Sorozatok

1. Írja fel az $a_n = \frac{1-5n}{n+4}$ sorozat 10. és $(n+1)$-edik elemét! $[a_{10} = -\frac{49}{14}, a_{n+1} = \frac{-5n-4}{n+5}]$

2. Írja fel az $a_n = \frac{3n+4}{5n-1}$ sorozat $(n+1)$-edik és $(n-2)$-edik tagját! $[a_{n+1} = \frac{3n+7}{5n+4}, a_{n-2} = \frac{3n-2}{5n-11}]$

3. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás szempontjából (elegendő a sorozat néhány elemének kiszámolása),korlátosság és konvergencia szempontjából!

   (a) B,V $a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$
   Megoldás
   a sorozat nem monoton
   legnagyobb alsó korlát: k= $-\frac{1}{4}$; legkisebb felső korlát:K= $\frac{1}{16}$; a sorozat korlátos
   a sorozat konvergens

   (b) B,V $a_n = (-3)^n$
   Megoldás
   a sorozat nem monoton
   legnagyobb alsó korlát:nincs; legkisebb felső korlát:nincs; a sorozat nem korlátos
   a sorozat divergens

   (c) B,V $a_n = 2^n$
   Megoldás
   a sorozat szigorúan monoton nő
   legnagyobb alsó korlát: k= 2; legkisebb felső korlát:nincs; a sorozat nem korlátos
   a sorozat divergens

   (d) B,V $a_n = -n^3$
   Megoldás
   a sorozat szigorúan monoton csökken
   legnagyobb alsó korlát:nincs; legkisebb felső korlát:K=-1; a sorozat nem korlátos
   a sorozat divergens

4. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás szempontjából (a tétel alapján, nem elegendő a sorozat néhány elemének kiszámolása) és korlátosság szempontjából!

   (a) B,V $a_n = \frac{3-4n}{5-7n}$
   [szigorúan monoton nő; legnagyobb alsó korlát: k= $\frac{1}{2}$; legkisebb felső korlát:K= $\frac{4}{7}$; a sorozat korlátos]

   (b) B,V $a_n = \frac{3n+4}{5n-1}$
   [szigorúan monoton csökken; legnagyobb alsó korlát: k=$\frac{3}{5}$; legkisebb felső korlát:K=$\frac{7}{4}$; a sorozat korlátos]

   (c) B,V $a_n = 8^{3n}$
   [szigorúan monoton nő; legnagyobb alsó korlát:$k = 512$; legkisebb felső korlát:nincs; a sorozat nem korlátos]

(d) B,V $a_n = -5^n$
[szigorúan monoton csökken; legnagyobb alsó korlát:nincs; legkisebb felső korlát:K=-5; a sorozat nem korlátos]

5. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat konvergencia szempontjából! Ha a sorozat konvergens, adja meg azt az N_0 küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték $\varepsilon = 10^{-2}$ sugarú környezetén belül esnek!

   (a) V $a_n = \frac{2-3n}{1-4n}$
   [a sorozat konvergens, $N_0 = 31$]

   (b) V $a_n = \frac{6n^2+3}{2+9n}$
   [a sorozat divergens]

   (c) V $a_n = \frac{8-10n}{5n+2}$
   [a sorozat konvergens, $N_0 = 239$]

   (d) V $a_n = \frac{2n-3}{4n+1}$
   [a sorozat konvergens, $N_0 = 87$]

   (e) V $a_n = \frac{-4n^3+8}{5+7n^2}$
   [a sorozat divergens]

6. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás szempontjából (a tétel alapján, nem elegendő a sorozat néhány elemének kiszámolása) és korlátosság szempontjából! Ha a sorozat konvergens, adja meg azt az N_0 küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték ε sugarú környezetén belül esnek!

   (a) V $a_n = \frac{5-7n}{4-5n}$, $\varepsilon = 10^{-3}$
   [a sorozat szigorúan monoton csökken; legnagyobb alsó korlát: k=$\frac{7}{5}$; legkisebb felső korlát:K=2, a sorozat korlátos, a sorozat konvergens, $N_0 = 120$]

   (b) V $a_n = \frac{2n-2}{1+3n}$, $\varepsilon = 10^{-3}$
   [a sorozat szigorúan monoton nő; legnagyobb alsó korlát:k= 0; legkisebb felső korlát:K= $\frac{2}{3}$, a sorozat korlátos, a sorozat konvergens,$N_0 = 888$]

   (c) V $a_n = 2^{n+1}$, $\varepsilon = 10^{-2}$
   [a sorozat szigorúan monoton nő; legnagyobb alsó korlát:k= 4; legkisebb felső korlát:nincs, a sorozat nem korlátos, a sorozat divergens]

   (d) V $a_n = \frac{n-5}{1-3n}$, $\varepsilon = 10^{-4}$
   [szigorúan monoton csökken; legnagyobb alsó korlát: k=$-\frac{1}{3}$; legkisebb felső korlát:K=2, a sorozat korlátos,a sorozat konvergens, $N_0 = 15555$]

7. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

   (a) $a_n = -5n^2 + 4n - 8$ [$-\infty$]

   (b) $a_n = 3n^4 + \sqrt{7}n^5 - \frac{4}{3}n^2$ [∞]

   (c) $a_n = \sqrt{5n^4 - 2n^2 + 1}$ [∞]

   (d) $a_n = \sqrt[5]{3 - n - n^2}$ [$-\infty$]

(e) B $a_n = \dfrac{7n^3 - 4n^2}{6 - 5n^3 - 9n}$ $\left[-\frac{7}{5}\right]$

(f) B $a_n = \dfrac{6n - 2n^5 - 7}{3n^2 + 8n}$ $[-\infty]$

(g) B $a_n = \dfrac{2n^6 + 3 - 4n}{2 + 8n^2}$ $[\infty]$

(h) B $a_n = \dfrac{4n + 3 - 9n^4}{-2 + 5n^7}$ $[0]$

(i) B $a_n = \dfrac{(5n - 4)^2 + 2n}{3n - 2n^2}$ $\left[-\frac{25}{2}\right]$

(j) B,V $a_n = \dfrac{(-3 - 2n)^2 - 4n}{1 - 7n}$ $[-\infty]$

(k) B,V $a_n = \dfrac{2n^3 - (3 - 6n^2)^2}{2 + 4n^5 + 3n^2}$ $[0]$

(l) B,V $a_n = \dfrac{n - (n^2 + 1)(2n + 3)}{n(3n - 1)^2}$ $\left[-\frac{2}{9}\right]$

(m) B,V $a_n = \dfrac{8n^2 + (2n + 3n^2 - 1)(n^3 + 1)}{5n^3(n + 4)^2}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

(n) B,V $a_n = \dfrac{-n^2 + 2n - (3n - 3)^2}{(3 - 3n)^2 - 5n^2 + n}$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

8. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) B $a_n = \dfrac{\sqrt{2n^2 - 2n + 7}}{6 + n}$ $\left[\sqrt{2}\right]$

(b) B $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2 + 2}}{6n - 3}$ $[0]$

(c) B $a_n = \dfrac{n^2 + 2}{\sqrt[4]{n^5 - 6}}$ $[\infty]$

(d) B $a_n = \dfrac{-\sqrt{5n^2 + 4 + 2n} - 8n}{n + 3}$ $\left[-\sqrt{5} - 8\right]$

(e) B $a_n = \dfrac{3n + \sqrt{6n^2 + 2n - 8}}{5n - 1}$ $\left[\frac{3+\sqrt{6}}{5}\right]$

(f) B $a_n = \dfrac{11n^3 - 2n}{\sqrt[3]{6n + 2n^3 - 1} + 7n}$ $[\infty]$

(g) B $a_n = \dfrac{2 + n}{n^2 + \sqrt[4]{6n + 3n^4 - 1}}$ $[0]$

(h) B $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{16n^7 + 6n^3 - n}}{4 + 4n}$ $[\infty]$

(i) B $a_n = \dfrac{8n^3 + \sqrt{4n^6 + 2n^2 - 8n}}{n^3 - 1}$ $[10]$

(j) B $a_n = \dfrac{2-3n^2}{\sqrt[3]{4n^5+2n-3}}$ $[-\infty]$

(k) B $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{2n^4+6n-4}}{4n+3}$ $[\infty]$

(l) B $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^4+3n^2-1}}{3-5n}$ $[-\infty]$

(m) B $a_n = \dfrac{n^2-1}{\sqrt[3]{4n^7-2n^3-7}}$ $[0]$

(n) V $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{n^4+5}+\sqrt{6n^2+2n-8}}{n-1}$ $\left[1+\sqrt{6}\right]$

(o) V $a_n = \dfrac{6n^2+\sqrt[3]{3n^6+6n^4}}{\sqrt[3]{3n^9+6n}-2n^3}$ $[0]$

(p) V $a_n = \dfrac{\sqrt{9n^4-3n^2+4}-3n}{n^2-\sqrt[3]{5n+64n^6-2}}$ $[-1]$

9. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = 5^n - 3^n$ $[\infty]$

(b) $a_n = 10^n - 2^{4n}$ $[-\infty]$

(c) $a_n = \dfrac{3^n + 2\cdot 5^n}{4^n-4}$ $[\infty]$

(d) $a_n = \dfrac{8^n+3}{3^n-4\cdot 8^n}$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

(e) $a_n = \dfrac{2^n+5\cdot 7^n}{2\cdot 3^n+5\cdot 8^n}$ $[0]$

(f) $a_n = \dfrac{3^{n+1}+2\cdot 5^n}{5^{n+2}-2\cdot 2^{2n}}$ $\left[\frac{2}{25}\right]$

(g) B $a_n = \dfrac{4^{3n}-10^n}{10^2-7^{2n}}$ $[-\infty]$

(h) B $a_n = \dfrac{3\cdot 2^{3n+1}-3^n}{5\cdot 8^{1+n}-5^{n+1}+4}$ $\left[\frac{3}{20}\right]$

(i) B $a_n = \dfrac{4^{n+1}+6^{n-2}}{3^{n+3}-6^{n-1}}$ $\left[-\frac{1}{6}\right]$

(j) B $a_n = \dfrac{7^{-2+n}+2\cdot 8^{n+2}-1}{-3^{n-1}+5\cdot 2^{2+3n}}$ $\left[\frac{32}{5}\right]$

(k) B $a_n = \dfrac{5^{n+3}-4\cdot 3^{2n+1}}{2\cdot 4^{n-1}-2^{2+3n}+6}$ $[\infty]$

(l) B $a_n = \dfrac{-3^{n+3}-5\cdot 2^{2n+1}}{25\cdot 5^{n-2}+3^{1+3n}}$ $[0]$

(m) B $a_n = \dfrac{9^{2n-1}+3\cdot 5^{n+2}}{-3^{n+1}-4\cdot 3^{2n+1}}$ $[-\infty]$

10. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) V $a_n = \dfrac{4^{2n+1} + 3 \cdot 2^{3n+2} + 5}{7 \cdot 4^{n-2} + 9^{n-1}}$ $[\infty]$

(b) V $a_n = \dfrac{3^{n-2} - 4 \cdot 5^{3n+1}}{2 \cdot 5^{3n-2} + 4^{1+2n}}$ $[-250]$

(c) V $a_n = \dfrac{5 \cdot 2^{3n-2} + 3 \cdot 3^{2n+1}}{7 \cdot 8^{n+2} - 3^{2+3n} - 9}$ $[0]$

(d) V $a_n = \dfrac{-3^{n+3} - 6 \cdot 6^{2n+1}}{2 \cdot 6^{n-2} + 2^{3n-1}}$ $[-\infty]$

(e) V $a_n = \dfrac{-4^{2n+2} + 3 \cdot 2^{3n-1} + 8}{2 \cdot 7^{n+1} + 2^{4n+2}}$ $[-4]$

(f) V $a_n = \dfrac{3 \cdot 2^{3n-1} - 5 \cdot 3^{2n+1}}{7 \cdot 9^{n+1} - 4 \cdot 8^{n+2}}$ $\left[-\frac{5}{21}\right]$

11. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ $[\mathrm{e}^3]$

(b) $a_n = \left(1 - \frac{6}{n}\right)^n$ $\left[\mathrm{e}^{-6} = \frac{1}{\mathrm{e}^6}\right]$

(c) $a_n = \left(1 + \frac{7}{n}\right)^{21}$ $[1^{21} = 1]$

(d) B $a_n = \left(1 + \frac{9}{n}\right)^{23} + \left(\frac{2}{7}\right)^n$ $[1^{23} + 0 = 1]$

(e) B $a_n = \left(1 + \frac{8}{n}\right)^{100} - \left(\frac{3}{8}\right)^{-n}$ $[1^{100} - \infty = -\infty]$

(f) B $a_n = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$ $[\mathrm{e}^5 + \infty = \infty]$

(g) B $a_n = \left(1 + \frac{6}{n}\right)^{-n} - \left(\frac{2}{9}\right)^n$ $\left[\frac{1}{\mathrm{e}^6} - 0 = \frac{1}{\mathrm{e}^6}\right]$

(h) B,V $a_n = 7 \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{10} - 5 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^n$ $[7 \cdot 1^{10} - \infty = 7 - \infty = -\infty]$

(i) B,V $a_n = 2 \cdot \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{-n} + 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n$ $\left[2 \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^5} = \frac{2}{\mathrm{e}^5}\right]$

(j) B,V $a_n = -\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$ $[-\mathrm{e}^3 + 6 \cdot \infty = \infty]$

(k) B,V $a_n = -3 \cdot \left(1 - \frac{9}{n}\right)^{-n} - 2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{-n}$ $\left[-3 \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{-9}} - 2 \cdot 0 = -3\mathrm{e}^9\right]$

(l) B,V $a_n = 6 \cdot \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n - 8 \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^{-n}$ $[6\mathrm{e}^7 - 8 \cdot \infty = -\infty]$

(m) B,V $a_n = 7 \cdot \left(1 - \frac{11}{n}\right)^n + 4 \cdot n^{-4}$ $\left[7\mathrm{e}^{-11} + 4 \cdot 0 = \frac{7}{\mathrm{e}^{11}}\right]$

12. B Az alábbi sorok közül melyik mértani (geometriai) sor?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-3)^k$$

[$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$kvóciens:$q = \frac{3}{4}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-3)^k$kvóciens:$q = -3$]

13. B Az alábbi mértani (geometriai) sorok közül melyik konvergens?
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{k}, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^{k-1}, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} 8 \cdot 0,3^{k}$
$[\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{k-1}, q = \frac{2}{9}, \sum\limits_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^{k-1}, q = -\frac{1}{7}, \sum\limits_{k=1}^{\infty} 8 \cdot 0,3^{k}, q = 0,3]$

14. Döntse el, hogy a alábbi sorok konvergensek-e! Ha igen, adja meg a sor összegét! $\left(S = \frac{a}{1-q}\right)$

   (a) B,V $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{k}$ [$q = \frac{5}{2}$,a sor nem konvergens]

   (b) B,V $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$ [$q = \frac{7}{9}, S = 9$]

   (c) B,V $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3^{k-1}}$ $[\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3^{k-1}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}, q = \frac{1}{3}, S = 7,5]$

   (d) B,V $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 8 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{k}$ [$q = -\frac{2}{5}, S = -\frac{16}{7}$]

15. V 18 éven keresztül minden év elején beteszek a bankba 70 000 Ft-ot. A 18. év végén mennyi pénzt sikerül összegyűjteni, ha az éves kamatláb 4%?
[$70\ 000 \cdot 1,04 + 70\ 000.1,04^2 + ... + 70\ 000 \cdot 1,04^{18}, 1\ 866\ 986 Ft$]

16. V 20 éven keresztül minden év elején beteszek a bankba 120 000 Ft-ot. A 20. év végén mennyi pénzt sikerül összegyűjteni, ha az éves kamatláb 3,2%? [3 396 159 Ft]

17. V Egy kis vállalkozás januári nyeresége 500 000 Ft volt. A körülmények úgy alakultak, hogy az év hátralévő részében, minden hónapban a nyereség az előző hónaphoz képest 5%-kal csökkent. Mennyi volt a teljes éves nyereség?
[$500\ 000 + 500\ 000 \cdot 0,95 + ... + 500\ 000 \cdot 0,95^{11}, 4\ 596\ 399 Ft$]

18. V Egy fakitermeléssel foglalkozó cég az egyik évben 25 000 m^3 fát vágott ki. A következő 8 évben a termelés évente 2%-kal csökkent az előző évhez képest. Hány m^3 fát vágtak ki a 9 év alatt összesen? [$207\ 815, 3m^3$]