a részletösszegek S_n sorozata felírható a következő alakban:

$S_n=a\dfrac{q^n-1}{q-1}$, ahol $q\neq 1$. Ha $q=1$, akkor $S_n=a+a+\cdots+a=n\cdot a$.

Innen látható, hogy S_n határértékét q^n határértéke dönti el. Az utóbbinak tudjuk, hogy csak akkor van véges határértéke, ha $|q|<1$.

Tétel: A $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ geometriai sor konvergens, ha $|q|<1$ teljesül, ekkor a sor összege:

$$S=\frac{a}{1-q}.$$

Ha $|q|\geq 1$, akkor a geometriai sor divergens.

Példa: Egy bankba beteszünk T Ft-ot évi 6% kamatlábbal. Kamatos kamattal számolva mennyi pénzünk lesz az első, második, harmadik és n. év végén?

Az első év végén fog először kamatozni a pénzünk. A második év végén másodszor, harmadik év végén harmadszor, akkor n. év végén n alkalommal.

$$T_1=T\cdot 1,06 \qquad T_2=T\cdot 1,06^2 \qquad T_3=T\cdot 1,06^3 \qquad T_n=T\cdot 1,06^n.$$

Jól látható, hogy az n. év végén felvehető összeg: $T_n=T\cdot 1,06^n$ mértani sorozattal adható meg.

Példa: Ha 4 évig minden év elején beteszünk a bankba T összeget, akkor mennyi pénz lesz a számlánkon a 4. év végén? Az éves kamatláb legyen most is 6%.

Valójában az előbbi mértani sorozat első négy tagjának összegére vagyunk kíváncsiak.

$$T\cdot 1,06+T\cdot 1,06^2+T\cdot 1,06^3+T\cdot 1,06^4$$

Példa: Ha 4 évig minden hónap elején beteszünk a bankba T összeget, akkor mennyi pénz lesz a számlánkon a 4. év végén? Az éves kamatláb legyen most is 6%.

A számoláshoz szükségünk van a tőkésítések számára, ami most $4\cdot 12=48$ és a havi kamatlábra, ami pedig az éves kamatláb 1 hónapra eső időarányos része, azaz

$$p_{\text{havi}}=\frac{6}{12}=0,5\%.$$

Az első alkalommal befizetett összeget a 48 hónap alatt 48-szor tőkésítik, a második befizetett összeget 47-szer és így tovább. A utolsó összeget csak egyszer tőkésítik. Így egy 48 tagból álló összeget kellene kiszámolni.

$$T\cdot 1,005^1+T\cdot 1,005^2+\dots+T\cdot 1,005^{47}+T\cdot 1,005^{48}$$

Az összeg valójában egy geometriai sor 48. részletösszege, ahol az első tag $a=T\cdot 1,005$ és $q=1,005$.

$$S_{48}=T\cdot 1,005^1+T\cdot 1{,}005^2+\dots+T\cdot 1,005^{47}+T\cdot 1,005^{48}=T\cdot 1,005\cdot\frac{1,005^{48}-1}{1,005-1}$$

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Írja fel a $\sum_{k=1}^{\infty} 8\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^k$ sor 3. és n. részletösszegét!

Megoldás: Egy sor harmadik részletösszeg a sor első három tagjának, az n. pedig az első n tagjának összege.

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} 8\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^k = 8\cdot\left(\frac{5}{2}\right) + 8\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 8\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3 = 20 + 50 + 125 = 195$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 8\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^k = 8\cdot\left(\frac{5}{2}\right) + 8\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 8\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3 + \cdots + 8\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n$$

2. **feladat:** Döntse el, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} 8\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^k$ sor konvergens-e! Ha igen, adja meg a sor összegét!

   Megoldás: Az előző feladatban már felírtuk a sor első pár tagját. Jól látható, hogy ez egy geometriai sor, amelynek a kvóciense $\frac{5}{2}$. Ha a geometriai sor kvóciense pedig nagyobb, mint 1, akkor a sor nem konvergens.

3. **feladat:** Döntse el, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3^{k-1}}$ sor konvergens-e! Ha igen, adja meg a sor összegét!

   Megoldás: Ha észrevesszük, hogy a sor átírható a következő alakba $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} 5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$, akkor azonnal látható, hogy ez egy egyszerű geometriai sor. A konvergenciához elegendő megnézni a kvócienst. Mivel a $q = \frac{1}{3}$, amire teljesül a $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ feltétel, így a sor konvergens. Az összeg számolásához szükségünk van még az első tagra. Most $a = 5$, így az összeg:

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{\frac{2}{3}} = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

4. **feladat:** Döntse el, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^k$ sor konvergens-e! Ha igen adja meg a sor összegét!

   Megoldás: Írjuk fel a sor pár tagját:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^k = -\frac{2}{5} + \frac{4}{25} - \frac{8}{125} + \frac{16}{625} - \cdots$$

   Ez egy geometriai sor, a konvergencia eldöntéséhez elegendő a kvócienst vizsgálni. Most $q = -\frac{2}{5}$, amelyre teljesül, hogy $\left|-\frac{2}{5}\right| < 1$, ezért a sor konvergens. Olvassuk le a sor első tagját: $a = -\frac{2}{5}$. Most már számolhatjuk az összeget:

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = -\frac{2}{7}$$

További kidolgozott feladatok

1. feladat: Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság szempontjából az alábbi sorozatot! Konvergens-e a sorozat? Ha igen, akkor adjon küszöbszámot $\varepsilon = \frac{1}{200}$-hoz!

$$a_n = \frac{3n+1}{7-4n}$$

Megoldás: Monotonitáshoz vizsgáljuk az $n+1$-edik és n-edik tag különbségét. Először írjuk fel az $n+1$-edik elemét a sorozatnak.

$$a_{n+1} = \frac{3(n+1)+1}{7-4(n+1)} = \frac{3n+4}{-4n+3}$$

Most már felírható a vizsgálandó különbség:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n+4}{3-4n} - \frac{3n+1}{7-4n} = \frac{(3n+4)(7-4n)-(3n+1)(3-4n)}{(3-4n)(7-4n)} =$$

Végezzük el a számlálóban a kijelölt szorzásokat, majd rendezzük a kifejezéseket.

$$= \frac{-12n^2+5n+28-(-12n^2+5n+3)}{(3-4n)(7-4n)} = \frac{25}{(3-4n)(7-4n)} = \frac{+}{-\cdot -} > 0$$

Tehát a sorozat szigorúan monoton nő.
Mivel a sorozat szigorúan monoton nő, így a sorozat alsó korlátja a sorozat első tagja, azaz $\frac{4}{3}$.
A felső korlát vizsgálata előtt nézzük meg, hogy konvergens-e a sorozat.

$$a_n = \frac{3n+1}{7-4n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{3+\frac{1}{n}}{\frac{7}{n}-4} = \frac{3+\frac{1}{n}}{\frac{7}{n}-4} \to -\frac{3}{4}$$

A sorozat konvergens (egy véges szám a határértéke). Szigorúan monoton növekedve közelíti meg $-\frac{3}{4}$-t, azaz a sorozat tagjai kisebbek lesznek, mint $-\frac{3}{4}$, így a sorozat felső korlátja $-\frac{3}{4}$.

Küszöbszám meghatározásához vizsgálni kell, hogy milyen n-re teljesül az $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenség. A határértéket ismerjük, be tudunk helyettesíteni.

$$\left| \frac{3n+1}{7-4n} - \left(-\frac{3}{4}\right) \right| < \frac{1}{200}$$

Bontsuk fel a zárójelet az abszolút értéken belül.

$$\left| \frac{3n+1}{7-4n} + \frac{3}{4} \right| < \frac{1}{200}$$

Hozzuk közös nevezőre a törteket.

$$\left|\frac{4(3n+1)+3(7-4n)}{4(7-4n)}\right| < \frac{1}{200}$$

Rendezzük a számlálót.

$$\left|\frac{25}{4(7-4n)}\right| < \frac{1}{200}$$

Vizsgáljuk meg az abszolút értéken belül lévő tört előjelét. A számláló mindig pozitív, a nevező mindig negatív, ha $n>1$ természetes szám. Ha a törtet szorozzuk-1-gyel, akkor az abszolút érték elhagyható. Baloldalon a negatív előjelet vigyük a számlálóba.

$$-\frac{25}{4(7-4n)} < \frac{1}{200} \quad \rightarrow \quad \frac{-25}{4(7-4n)} < \frac{1}{200}$$

Oldjuk meg a kapott egyenlőtlenséget. Ügyeljünk arra, hogy mivel $7-4n$ minden n>1 esetén negatív, az átalakításnál az egyenlőtlenség iránya megváltozik.

$$-25\ 000 > 2(7-4n) \quad \rightarrow \quad -25014 > -8n \quad \rightarrow \quad \frac{25014}{8} = 3126,75 < n$$

Tehát a keresett küszöbszám 3126, ha $\varepsilon = \frac{1}{200}$. Ez a szám azt jelenti, hogy ha a sorozat valamely tagjának az indexe nagyobb ennél a számnál, akkor ezek az elemek $\varepsilon = \frac{1}{200}$-nél kisebb eltéréssel közelítik a határértéket, azaz a $-\frac{3}{4}$-t.

2. feladat: Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^7-9n^4+6n^2}}{n+1} =$$

Megoldás: Az előző feladatok alapján, ha gyökös kifejezés alatt polinom szerepel, akkor először a gyökön belül emeljük ki n legmagasabb kitevőjű hatványát.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^7-9n^4+6n^2}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^7\left(1-\frac{9}{n^3}+\frac{6}{n^5}\right)}}{n+1} =$$

Majd tényezőnként vonjunk gyököt. A nevezőt is alakítsuk a szokásos módon.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^7}\cdot\sqrt[5]{1-\frac{9}{n^3}+\frac{6}{n^5}}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n^7}}{n}\cdot\frac{\sqrt[5]{1-\frac{9}{n^3}+\frac{6}{n^5}}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{7}{5}}}{n}\cdot\frac{\sqrt[5]{1-\frac{9}{n^3}+\frac{6}{n^5}}}{1+\frac{1}{n}} =$$

Az első gyökös kifejezést írjuk fel törtkitevős hatvány alakjában, majd végezzük el az osztást.

$$=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{5}}\cdot\frac{\sqrt[5]{1-\frac{9}{n^3}+\frac{6}{n^5}}}{1+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{5}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{1-\frac{9}{n^3}+\frac{6}{n^5}}}{1+\frac{1}{n}}=\infty\cdot\frac{\sqrt[5]{1}}{1}=\infty$$

Az első tényezőben n hatványkitevője egy pozitív szám, így a keresett határérték ∞.

3. feladat: Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+1)(5n^2+n)}{n^3(4n-5)^2}=$$

Megoldás: Ha elvégezzük a számlálóban és a nevezőben is a kijelölt műveleteket, akkor két polinom hányadosát kapjuk.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+1)(5n^2+n)}{n^3(4n-5)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{15n^4+3n^3+5n^2+n}{n^3(16n^2-40n+25)}=\lim_{n\to\infty}\frac{15n^4+3n^3+5n^2+n}{16n^5-40n^4+25n^3}=$$

Emeljük ki n legmagasabb kitevőjű hatványát a számlálóban és a nevezőben is.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{15n^4+3n^3+5n^2+n}{16n^5-40n^4+25n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\cdot\left(15+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^5\cdot\left(16-\frac{40}{n}+\frac{25}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^5}\cdot\frac{15+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{16-\frac{40}{n}+\frac{25}{n^2}}=$$

Olvassuk le tényezőnként a határértékeket.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{15+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{16-\frac{40}{n}+\frac{25}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{15+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{16-\frac{40}{n}+\frac{25}{n^2}}=0\cdot\frac{15+0+0+0}{16-0+0}=0$$

4. feladat: Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt[3]{n^2+7}}=$$

Megoldás: A határérték típusa $\frac{\infty}{\infty}$. A gyökök miatt most nem olyan könnyű egyszerűsíteni, mint az előző feladatokban, célszerű előbb a számlálóban és a nevezőben is a gyök alatt egy kiemelést végrehajtani. A számlálóban a gyök alatt emeljünk ki n-et, a nevezőben (szintén a gyök alatt) pedig n^2-et, majd tényezőnként vonjunk gyököt!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt[3]{n^2+7}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}}{\sqrt[3]{n^2\left(1+\frac{7}{n^2}\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{3+\frac{5}{n}}}{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{7}{n^2}}}=$$

A kifejezés két tört szorzatára bontható, melyeknek külön-külön vizsgálhatjuk a határértékét.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}\cdot\frac{\sqrt{3+\frac{5}{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{7}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{5}{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{7}{n^2}}}=$$

A második tört határértéke egy nem 0 véges érték, hiszen a számláló $\sqrt{3}$-hoz, a nevező pedig $\sqrt[3]{1}=1$-hez tart. A tört határértéke tehát $\sqrt{3}$. Az első törtben a gyököket célszerű inkább hatvány alakra átírni, ekkor az osztást el is tudjuk végezni, s csak egyetlen hatványt kapunk.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{2}{3}}}=\lim_{n\to\infty}n^{\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{-1}{6}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Most már a szorzat tényezőinek ismerjük a határértékét, amit felhasználva fejezzük be a feladatot.

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{5}{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{7}{n^2}}}=0\cdot\sqrt{3}=0$$

5. feladat: Határozza meg az alábbi sorozat határértékét!

$$a_n=\frac{4^{2n+1}+7\cdot 5^{n-1}}{9-2^{3n}}$$

Megoldás: Egy tört határértékét kell meghatározni, amiben exponenciális kifejezések vannak. Nézzük meg, hogy hova tart a számláló és hova a nevező!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{2n+1}+7\cdot 5^{n-1}}{9-2^{3n}}=\frac{\infty}{-\infty}$$

Egy kritikus esetet kell eldönteni. A hatványozás azonosságait felhasználva alakítsuk át az exponenciális kifejezéseket a számlálóban és a nevezőben is.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{2n+1}+7\cdot 5^{n-1}}{9-2^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot(4^2)^n+7\cdot 5^{-1}\cdot 5^n}{9-(2^3)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 16^n+7\cdot 5^{-1}\cdot 5^n}{9-8^n}=$$

Most már emeljük ki a számlálóban és a nevezőben is a legnagyobb alapú exponenciális kifejezést!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{16^n\left(4+7\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{5^n}{9^n}\right)}{8^n\left(\frac{9}{8^n}-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{16}{8}\right)^n\cdot\frac{4+\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^n}{9\left(\frac{1}{8}\right)^n-1}=$$

Kéttényezős szorzatot kaptunk. Nézzük meg tényezőnként a határértékeket.

$$\lim_{n\to\infty}(2)^n\cdot\frac{4+\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^n}{9\left(\frac{1}{8}\right)^n-1}=\infty\cdot\frac{4+0}{0-1}=-\infty$$

5. feladat: 18 éven keresztül minden év elején beteszek a bankba 70 000 Ft-ot. A 18. év végén mennyi pénzt sikerül összegyűjteni, ha az éves kamatláb 4%?

Megoldás: Írjuk fel a 18 tagból álló összeget! Használjuk fel, hogy az először befizetett összeget a 18 év alatt 18-szor tőkésítik, a második befizetett összeget már csak 17-szer, a 18. év elején befizetett összeget pedig csak egyszer.

$$70000\cdot 1,04^{18}+70000\cdot 1,04^{17}+70000\cdot 1,04^{16}+\dots+70000\cdot 1,04^{2}+70000\cdot 1,04=$$

Vegyük észre, hogy egy geometriai sor 18. részletösszegét kell kiszámolni, ahol $a=70\ 000\cdot 1,04$ és $q=1,04$, így a felvehető összeg:

$$70000\cdot 1,04\frac{1,04^{18}-1}{1,04-1}=1866986,06\text{Ft}$$

6. feladat: Egy kis vállalkozás januári nyeresége 500 000 Ft volt. A körülmények úgy alakultak, hogy az év hátralévő részében, minden hónapban a nyereség az előző hónaphoz képest 5%-kal csökkent. Mennyi volt a teljes éves nyereség?

Megoldás: A januári nyereség 500 000Ft. Februárban már csak ennek a 95%-a, azaz $500000\cdot 0,95$ Ft míg márciusban már csak $500000\cdot 0,95^{2}\text{Ft}$, és így tovább. Decemberben már csak $500000\cdot 0,95^{11}$ Ft. A teljes éves nyereség ezek szerint:

$$500000+500000\cdot 0,95\ +500000\cdot 0,95^{2}+\dots+500000\cdot 0,95^{10}+500000\cdot 0,95^{11}=$$

egy geometriai sor 12. részletösszegét kell számolni. $a=500000$ és $q=0,95$.

A nyereség:

$$500000\frac{0,95^{12}-1}{0,95-1}=4\ 596\ 399{,}123\text{Ft}$$