Improprius integrálás

Tanulási cél

Határozott integrál fogalmának kiterjesztése végtelen intervallumra. Definíciók alkalmazása konkrét feladatok esetén.

Motivációs példa

Eddig határozott integrált csak véges zárt intervallumon számoltunk. Ha az integrandus az adott intervallumon folytonos, akkor a határozott integrál létezik és primitív függvény ismeretében könnyen meghatározható.

Valószínűség-számításnál találkozhatunk a következő típusú feladattal.

Legyen $f(x)=\frac{1}{x^2}$, ha $x \geq 1$.

Bizonyítsuk be, hogy a f függvény és az x tengely által közbezárt terület nagysága 1.

Korábbi ismereteink alapján tudjuk, hogy ha egy f függvény adott intervallumon nem vesz fel negatív értéket, akkor f és az x tengely által közbezárt terület nagyságát f adott intervallumhoz tartozó határozott integrálja adja meg. Tehát ebben az esetben $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ integrált kellene kiszámolni. Ezzel az a gond, hogy a határozott integrál számolásánál eddig véges értékekkel dolgoztunk, amelyeket be tudtunk helyettesíteni a Newton-Leibniz-formulába. A ∞ -t nem tudjuk behelyettesíteni. A kérdés ezután általánosabban úgy fogalmazható meg, hogy miként tudunk integrálni olyan esetben, amikor az integrálási intervallum nem véges, azaz határai között szerepel a ∞ , vagy a $-\infty$, vagy mindkettő. Erre adjuk meg a választ az alábbiakban.

Elméleti összefoglaló

A definíciók jobb megértéséhez próbáljuk meg kikövetkeztetni a $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ integrál értékét.

Gondolkodjunk a következőképpen. Számoljuk ki első lépésben a határozott integrált $[1,100]$ intervallumon. Majd az intervallum felső határát toljuk egyre kijjebb és kijjebb. Mivel az integrandus folytonos, így bármely $[1,b]$ intervallumon ($b>1$) a határozott integrálok léteznek. Primtitív függvényt tudunk adni, így ezeket az integrálokat ki is tudjuk számolni. Majd vizsgáljuk meg, hogy ezen értékekről mit tudunk mondani.

$$\int_1^{100} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^{100} x^{-2}\,dx \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{100} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{100} = -\frac{1}{100}+1=\frac{99}{100}$$

$$\int_1^{1000} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{1000} = -\frac{1}{1000}+1=\frac{999}{1000}$$

$$\int_1^{1\,000\,000} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{1\,000\,000} = -\frac{1}{1\,000\,000} + 1 = \frac{999\,999}{1\,000\,000}$$

Jelöljuk b -vel a felső határt és állítsuk elő vele a határozott integrálokat.

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1 = 1 - \frac{1}{b}$$

Jól látható, ha a az intervallum felső értékét egyre kijjebb toljuk, akkor egyre kisebb értéket kell kivonni 1 -ből. Tehát ha a felső határ végtelen, akkor az integrál értékét 1-nek vehetjük.

Másképp megfogalmazva: mivel a véges zárt intervallumon számolt határozott integrálok értékeit elő tudtuk állítani a felső integrációs határ függvényként, amely egyre közelebb és közelebb esik 1-hez (tart 1-hez), ha a felsőhatár minden határon túl növekszik, ezért $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ legyen.

Adjuk meg most már egy folytonos függvénynek egy végtelenbe nyúló intervallumon értelmezett integráljának definícióját, amit szokás improprius integrálnak nevezni.

Definíció: Legyen $f(x)$ az $[a,\infty[$ intervallum értelmezett folytonos függvény. Ekkor a $\int_a^\infty f(x)dx$ improprius integrál pontosan akkor létezik, ha

$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ határérték létezik (véges), és ekkor az improprius integrál értéke legyen éppen a kapott határérték, azaz

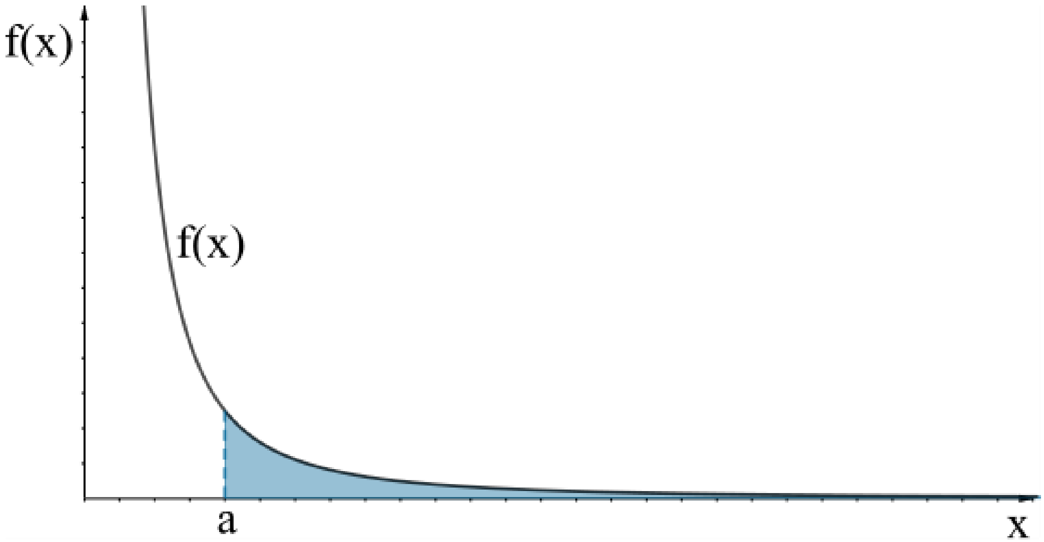
$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx\ .$$

Ha a határérték létezik, akkor szokás azt mondani, hogy az improprius integrál konvergens.

Ha a határérték nem létezik (nem véges), akkor az improprius integrál nem létezik. Ilyen esetben szokás azt mondani, hogy az improprius integrál divergens.

A határozott integrálhoz hasonlóan az improprius integrálhoz is tudunk geometriai jelentés adni. Ha $f(x)\geq 0$ az $[a,\infty[$ intervallumon és $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergens, akkor az improprius integrál értéke éppen f függvény és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát adja az $[a,\infty[$ intervallumon. Ha $f(x)\leq 0$ az $[a,\infty[$ intervallumon és $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergens, akkor az improprius integrál értéke biztosan nempozitív, de abszolút értéke éppen a függvény és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát adja meg.

Tehát általában egy függvény $[a,\infty[$ intervallumon vett integrálja szemléletesen annak a síkrésznek az előjeles területét adja meg, ami a függvény grafikonja és az x tengely között helyezkedik el az $[a,\infty[$ intervallumon. Ebben az érdekes, hogy olyan alakzat területéről beszélünk, ami vízszintes irányban a ∞-ig nyúlik, tehát nem korlátos.



Szemléletesen nyilvánvaló, hogy egy ilyen alakzatnak csak akkor létezhet területe, ha a ∞ felé haladva az alakzat egyre keskenyebb lesz, azaz a függvény grafikonja simul az x tengelyhez, ami azt jelenti, a függvény határértéke a végtelenben 0. (De ez önmagában nem elegendő feltétel az improprius integrál konvergenciájára. Ha egy függvény határértéke a végtelenben nulla, az improprius integrálja még lehet divergens.)

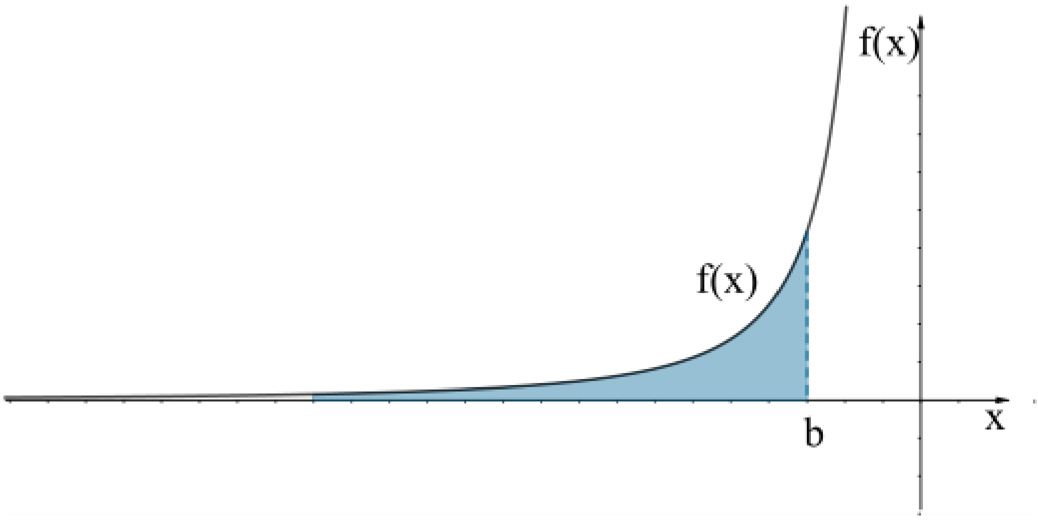
Definíció: Legyen $f(x)$ a $]-\infty,b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvény. Ekkor a $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ improprius integrál pontosan akkor létezik, ha

$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ határérték létezik (véges) és ekkor az improprius integrál értéke legyen éppen a kapott határérték, azaz

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx \ .$$

Ha a határérték véges, akkor szokás azt mondani, hogy az improprius integrál konvergens. Minden más esetben az improprius integrál nem létezik, másképpen divergens.

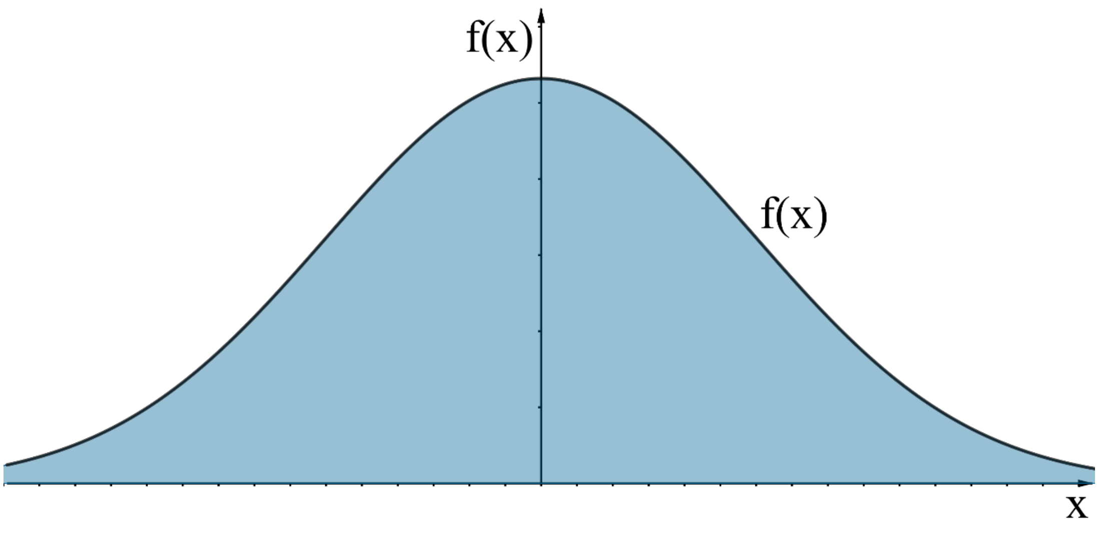
Itt is kimondhatjuk, hogy egy függvény $]-\infty,a]$ intervallumon vett integrálja szemléletesen annak a síkrésznek az előjeles területét adja meg, ami a függvény grafikonja és az x tengely között helyezkedik el az $]-\infty,a]$ intervallumon.



Nyilván csak akkor lehet konvergens egy ilyen integrál, ha az $f(x)$ függvény határértéke a $-\infty$-ben 0, azaz $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Definíció: Ha az egyik integrációs határ sem véges, akkor az integrálást úgy fogjuk fel, hogy mind az alsó, mind a felső határt végesnek választjuk, majd mindkettőt egyre kijjebb és kijjebb toljuk (az alsót mínusz végtelenbe, a felsőt plusz végtelenbe) és ekkor
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx \,.$$

Az improprius integrál akkor lesz konvergens, ha a határértékek külön-külön léteznek, minden más esetben pedig divergens.
Egy függvény $]-\infty,\infty[$ intervallumon vett integrálja szemléletesen annak a síkrésznek az előjeles területét adja meg, ami a függvény grafikonja és az x tengely közötti helyezkedik el az $]-\infty,\infty[$ intervallumon.



Nyilván csak akkor lehet konvergens egy ilyen integrál, ha az $f\left(x\right)$ függvény határértéke a $-\infty$-ben és a ∞-ben is 0, azaz $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=0$.

Kidolgozott feladatok

Határozzuk meg az alábbi improprius integrálok értékét.

1. feladat

$$\int_2^\infty \frac{4}{x^3}dx$$

Megoldás

Az integrandus értelmezve van és folytonos a $[2,\infty[$, Továbbiakban a folytonosságot nem vizsgáljuk, csak olyan feladatot nézünk, amelyekre a feltételek teljesülnek.
Alkalmazhatjuk a definíciót. A felső integrációs határban szerepelő ∞ jelét cseréljük le b -re.

$$\int_2^\infty \frac{4}{x^3}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{4}{x^3}dx=$$

Első lépésként végezzük el az integrálást, és utána jöhet a határérték keresése.
Szükségünk van egy primitív függvényre. Azért hogy a megoldás jobban átlátható legyen, végezzük el külön a határozatlan integrál keresését, majd térjünk vissza az improprius integrál meghatározásához.

$$\int \frac{4}{x^3}dx=4\int x^{-3}dx=4\frac{x^{-2}}{-2}+c=-2\frac{1}{x^2}+c$$

Folytassuk az improprius integrálást:

$$\int_2^\infty \frac{4}{x^3}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{4}{x^3}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-2\frac{1}{x^2}\right]_2^b=\lim_{b\to\infty}\left[-2\frac{1}{b^2}+\frac{2}{4}\right]=$$

Alkalmazzuk a korábbi határértékre vonatkozó ismereteinket. Első lépésként elég $\frac{1}{b^2}$ határértékét vizsgálni. Mivel a nevező minden határon túl növekedni fog, azért a reciproka egyre kisebb pozitív szám lesz, azaz

$$\text{ha}\quad b\to\infty\quad\Rightarrow\quad b^2\to\infty\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{b^2}\to\frac{1}{\infty}=0$$

Most már tudunk határértéket adni.

$$\lim_{b\to\infty}\left[-2\frac{1}{b^2}+\frac{1}{2}\right]=-2\cdot 0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Tehát a határérték létezik (véges), az improprius integrál konvergens és értéke $\int_2^\infty \frac{4}{x^3}dx=\frac{1}{2}$

2. feladat

$$\int_8^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}dx$$

Megoldás

Ez is egy improprius integrál, mert a felső határ ∞. Alkalmazzuk a definíciót. A ∞ jelét cseréljük le b -re.

$$\int_8^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_8^b \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}dx =$$

Külön végezzük el a határozatlan integrál számítását. Vegyük észre, hogy az integrandus most egy lineáris kifejezés negatív kitevős hatványaként írható fel. Ekkor használható az alábbi integrációs szabály:

$\int f(ax+b)dx = \dfrac{F(ax+b)}{a} + c$ ha $F'(x) = f(x)$.

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}dx = \int \frac{1}{(x+4)^{\frac{1}{3}}}dx = \int (x+4)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{(x+4)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}\cdot 1} + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+4)^2} + c$$

Van primitív függvényünk, folytassuk az improprius integrálást:

$$\int_8^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_8^b \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_8^b (x+4)^{-\frac{1}{3}}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+4)^2}\right]_8^b =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(b+4)^2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{12^2}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(b+4)^2} + 3\sqrt[3]{36}\right] =$$

Most is az összeg első tagját kell vizsgálnunk, mivel a második tag konstans, így önmagához tart. Használjuk fel korábbi határértékre vonatkozó ismereteinket, azaz

ha $b\to\infty \quad \Rightarrow \quad (b+4)^2\to\infty \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{(b+4)^2}\to\infty$

Tehát

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(b+4)^2} + 3\sqrt[3]{36}\right] = \infty + 3\sqrt[3]{36} = \infty$$

Mivel a határérték nem egy véges valós szám, hanem ∞ ezért az improprius integrál nem létezik, azaz divergens.

3. feladat

$$\int_0^\infty e^{-3x}\,dx$$

Megoldás

Egy improprius integrállal van dolgunk. A definíció szerint írjuk át az integrált.

$$\int_0^\infty e^{-3x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-3x}dx =$$

Első lépésként adjunk primitív függvényt. Vegyük észre, hogy egy összetett függvénnyel van dolgunk. A belső függvény $-3x$, újra használható az alábbi integrációs szabály:

$$\int f\left(ax+b\right)dx = \frac{F\left(ax+b\right)}{a}+c \text{ ha } F'(x)=f(x) \text{ .}$$

Így:

$$\int e^{-3x}dx = \frac{e^{-3x}}{-3}+c$$

Folytassuk az integrálást a kapott primitív függvény felhasználásával.

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-3x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-3b}}{-3}-\frac{e^{0}}{-3}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-3b}}{-3}+\frac{1}{3}\right] =$$

Mivel egy konstans függvény mindig önmagához tart, ezért csak azt kellene vizsgálni, hogy az első tag, azaz $\frac{1}{-3e^{3b}}$ vajon hova tart, ha $b\to\infty$.

Használjuk fel, hogy mivel $\lim\limits_{b\to\infty}\left[-3e^{3b}\right]=-\infty$, akkor $\lim\limits_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-3b}}{-3}\right] = \lim\limits_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-3e^{3b}}\right] = \left(\frac{1}{-\infty}\right) = 0$.

Így

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-3e^{3b}}+\frac{1}{3}\right] = 0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Tehát az improprius integrál konvergens és értéke

$$\int_0^\infty e^{-3x}dx = \frac{1}{3}$$

4. feladat

$$\int_4^\infty \frac{10}{\left(3-2x\right)^5}dx$$

Megoldás

Egy improprius integrállal van dolgunk. A definíció szerint írjuk át az integrált.

$$\int_4^\infty \frac{10}{\left(3-2x\right)^5}dx = \lim_{b\to\infty}\int_4^b \frac{10}{\left(3-2x\right)^5}dx =$$

Ahhoz, hogy tovább tudjunk lépni, szükségünk van egy primitív függvényre. Vegyük észre, hogy az integrandus egy összetett függvény, amelyben a külső függvény $\frac{10}{x^5}$, a belső függvény pedig $3-2x$, azaz egy lineáris függvény. A külső függvény miatt az integrandust negatív kitevőjű hatványba átírva, azaz van integrálási módszerünk:

$$\int \frac{10}{(3-2x)^5}dx = \int 10(3-2x)^{-5}dx = 10\cdot\frac{(3-2x)^{-4}}{(-4)\cdot(-2)}+c = \frac{10}{8(3-2x)^4}+c$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_4^b \frac{10}{(3-2x)^5}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{5}{4(3-2x)^4}\right]_4^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{5}{4(3-2b)^4}-\frac{5}{4\cdot 5^4}\right] =$$

Használjuk fel, hogy $\frac{1}{4\cdot 5^3}$ egy szám, ezért önmagához fog tartani, így csak azt kell vizsgálni, ha b egy nagyon nagy értékeket vesz fel, akkor $\frac{5}{4(3-2b)^4}$ hova fog tartani.

Mivel $\lim\limits_{b\to\infty} 4(3-2b)^4 = 4(-\infty)^4 = \infty$, így $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{4(3-2b)^4} = \frac{5}{\infty} = 0$.

Most már térjünk vissza az eredeti feladathoz.

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{5}{4(3-2b)^4}-\frac{5}{4\cdot 5^4}\right] = 0-\frac{1}{4\cdot 5^3} = -\frac{1}{4\cdot 5^3} = -\frac{1}{500}$$

Tehát az improprius integrál konvergens és értéke

$$\int_4^\infty \frac{10}{(3-2x)^5}dx = -\frac{1}{500}$$

Kidolgozott feladatok

1. feladat

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{5}{4x+3}dx$$

Megoldás

Alkalmazzuk a definíciót. Most az alsó integrációs határban szereplő $-\infty$-t kell lecserélni. Az új alsó határ legyen a .

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{5}{4x+3}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}\frac{5}{4x+3}dx =$$

Ahhoz, hogy tovább tudjunk lépni, szükségünk van egy primitív függvényre. Vizsgáljuk meg a $\int\frac{5}{4x+3}dx$ határozatlan integrált. Mivel a nevező egy elsőfokú (lineáris) polinom, így a deriváltja egy szám, ebben az esetben éppen 4. Egy bővítéssel kialakíthatjuk a számlálóban a nevező deriváltját, majd használhatjuk az $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$ integrálási szabályt.

$$\int \frac{5}{4x+3}dx = \frac{5}{4}\int \frac{4}{4x+3}dx = \frac{5}{4}\ln|4x+3| + c$$

Van primitív függvényünk, folytassuk az improprius integrálást.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{5}{4x+3}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-1} \frac{5}{4x+3}dx = \lim_{a\to-\infty}\frac{5}{4}\Big[\ln|4x+3|\ \Big]_a^{-1} =$$

Használjuk a Newton-Leibniz tételt, ügyelve arra, hogy az alsó integrációs határ most éppen a.

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{5}{4}\Big[\ln|4x+3|\ \Big]_a^{-1} = \lim_{a\to-\infty}\frac{5}{4}\Big[\ln|-1| - \ln|4a+3|\ \Big] = \lim_{a\to-\infty}\frac{5}{4}\Big[\ln 1 - \ln|4a+3|\ \Big] =$$

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{5}{4}\Big[0 - \ln|4a+3|\ \Big] = \lim_{a\to-\infty}\frac{5}{4}\Big[-\ln|4a+3|\ \Big] = \lim_{a\to-\infty} -\frac{5}{4}\ln|4a+3| =$$

Korábbi határértékekre vonatkozó ismereteink alapján mondhatjuk, ha $a \to -\infty$, akkor $|4a+3| \to |-\infty| = \infty$. Mivel minden határon túl növekvő számok természetes alapú logaritmusa is minden határon túl növekvő, így

$$\lim_{a\to-\infty} -\frac{5}{4}\ln|4a+3| = -\frac{5}{4}\cdot\infty = -\infty$$

Tehát az improprius integrál nem létezik, másképpen divergens, mivel a vizsgált határérték nem véges.

2. feladat

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{36}{\sqrt[5]{(3x-4)^7}}dx$$

Megoldás

Alkalmazzuk a definíciót. Most is az alsó integrációs határt kell lecserélni.

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{36}{\sqrt[5]{(3x-4)^7}}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1} \frac{36}{\sqrt[5]{(3x-4)^7}}dx =$$

A következő lépés a primitív függvény előállítása. Az integrandus most is összetett függvény egy lineáris belső függvénnyel. A külső függvény $\frac{36}{\sqrt[5]{x^7}}$,amit csak akkor tudunk integrálni, ha átírjuk x negatív kitevős hatványaként. Majd alkalmazzuk a lineáris belső függvényre vonatkozó integrálási szabályt:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c \text{ ha } F'(x) = f(x) \ .$$

Hajtsuk végre a megadott lépéseket.

$$\int \frac{36}{\sqrt[5]{(3x-4)^7}}dx = \int 36(3x-4)^{-\frac{7}{5}}dx = 36\frac{(3x-4)^{-\frac{2}{5}}}{-\frac{2}{5}\cdot 3} + c =$$

$$36\cdot\frac{-5}{6}\cdot\frac{1}{(3x-4)^{\frac{2}{5}}}+c=-30\frac{1}{\sqrt[5]{(3x-4)^2}}+c$$

A primitív függvény ismeretében folytassuk az improprius integrálást.

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^1\frac{36}{\sqrt[5]{(3x-4)^7}}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{30}{\sqrt[5]{(3x-4)^2}}\right]_a^1=\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{30}{1}+\frac{30}{\sqrt[5]{(3a-4)^2}}\right]=$$

Most az összeg első tagja egy konstans, ami önmagához, azaz -30-hoz tart. A második tag határértékét kell vizsgálni. Haladjunk lépésenként.

Ha $a\to-\infty$, akkor $(3a-4)^2\to(-\infty)^2=\infty$. Mivel minden határon túl növekvő pozitív számok ötödik gyöke is minden határon túl növekvő szám lesz, ezért $\lim\limits_{a\to-\infty}\sqrt[5]{(3a-4)^2}=\infty$. Minden határon túl növekvő pozitív számok reciprokai pedig egyre közelebb esnek nullához, azaz

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{36}{\sqrt[5]{(3a-4)^2}}=\frac{36}{\infty}=0$$

Most már be tudjuk fejezni az improprius integrálást.

$$\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{30}{1}+\frac{30}{\sqrt[5]{(3a-4)^2}}\right]=-30+0=-30$$

Tehát az improprius integrál konvergens és értéke éppen $\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{36}{\sqrt[5]{(3x-4)^7}}\,dx=-30$.

3. feladat

$$\int_{-\infty}^{-1}8e^{7x+5}\,dx$$

Megoldás

Alkalmazzuk a szokott módon a definíciót.

$$\int_{-\infty}^{-1}8e^{7x+5}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}8e^{7x+5}\,dx=$$

A következő lépés most is a primitív függvény előállítása. Az integrandus egy összetett függvény egy lineáris belső függvénnyel. Most is alkalmazzuk az alábbi integrálási szabályt:

$$\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+c \text{ ha } F'(x)=f(x)\ .$$

$$\int 8e^{7x+5}dx=8\frac{e^{7x+5}}{7}+c=\frac{8}{7}e^{7x+5}+c$$

Térjünk vissza az improprius integrálhoz.

$$\int_{-\infty}^{-1}8e^{7x+5}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}8e^{7x+5}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{8}{7}e^{7x+5}\right]_a^{-1}=\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{8}{7}e^{-2}-\frac{8}{7}e^{7a+5}\right]=$$

A határérték előállításához azt kell megnézni, hogy nagyon kicsi negatív a esetén e^{7a+5} vajon hova tart? Haladjunk most is lépésenként.

Ha $a \to -\infty$, akkor $7a+5 \to -\infty$. De nagyon kicsi negatív számokhoz közelítve e^{7a+5} nullához egyre közelebbi értékeket vesz fel, azaz $\lim\limits_{a\to-\infty} e^{7a+5} = 0$.

Tehát a határérték véges, az improprius integrál konvergens és értéke:

$$\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{8}{7}e^{-2}-\frac{8}{7}e^{7a+5}\right]=\frac{8}{7}e^{-2}-\frac{8}{7}\cdot 0=\frac{8}{7}e^{-2}=\frac{8}{7e^2}$$

4. feladat

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{2+e^x}\,dx$$

Megoldás

Induljunk el a szokott módon.

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{2+e^x}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{e^x}{2+e^x}\,dx=$$

Folytassuk a primitív függvény megadásával. Tört integrandus esetén az az első amit érdemes megnézni, hogy vajon mi a nevező deriváltja. Látható, hogy a számlálóban éppen a nevező deriváltja szerepel. Így van integrálási szabályunk, amit tudunk alkalmazni.

$$\int\frac{e^x}{2+e^x}\,dx=\ln\left|2+e^x\right|+c=\ln\left(2+e^x\right)+c$$

Felhasználva, hogy $2+e^x$ csak pozitív értékeket vehet fel, az abszolút érték egyszerűen elhagyható.

Térjünk vissza az improprius integrálhoz.

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{2+e^x}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{e^x}{2+e^x}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\left[\ln\left(2+e^x\right)\right]_a^0=\lim_{a\to-\infty}\left[\ln 3-\ln\left(2+e^a\right)\right]$$

A határértéknél most is lépésenként haladjunk.

Ha $a\to-\infty$ akkor $2+e^a\to 2+0=2$ és ekkor $\ln\left(2+e^a\right)\to\ln 2$

A határérték tehát véges, az improprius integrál konvergens és értéke:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{2+e^x}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\left[\ln 3-\ln\left(2+e^a\right)\right]=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

Kidolgozott feladatok

1. feladat

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\,dx$$

Megoldás

Egyik határ sem véges, így mindkettőt megváltoztatjuk, majd a megváltoztatott határokkal tartunk az eredetiekhez. Így kettős határértékünk lesz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx =$$

Primitív függvényt kell előállítani. Az integrandus egy törtfüggvény, amelynek a számlálójában majdnem a nevező deriváltja látható. Mivel $\left(1+e^{3x}\right)' = 3e^{3x}$, ezért bővítsünk 3-mal és használjuk $\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + c$ integrálási szabályt.

$$\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}dx = \frac{1}{3}\ln|1+e^{3x}| + c = \frac{1}{3}\ln\left(1+e^{3x}\right) + c$$

Mivel $1+e^{3x}$ minden lehetséges x esetén pozitív értéket vesz fel, az abszolút érték elhagyható. Folytassuk az improprius integrálást.

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \left[\frac{1}{3}\ln(1+e^{3b})\right]_a^b = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \left[\frac{1}{3}\ln(1+e^{3b}) - \frac{1}{3}\ln(1+e^{3a})\right] =$$

Használjuk fel, hogy ha $a\to-\infty \Rightarrow e^{3a}\to 0 \Rightarrow 1+e^{3a}\to 1$ és

ha $b\to\infty \Rightarrow e^{3b}\to\infty \Rightarrow 1+e^{3b}\to\infty$, így

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \left[\frac{1}{3}\ln(1+e^{3b}) - \frac{1}{3}\ln(1+e^{3a})\right] = \frac{1}{3}\cdot\infty - \frac{1}{3}\cdot\ln 1 = \infty$$

Tehát az egyik határérték nem létezik, így a $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx$ improprius integrál divergens.

2. feladat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+3x^2}dx$$

Megoldás

Az alsó és felső határt is le kell cserélni, majd az alábbi két határértéket kell vizsgálni:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+3x^2}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b \frac{x}{1+3x^2}dx =$$

Végezzük el a primitív függvény keresését. Az integrandus egy törtfüggvény. Vegyük észre, hogy a számlálóban bővítéssel kialakítható a nevező deriváltja. Mivel $(1+3x^2)' = 6x$, bővítsünk 6-tal.

$$\int \frac{x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\ln|1+3x^2| + C$$

Mivel $1+3x^2 > 0$ minden valós x esetén, ezért az abszolút értéket a továbbiakban elhagyjuk.

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b \frac{x}{1+3x^2}dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left[\frac{1}{6}\ln(1+3x^2)\right]_a^b=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{6}\ln(1+3b^2)-\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{6}\ln(1+3a^2)=$$

Vizsgáljuk meg az első határértéket:

ha $b\to\infty \;\Rightarrow\; 1+3b^2\to\infty \;\Rightarrow\; \ln(1+3b^2)\to\infty$.

Következik a másik határérték:

ha $a\to-\infty \;\Rightarrow\; 1+3a^2\to\infty \;\Rightarrow\; \ln(1+3a^2)\to\infty$.

Tehát

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{6}\ln(1+3b^2)-\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{6}\ln(1+3a^2)=\infty-\infty$$

Mivel a határértékek nem végesek, az improprius integrál nem létezik. (Már az első határértékszámolás után mondhattuk volna, hogy az improprius integrál divergens.)

3. feladat

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$$

Megoldás

Most is azzal kell kezdeni a feladatot, mind az alsó, mind a felső integrációs határt lecseréljük.

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b xe^{-x^2}dx=$$

Szükségünk van egy primitív függvényre, hogy tovább tudjunk lépni. Az ilyen típusú integráloknál észre kell venni, hogy e^{-x^2} egy összetett függvény, amelynek belső függvénye $-x^2$. A belső függvény deriváltja pedig $-2x$, ami egy egyszerű bővítéssel kialakítható az integrandusban. Ha pedig egy összetett függvényt szorzunk éppen a belső függvényének deriváltjával, akkor használható a korábbról ismert integrálási szabály:

$$\int f\left(g(x)\right)\cdot g'(x)dx=F\left(g(x)\right)+c \quad \text{ahol} \quad \mathrm{F}'(x)=f(x)$$

Végezzük el a számolást:

$$\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int -2xe^{x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

A primitív függvény segítségével határozzuk meg az improprius integrált. Alkalmazzuk az új határokra a Newton -Leibniz tételt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b xe^{-x^2}dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_a^b=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-b^2}\right]-\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-a^2}\right]=$$

A határértékek vizsgálata következik. Haladjunk lépésenként.

Ha $b\to\infty$ akkor $-b^2\to-\infty$ *é*s $e^{-b^2}\to 0$

Hasonló következtetésre jutunk a másik határértéknél is.

Ha $a \to -\infty$ akkor $-a^2 \to -\infty$ $\acute{e}s$ $e^{-a^2} \to 0$

Tehát a két határérték külön-külön létezik, az improprius integrál konvergens és értéke:

$$\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-b^2}\right]-\lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-a^2}\right]=-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

Megjegyzés: Az eredmény meglehetősen furcsa. Ha azonban ábrázoljuk a függvényt, a végeredmény egyértelmű. Jól látható, hogy a függvény az origóra szimmetrikus és így a két görbe alatti terület megegyezik. De az x tengely feletti és alatti területeket az integrálás ellentétes előjellel adja meg. Így az összegük nulla lesz.