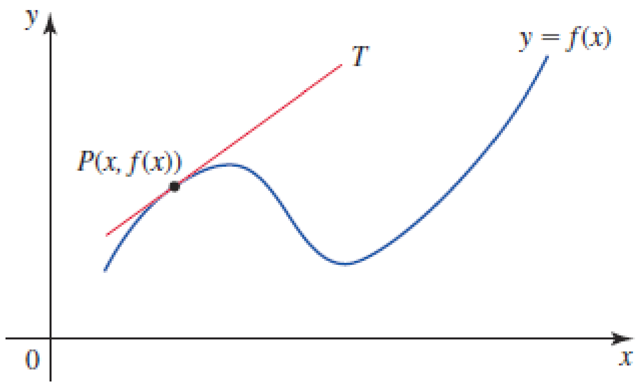
**Differenciálszámítás bevezetése**

**Tanulási cél:** A differencia és differenciálhányados fogalmának megismerése. Elemi derivált függvények megadása. Érintő egyenletének értelmezése és felírása.
**Motivációs példa:** Azt szokták mondani, hogy semmi sem állandó csak a változás. Valóban, a minket körülvevő világban minden folyamatosan átalakul, minden sok minden mással kapcsolatban van, azoktól függ. Ezeknek a viszonyoknak a felderítése a természettudományok fő feladata. A különféle függések egyik matematikai modellje a **függvény** fogalma. A változások sok jellemzője közül az egyik nagyon fontos a változás „sebessége". A gyorsan változó folyamatok veszélyt hordozhatnak magukban azáltal, hogy nem adnak időt a reagálásra.
Egy vállalkozás szempontjából nagyon fontos kérdés, hogy a termelt mennyiséget növelve hogyan változik és milyen mértékben az összköltség. Egy termék ára befolyásolja a termék iránti keresletet és ezáltal a nyereséget is. Ha emeljük a termék árát, a kereslet és a nyereség is változni fog. Kérdés milyen irányú és milyen mértékű ez a változás.
A változások gyorsaságát a matematika a **derivált** fogalmával ragadja meg.

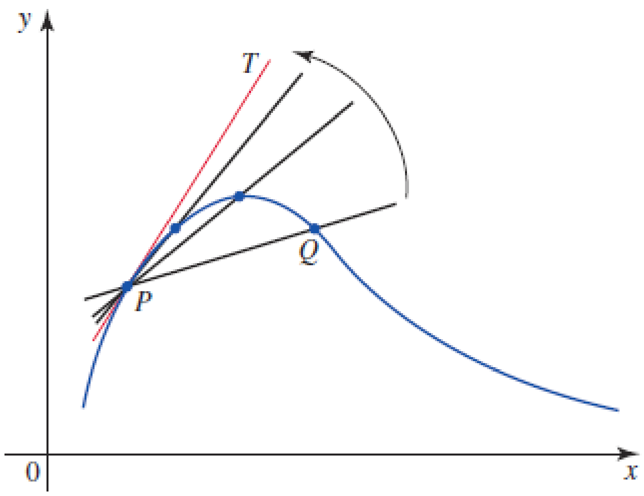
**Elméleti összefoglaló**

Az analízis fejlődése, amint az gyakran máskor is előfordult, szorosan kötődött problémák megoldásához. A mi esetünkben az egyik ilyen probléma az **érintő** meghatározása volt.




*1. ábra*

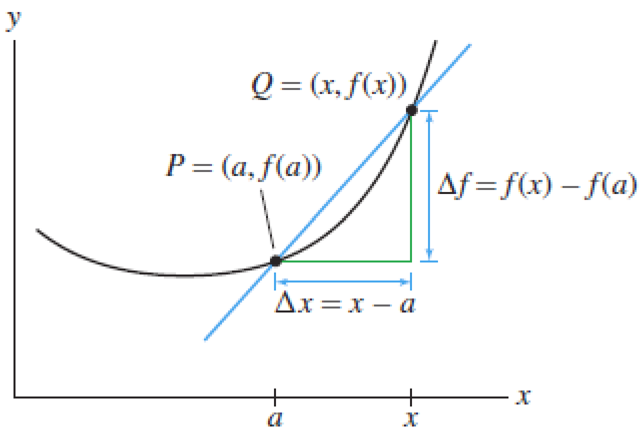
A fenti ábrán egy $f(x)$ függvény grafikonját és annak a $P(x, f(x))$ pontban megrajzolt „érintőjét" látjuk. Érezzük, hogy az $f(x)$ függvény megadása és a P pont lerögzítése meghatározza az ábrán pirossal jelölt egyenest. Ennek az egyenesnek is $y = mx + b$ az egyenlete, csak az a kérdés, hogy az $m$ meredekség és a $b$ konstans hogyan függ az $f(x)$ függvénytől és a $P(x, f(x))$ ponttól.




*2. ábra*

Ez az ábra azt mutatja, hogy az érintő a szelők határhelyzetének tekinthető: a $P$ és $Q$ pontokon átmenő szelő egyre „közelebb” van az érintőhöz, ahogy a $Q$ pont egyre közelebb kerül P-hez. Ezek motiválják a következő definíciókat.

Legyen $a, x \in D_f$ az f függvény értelmezési tartományának két különböző elem, és tekintsük az $f$ függvény grafikonján a $P(a, f(a))$ és a $Q(x, f(x))$ pontokat.




*3. ábra*

**Definíció:** Az $a \in D_f$ és $x \in D_f$ helyekhez tartozó **különbségi hányados** vagy **differencia hányados** a

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tört.

**Definíció:** Ha az $a \in D_f$ helyen **létezik** és **véges** az a és x helyekhez tartozó különbségi hányadosnak a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határértéke, akkor az f függvény **differenciálható** az $a \in D_f$ helyen. Ekkor a fenti határérték értékét $f'(a)$ jelöli, és ezt az $a \in D_f$ helyhez tartozó **differenciálhányadosnak** hívjuk, így tehát

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ha létezik $f'(a)$, akkor a fenti határérték létezése miatt, és azért, mert $f(a)$ is létezik, az $a$ hely csak belső pontja lehet a $D_f$ -nek.

**Definíció:** Azt az $f'$ függvényt, amelyik az $f$ függvény értelmezési tartományának azokban az $a$ pontjaiban van értelmezve, ahol az $f$ függvény differenciálható, és minden ilyen helyen az értéke az $a$ -beli $f'(a)$ differenciálhányados, az $f$ függvény **derivált függvényének** hívjuk.

A derivált függvény értelmezési tartomány tehát részhalmaza az eredeti függvény értelmezési tartományának.

A differenciálhányados segítségével az érintő problémája már megoldható.

**Definíció:** Ha $f$ differenciálható az $a \in D_f$ helyen, akkor az $f$ grafikonjához a $P(a, f(a))$ pontban húzható érintő **meredeksége** $f'(a)$, és az **érintő egyenes egyenlete**

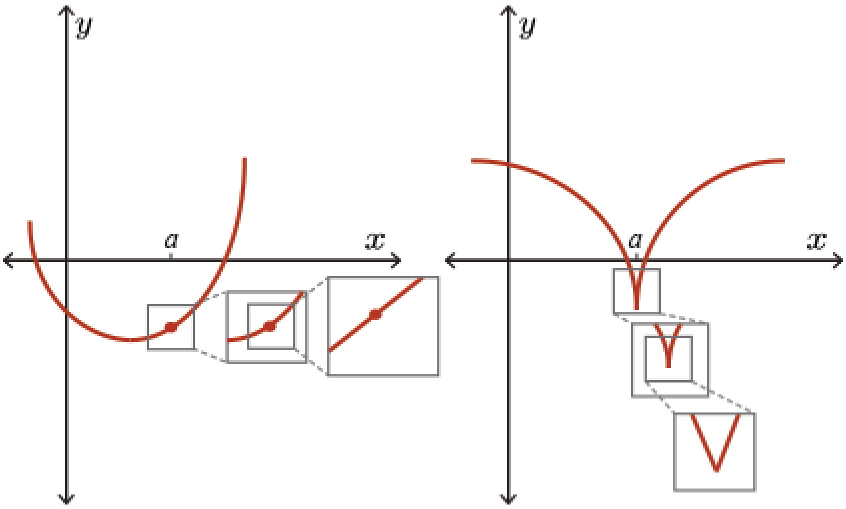
$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) = \underbrace{f'(a)}_{m} \cdot x + \underbrace{f(a) - a \cdot f'(a)}_{b}.$$

Ebből látható, hogy $f'(a) = 0$ esetén az érintő vízszintes, $f'(a) > 0$ esetén az érintő emelkedő egyenes, vagyis az a hely közelében a függvény növekszik, és $f'(a) < 0$ esetén pedig érintő süllyedő egyenes vagyis az a hely közelében a függvény csökken.

Az érintő egyenes tekinthető egy lineáris $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ függvény grafikonjának. Ezt a g függvényt hívjuk az **f függvény a-beli linearizáltjának**. Elég egy pillantást vetni egy függvényt és annak egy érintőjét mutató ábrára, hogy világos legyen: a linearizált jól közelíti az érintési pontban a függvényt. Sőt, bármilyen bonyolult is az f függvény, egy nagyon egyszerű lineáris függvény szolgáltatja ezt a jó közelítést. Ez lehetőséget ad függvényértékek közelítő meghatározására.

**Tétel:** Ha az f függvény differenciálható a-ban, akkor folytonos is a-ban.

Sőt, ennél több is igaz. Az a pontbeli differenciálhatóság azt jelenti, hogy a függvény grafikonja sima az a pont környékén, nincs szakadása és nincs töréspontja. Ha közelről nézzük a grafikont, akkor az egyenesnek tűnik. Az alábbi ábrasor ezt szemlélteti egy $a$ pontban differenciálható, és egy az a pontban nem differenciálható függvény esetén:




*4. ábra*

Az analízisben a fő célunk, hogy egy függvényről a hozzárendelési utasítás ismeretében minél több információt megismerjünk. Ki fog derülni, hogy ebben a fő segédeszköz a derivált függvény. Az $f'$ derivált függvény vizsgálatával az eredeti f függvény számos, minket érdeklő tulajdonsága felderíthető. (Például a növekedés vagy fogyás, maximális vagy minimális értéket, a grafikon görbülésének jellege, stb.)

Tehát mindenek előtt arra van szükség, hogy minél több függvény derivált függvényét egyszerűen és gyorsan elő tudjuk állítani.

Az analízisben olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyek az elemi függvényekből épülnek fel a különböző műveletek segítségével. Ebből is látható, hogy a későbbiekben az elemi függvények deriváltjainak alapvető jelentőségük lesz. A következő táblázatban megadjuk az elemi függvények deriváltjait.

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $f(x)=c$, ahol $c\in\mathbb{R}$ konstans<br>$D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=0$<br>$D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $f(x)=x^n$, n pozitív egész<br>$D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=nx^{n-1}$<br>$D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $f(x)=x^{-n}$, n pozitív egész<br>$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ | $f'(x)=-nx^{-n-1}$<br>$D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ |
| $f(x)=\frac{1}{x}$, $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ | $f(x)=-\frac{1}{x^2}$, $D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ |
| $f(x)=\sqrt[n]{x}$, n páros pozitív egész<br>$D_f=[0,\infty[$ | $f'(x)=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$<br>$D_{f'}=]0,\infty[$ |
| $f(x)=\sqrt[n]{x}$, n páratlan pozitív egész<br>$D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$<br>$D_{f'}=]-\infty,0[\cup]0,\infty[$ |
| $f(x)=x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, irracionális<br>$D_f=]0,\infty[$ | $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$<br>$D_{f'}=]0,\infty[$ |
| $f(x)=\sqrt{x}$<br>$D_f=[0,\infty[$ | $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$<br>$D_{f'}=]0,\infty[$ |
| $f(x)=e^x$, $D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=e^x$, $D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $f(x)=\ln x$<br>$D_f=]0,\infty[$ | $f'(x)=\frac{1}{x}$<br>$D_{f'}=]0,\infty[$ |
| $f(x)=a^x$, $a>0$<br>$D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=a^x\cdot\ln a$<br>$D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $f(x)=\log_a x$, $a>0$ és $a\neq 1$<br>$D_f=]0,\infty[$ | $f'(x)=\frac{1}{x\cdot\ln a}$<br>$D_{f'}=]0,\infty[$ |
| $f(x)=\sin x$, $D_f=\mathbb{R}$ | $f'(x)=\cos x$, $D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $f(x)=\cos x$, $D_f=\mathbb{R}$ | $f(x)=-\sin x$, $D_{f'}=\mathbb{R}$ |
| $f(x)=\mathrm{tg}\ x$<br>$D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ | $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$<br>$D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ |
| $f(x)=\mathrm{ctg}\ x$<br>$D_f=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ | $f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$<br>$D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ |

**Kidolgozott feladatok:**

**1. feladat:** Írjuk fel az $f(x)=x^2$ függvény az $a=1$ és az $x$ helyekhez tartozó különbségi hányadosát.

**Megoldás:** Mivel az $f$ függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, így létezik a különbségi hányados:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1.$$

A különbségi hányadosnak általában kiszámoljuk a határértékét, így azt célszerű a legegyszerűbb formában felírni.

**2. feladat:** Számoljuk ki az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény $a=4$ helyhez tartozó differenciálhányadosát.

**Megoldás:** Tudjuk, hogy $D_f=[0,\infty[$, aminek a 4 belső pontja, és

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{1}{4},$$

így tehát $f'(4)=\frac{1}{4}$.

**3. feladat:** Hol veszi fel a nulla értéket az $f(x)=x-x^2$ függvény deriváltja.

**Megoldás:** Először elkészítjük a derivált függvényt. Legyen $a\in D_f$ tetszőleges valós szám. Mivel $D_f=\mathbb{R}$ ez egyben belső pontja is $D_f$-nek. Ekkor

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-x^2-\left(a-a^2\right)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)-\left(x^2-a^2\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)-(x+a)(x-a)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(1-(x+a)\right)=1-2a.$$

Mivel ez tetszőleges a számra igaz, azt kaptuk, hogy $f'(x)=1-2x$, és a derivált függvény is az egész valós számok halmazán van értelmezve.

$f'(x)=0$, ha $x=\frac{1}{2}$, tehát a derivált függvény egyedül az $\frac{1}{2}$ helyen veszi fel a nulla értéket.

**4. feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=\frac{1}{x}$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** A függvényünk értelmezési tartománya $D_f=]-\infty,0[\cup]0,\infty[$, aminek minden pontja belső pont. Legyen $a\in D_f$ tetszőleges, ekkor

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{-(x-a)}{ax(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{-1}{ax}=-\frac{1}{a^2}.$$

Ebből az következik, hogy $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, és $D_{f'}=]-\infty,0[\cup]0,\infty[$, ugyan az, mint a $D_f$.

**5. feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{x}$ derivált függvényét.

**Megoldás:** Most a $D_f=[0,\infty[$, aminek a 0 nem belső pontja, itt tehát f biztosan nem deriválható. Ha azonban $0\neq a\in D_f$ (azaz a pozitív szám), akkor

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Tehát $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ és $D_{f'}=]0,\infty[$.

**6. feladat:** Írjuk fel az $f(x)=x^2$ függvény grafikonjának érintőjét az $a=3$ helyen.

**Megoldás:** Határozzuk meg a függvény értékét az $a=3$ helyen: $f(a)=f(3)=9$. Az érintési pont koordinátái tehát $(3,9)$.

Meghatározzuk $f'(a)=f'(3)$ értékét: az $a=3$ belső pontja a $D_f=\mathbb{R}$-nek, és

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=2a.$$

A differenciálhányados értéke az $a=3$ helyen, azaz a keresett érintő meredeksége:

$$m=f'(3)=2\cdot 3=6$$

Helyettesítsünk ezután az érintőt megadó $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ képletbe.

$$y=6(x-3)+9$$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy az érintő egyenlete: $y=6x-9$.

**7. feladat:** Írjuk fel az $f(x)=x^2-2x-2$ függvény $a=2$-beli érintőjének egyenletét.

**Megoldás:** Helyettesítsük a függvénybe a megadott $a=2$ értéket: $f(a)=f(2)=2^2-2\cdot 2-2$.
Az érintő tehát a $(2,-2)$ pontban érinti a függvény grafikonját.

A meredekség meghatározásához szükségünk van a derivált függvényre. (Valójában most is elég lenne $f'(2)$ értéke, de azt kiszámolni nem sokkal egyszerűbb, mint meghatározni a derivált függvényt, és venni annak 2-ben a helyettesítési értékét.) Az $a=2$ belső pontja a $D_f=\mathbb{R}$-nek, és

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-2x-2-\left(a^2-2a-2\right)}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left(x^2-a^2\right)-\left(2x-2a\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(x+a\right)\left(x-a\right)-2\left(x-a\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\left(x+a\right)-2\right)=2a-2.$$

A derivált függvény tehát $f'(x)=2x-2$.

Helyettesítsünk ebbe $a=2$-t, így megkapjuk a meredekséget:

$$m=f'(2)=2\cdot 2-2=2$$

Részeredményeinket írjuk be az érintő $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ képletébe:

$$y=2\left(x-2\right)+(-2).$$

Végezzük el a műveleteket, és így megkapjuk az érintő egyenletének alábbi alakját:

$$y=2x-6.$$

**8. feladat:** Írjuk fel az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény $m=2$ meredekségű érintőjének egyenletét.

**Megoldás:** Most az érintőt nem azzal határozzuk meg, hogy melyik pontban érinti a grafikont, hanem azzal, hogy mennyi a meredeksége. Mivel az érintő felírásához szükség van az érintési pont két koordinátájára, először ezeket kell meghatározni.

Tudjuk, hogy a derivált függvény $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Azt az $a>0$ számot keressük, amelyre a meredekség, azaz $f'(a)$ éppen 2. Ehhez megoldjuk az

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}=2$$

egyenletet $a$-ra: a fenti képletből $\sqrt{a}=\dfrac{1}{4}$, amiből $a=\dfrac{1}{16}$. Tehát valójában az $a=\dfrac{1}{16}$-beli érintőről van szó. Mivel $f\left(\dfrac{1}{16}\right)=\dfrac{1}{4}$, az érintési pont két koordinátája $\left(\dfrac{1}{16},\dfrac{1}{4}\right)$. Az érintő $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ képletébe helyettesítve

$$y=2\left(x-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4},$$

rendezve

$$y=2x+\frac{1}{8}.$$

**9. feladat:** Írjuk fel az $f(x)=\dfrac{1}{x}$ függvénynek az $y=4x-9$ egyenesre merőleges érintőjének egyenletét.

**Megoldás:** Az érintőt ismét nem az érintési pont első koordinátájával adtuk meg. Azt kell először meghatározni. Ismét az érintő meredekségéről van információnk, hiszen, ha a keresett érintő merőleges a megadott $m^* = 4$ meredekségű egyenesre, akkor a meredeksége $m = -\frac{1}{4}$. Ehhez arra kell emlékezni, hogy a síkon két egyenes akkor merőleges egymásra, ha a meredekségeik szorzata -1. Így tehát azt az $a \neq 0$ számot keressük, amelyre $f'(a) = -\frac{1}{4}$.

Tudjuk, hogy $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, így az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4},$$

amiből $a^2 = 4$, azaz $a = \pm 2$, két megoldást kaptunk, tehát két ilyen érintő is van.

Ha az érintési pont első koordinátája $a = 2$, akkor az érintési pont második koordinátája $f(2) = \frac{1}{2}$, és ennek az első érintőnek az egyenlete

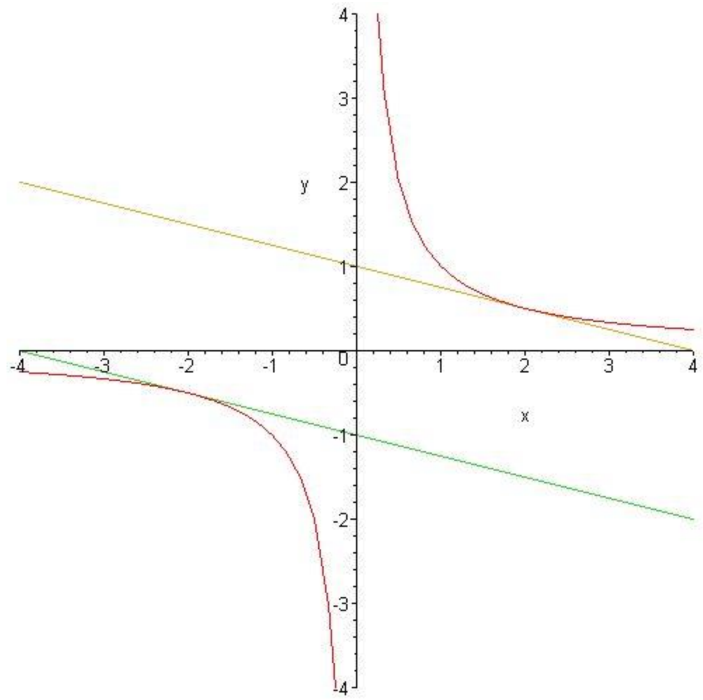
$$y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{x}{4} + 1.$$

Ha az érintési pont első koordinátája $a = -2$, akkor az érintési pont második koordinátája $f(-2) = -\frac{1}{2}$, és ennek a második érintőnek az egyenlete:

$$y = -\frac{1}{4}(x-(-2)) + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$y = -\frac{x}{4} - 1.$$




*5. ábra*

Az 5. ábrán a függvényünket és a két érintőjét láthatjuk.

**10. feladat:** Írjuk fel az $f(x)=x^2$ függvénynek azt az érintőjét, amelyik átmegy a $Q(-1,-3)$ ponton.

**Megoldás:** Ismét az érintési pont meghatározásával kell kezdenünk. Tudjuk, hogy az érintő egyenlete

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

szerkezetű, ha figyelembe vesszük $f$ képletét is, akkor, mivel $f'(x)=2x$,

$$y=2a(x-a)+a^2.$$

Azt $a$ számot, vagy azokat az $a$ számokat keressük, amelyekre ez az egyenes átmegy a $Q$ ponton, elvégezve az $x=-1$, $y=-3$ helyettesítést és rendezve

$$-3=2a(-1-a)+a^2$$

$$-3=-2a-a^2$$

$$a^2+2a-3=0.$$

Megoldva a kapott másodfokú egyenlete a-ra két értéket kapunk: $a=1$ vagy $a=-3$.

Az $a=1$-beli érintő egyenlete az $y=2a(x-a)+a^2$ képletből

$$y=2(x-1)+1$$

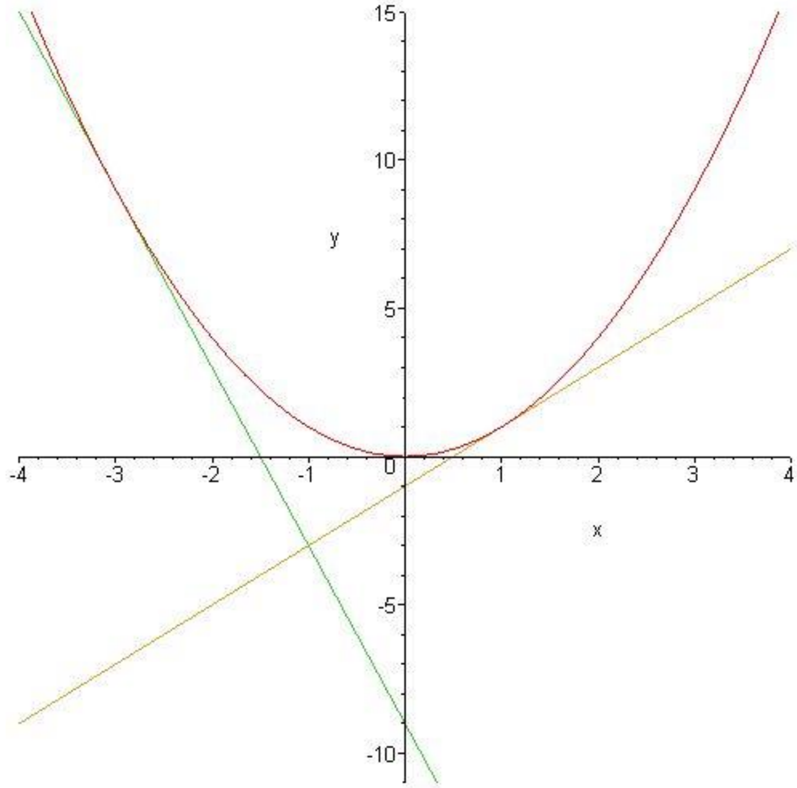
$$y=2x-1.$$

Ugyanígy az $a=-3$-beli érintő egyenlete

$$y=-6(x-(-3))+9=-6(x+3)+9$$

$$y=-6x-9.$$

A függvényünket és a két érintőjét mutatja az alábbi ábra.




*6. ábra*

**11. feladat:** Az $f(x)=\sqrt[3]{x}$ függvény alkalmas linearizáltját felhasználva számoljuk ki közelítően $\sqrt[3]{8.12}$ értékét.

**Megoldás:** A linearizált az érintési pont közelében közelít jól. A 8 közel van 8.12-höz, ezért az $f(x)=\sqrt[3]{x}$ függvény $a=8$-beli linearizáltját fogjuk használni $\sqrt[3]{8.12}$ közelítő értékének kiszámolására.
Szükségünk van az érintési pont második koordinátájára is: $f(a)=f(8)=\sqrt[3]{8}=2$, az érintési pont tehát $(8,2)$. Mivel $f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$, azt kapjuk, hogy a meredekség $f'(a)=f'(8)=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12}$. Így az $a=8$-beli linearizált

$$g(x)=\frac{1}{12}(x-8)+2=\frac{x}{12}+\frac{4}{3}$$

Ennek a függvénynek a $8.12$ helyen vett értékével közelíthető $\sqrt[3]{8.12}$. Azt kapjuk, hogy:
$\sqrt[3]{8.12}\approx g(8.12)=\frac{8.12}{12}+\frac{4}{3}=2.01$.
Ha ezek után számológéppel is kiszámoljuk $\sqrt[3]{8.12}$-t, akkor a $2.009950413$ értéket kapjuk. Látható, hogy a linearizált felhasználásával kapott közelítésünk meglehetősen pontos.

**12. feladat:** Alkalmas linearizáltat felhasználva számoljuk ki közelítően $\sin(33°)$ értékét.

**Megoldás:** Az analízisben a trigonometrikus függvények argumentumát radiánban kell megadni. Ezért először a $33^\circ$-ot átszámoljuk radiánra az $x_{rad}=\frac{\pi}{180}x_{fok}$ képletet használva. De mivel a $33^\circ$ radiánban megadott értékéhez közeli a érték is kell, hogy fel tudjuk írni az ottani linearizáltat, az átírást a következőképp csináljuk:

$$33^\circ=30^\circ+3^\circ=\frac{\pi}{180}(30+3)=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{60}=\frac{11\pi}{60}=0.576,$$

(a radián mértékegységet nem írjuk ki). Innen már látjuk, hogy, mivel $\frac{\pi}{60}$ kicsi, az $f(x)=\sin x$ függvény $a=\frac{\pi}{6}$-beli linearizáltját használhatjuk a közelítéshez. Mivel $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ és $f'(x)=\cos x$, a meredekség $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ezután már felírhatjuk a linearizált képletét:

$$g(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{12}.$$

Ezután a keresett közelítő érték:

$$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\approx g\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{11\pi}{6}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{12}=0.5453449841.$$

Ha számológéppel számoljuk $\sin(33°)$-ot, akkor a 0.544639035 értéket kapjuk. Látható, hogy a közelítésünk most is elég pontos.

**13. feladat:** Hol metszi az $f(x)=x^2-8x+19$ függvény $a=5$-beli érintője az x tengelyt?

**Megoldás:** Először felírjuk az érintő egyenletét. Mivel $f(a)=f(5)=4$, az érintési pont az $(5,4)$ koordinátájú pont. Szükségünk van $f'(5)$ értékére. Mivel f nem elemi függvény még nem ismerjük a deriváltját. Később a derivált függvény egy adott helyen vett értékét mindig úgy fogjuk kiszámolni, hogy meghatározzuk a derivált függvényt, és vesszük annak a szóban forgó helyettesítési értékét. Ehhez azonban a deriválási szabályok ismeretére van szükség, ami a következő fejezet témája. Ezért most a definíciót használva számoljuk ki $f'(5)$ értékét:

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-8x+19-4}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-3)(x-5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}(x-3)=2,$$

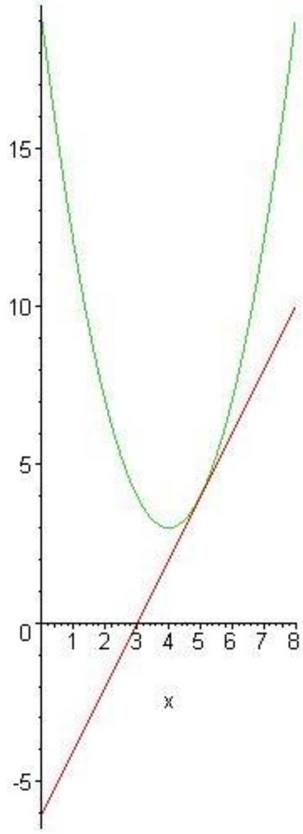
így az érintő meredeksége $m=f'(a)=f'(5)=2$.

Ezek felhasználásával az érintő egyenlete:

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)=$$

$$=2(x-5)+4=2x-6.$$

Az $y=2x-6$ egyenes ott metszi az x tengelyt, ahol az $y=0$. A $2x-6=0$ egyenletből $x=3$. Tehát az $f(x)=x^2-8x+19$ függvény $a=5$-beli érintője az $(3,0)$ koordinátájú pontban metszi az x tengelyt. Az alábbi ábrán a függvényünket és az érintőjét láthatjuk.




*7. ábra*

**14. feladat:** Hol metszi az $f(x)=\sqrt{x+3}$ függvény $a=-2$-beli érintője az $x$ és az $y$ tengelyt?

**Megoldás:** Úgy, mint az előző feladatban, az érintő egyenletének felírásával kezdünk. Mivel $f(-2)=1$, az érintési pont $(-2,1)$. Ezen kívül az érintő felírásához $f'(-2)$ értékére van szükségünk, amit most is a definíció alapján határozunk meg. (f összetett függvény, deriválásával a következő fejezetben foglalkozunk.)

$$f'(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{x+3}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}{(x+2)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}=$$

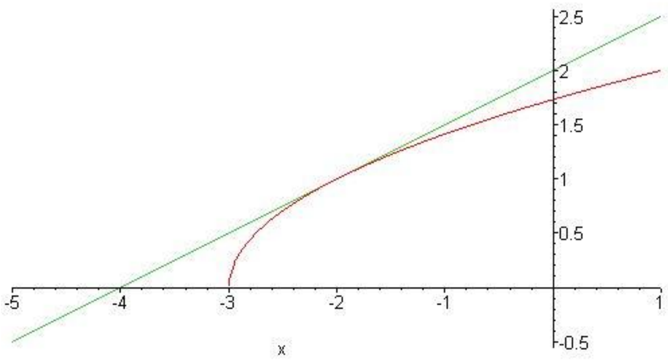
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)}{(x+2)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Az érintő meredeksége tehát $m=f'(a)=f'(-2)=\dfrac{1}{2}$. Ezeket felhasználva az érintő egyenlete

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-(-2)\right)+1=\frac{x}{2}+2.$$

Az $y=0$ egyenletből, azaz az $\frac{x}{2}+2=0$ egyenletből $x=-4$, vagyis az érintő az x tengelyt a $(-4,0)$ koordinátájú pontban metszi. Az y tengellyel való metszéspontot megkapjuk, ha az érintő $y=\frac{x}{2}+2$ képletében az x helyére nullát írunk, így $y=2$ adódik, tehát az érintő az y tengelyt a $(0,2)$ koordinátájú pontban metszi. A függvényünket és az érintőjét mutatja az alábbi ábra.




*8. ábra*

**Ellenőrző kérdések:**

**1. kérdés:** Mi az $f(x)=\frac{3}{x}$ függvény $x_0=2$-beli érintőjének egyenlete?

Válasz: $y=-\frac{3}{4}x+3$

**2. kérdés:** Mi az $f(x)=e^x+x$ függvény $x_0=0$-beli érintőjének egyenlete?
Válasz: $y=2x+1$

**3. kérdés:** Mi az $f(x)=\frac{1}{x^2}$ függvény $m=-2$ meredekségű érintőjének egyenlete?
Válasz: $y=-2x+3$

**4. kérdés:** Határozzuk meg az $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ függvény $x_0=4$-beli linearizáltját, és ezt felhasználva adjuk meg $\frac{1}{\sqrt{5}}$ közelítő értékét.

Válasz: A linearizált $y=-\frac{1}{16}x+\frac{3}{4}$, s ebből $\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0.4375$.

**5. kérdés:** Határozzuk meg az $f(x)=\ln x$ függvény $x_0=e$-beli linearizáltját, és ezt felhasználva adjuk meg $\ln 3$ közelítő értékét 4 tizedesre kerekítve.

Válasz: A linearizált $y=\frac{x}{e}$, s ebből $\ln 3\approx 1.1036$.

**Tanulási cél:** Deriválási szabályok megismerése és alkalmazása összetett függvények esetén. Magasabbrendű deriváltak meghatározása.

**Elméleti összefoglaló**

Amikor meghatározzuk egy függvény derivált függvényét úgy is gondolhatunk erre a folyamatra, mint egy új függvényműveletre, amelyik az eredeti $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ függvényből elkészíti az $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$ derivált függvényt. És sokszor hasznos így, függvényműveletként gondolni a deriválásra. Persze ekkor rögtön adódik a kérdés, hogy ennek az új függvényműveletnek mi a kapcsolata a korábban megismert függvényműveletekkel. Ezeket a kapcsolatokat megfogalmazó tételeket hívjuk **deriválási szabályoknak**. Ebben a leckében megismerkedünk a deriválási szabályokkal, és begyakoroljuk a derivált függvény ezeken alapuló meghatározását. Ez sokkal gyorsabb és egyszerűbb, mint a definíció alkalmazása, és nagyon fontos lesz a későbbiek során.

**Tétel:** Legyen $\mathrm{c}$ tetszőleges konstans, az $\mathrm{f}$ függvény pedig differenciálható az $\mathrm{x}$ helyen, ekkor a $\mathrm{c}\cdot\mathrm{f}$ függvény is differenciálható az $\mathrm{x}$ helyen, és

$$\left(\mathrm{c}\cdot\mathrm{f}(\mathrm{x})\right)'=\mathrm{c}\cdot\mathrm{f}'(\mathrm{x}).$$

Úgy szoktunk hivatkozni erre a tételre, hogy a konstans szorzó deriváláskor kiemelhető.

**Tétel:** Legyen az $\mathrm{f}$ és a $\mathrm{g}$ függvény differenciálható az $\mathrm{x}$ helyen, ekkor a az $\mathrm{f}+\mathrm{g}$ függvény is differenciálható az $\mathrm{x}$ helyen, és

$$\left(\mathrm{f}(\mathrm{x})+\mathrm{g}(\mathrm{x})\right)'=\mathrm{f}'(\mathrm{x})+\mathrm{g}'(\mathrm{x}).$$

Ennek a tételnek a tömör megfogalmazása az, hogy összeg tagonként deriválható. A tétel nem csak két függvény, hanem tetszőleges számú, véges sok függvény összegének deriválásakor is érvényben marad: ha az $\mathrm{f}_1$, $\mathrm{f}_2$, $\ldots\mathrm{f}_\mathrm{n}$ függvények mindegyike differenciálható az $\mathrm{x}$ helyen, akkor az $\mathrm{f}_1+\mathrm{f}_2+\ldots+\mathrm{f}_\mathrm{n}$ függvény is differenciálható az $\mathrm{x}$ helyen, és

$$\left(\mathrm{f}_1(\mathrm{x})+\mathrm{f}_2(\mathrm{x})+\ldots+\mathrm{f}_\mathrm{n}(\mathrm{x})\right)'=\mathrm{f}_1'(\mathrm{x})+\mathrm{f}_2'(\mathrm{x})+\ldots+\mathrm{f}_\mathrm{n}'(\mathrm{x}).$$

Ezekből a tételekből könnyen következik, hogy $\mathrm{f}$ és a $\mathrm{g}$ függvény differenciálható az $\mathrm{x}$ helyen, ekkor a az $\mathrm{f}-\mathrm{g}$ függvény is differenciálható az $\mathrm{x}$ helyen, és

$$\left(\mathrm{f}(\mathrm{x})-\mathrm{g}(\mathrm{x})\right)'=\mathrm{f}'(\mathrm{x})-\mathrm{g}'(\mathrm{x}).$$

Sőt, a legáltalánosabban ezek a tételek így fogalmazhatók meg egy tételben: ha az $\mathrm{f}_1$, $\mathrm{f}_2$, $\ldots\mathrm{f}_\mathrm{n}$ függvények mindegyike differenciálható az $\mathrm{x}$ helyen, $\mathrm{c}_1$, $\mathrm{c}_2$, $\ldots\mathrm{c}_\mathrm{n}$ pedig tetszőleges konstansok, akkor $\mathrm{c}_1\cdot\mathrm{f}_1+\mathrm{c}_2\cdot\mathrm{f}_2+\ldots+\mathrm{c}_\mathrm{n}\cdot\mathrm{f}_\mathrm{n}$ függvény is differenciálható az $\mathrm{x}$ helyen, és

$$\left(\mathrm{c}_1\cdot\mathrm{f}_1(\mathrm{x})+\mathrm{c}_2\cdot\mathrm{f}_2(\mathrm{x})+\ldots+\mathrm{c}_\mathrm{n}\cdot\mathrm{f}_\mathrm{n}(\mathrm{x})\right)'=\mathrm{c}_1\cdot\mathrm{f}_1'(\mathrm{x})+\mathrm{c}_2\cdot\mathrm{f}_2'(\mathrm{x})+\ldots+\mathrm{c}_\mathrm{n}\cdot\mathrm{f}_\mathrm{n}'(\mathrm{x}).$$

Ezek a tételek együtt azt jelentik, hogy **a deriválás lineáris művelet**.

**Tétel:** Legyen az $f$ és a $g$ függvény differenciálható az $x$ helyen, ekkor a az $f \cdot g$ függvény is differenciálható az $x$ helyen, és

$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

Ez a tétel is általánosítható, például három tényező esetén így néz ki:

$\left(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$.

Figyeljük meg, hogy mivel az összeadás és a szorzás kommutatív művelet, az eddigi képletek nem változnak, ha azokban a függvényeket tetszőleges sorrendben írjuk.

Az osztás nem kommutatív művelet, ezért a törtfüggvény deriválására vonatkozó képlet nem is szimmetrikus a számlálóban és a nevezőben.

**Tétel:** Legyen az $f$ és a $g$ függvény differenciálható az $x$ helyen, és $g(x) \neq 0$, Ekkor a az $\frac{f}{g}$ függvény is differenciálható az $x$ helyen, és

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$.

A legfontosabb deriválási szabály az összetett függvény deriválási szabálya, ezt használjuk a leggyakrabban.

**Tétel:** Legyen az $f$ függvény differenciálható az $x$ helyen, a $g$ függvény differenciálható az $f(x)$ helyen. Ekkor a $g \circ f$ függvény is differenciálható az $x$ helyen, és

$$\left(g(f(x))\right)' = g'(f(x))\cdot f'(x).$$

Természetesen ez is általánosítható többtényezős kompozíciókra. Három tényező esetén a tétel a következő: ha az $f$ függvény differenciálható az $x$ helyen, a $g$ függvény differenciálható az $f(x)$ helyen, a $h$ függvény pedig differenciálható a $g(f(x))$ helyen, akkor a $h \circ g \circ f$ függvény is differenciálható az $x$ helyen, és

$$\left(h(g(f(x)))\right)' = h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x).$$

Ezt, és az előző tételt is, **láncszabálynak** hívják.

A függvény inverzének a képzése is tekinthető függvényműveletnek, így persze van az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel is. A gyakorlatban azonban ezt ritkán alkalmazzuk, helyette elkészítjük az inverz függvényt, és alkalmazzuk a korábbi deriválási szabályokat.

Egy $f$ függvény $f'$ deriváltja maga is egy függvény. Tekinthetjük ennek a deriváltját, amit $f''$ fog jelölni, és ezt $f$ **második deriváltjának** hívjuk. Ennek deriváltja $f$ harmadik deriváltja, és így tovább. Ezeknek a magasabb rendű deriváltaknak fontos szerepe van a felsőbb matematikában.

**Kidolgozott feladatok**

A következő feladatokban csak a derivált függvény képletének az előállításával foglalkozunk, és nem vizsgáljuk annak értelmezési tartományát. Fel fogjuk használni az elemi függvények korábban már megismert deriváltjait.

**1. feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=5x^4$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Az $f$ függvény egy konstans és egy hatványfüggvény szorzata, ezért a konstans szorzó a deriválás művelete élé kiemelhető:

$$f'(x)=\left(5x^4\right)'=5\left(x^4\right)'=5\left(4x^3\right)=20x^3.$$

**2. feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=x^2+\ln x$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Az $f$ függvény kéttagú összeg, amit tagonként deriválhatunk, így:

$$f'(x)=\left(x^2+\ln x\right)'=\left(x^2\right)'+\left(\ln x\right)'=2x+\frac{1}{x}.$$

**3. feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=\sin x-\cos x$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** $f'(x)=\left(\sin x\right)'-\left(\cos x\right)'=\cos x-\left(-\sin x\right)=\cos x+\sin x$ .

**4. feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=x^3-3\sqrt{x}+2e^x+\frac{3}{x}$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Felhasználjuk, hogy a deriválás lineáris, a gyököt és a törtet pedig felírjuk hatványként, így minden derivált könnyen felismerhető elemi függvény deriváltja lesz:

$$f'(x)=\left(x^3-3\sqrt{x}+2e^x+\frac{3}{x}\right)'=\left(x^3\right)'-3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'+2\left(e^x\right)'+3\left(x^{-1}\right)'=$$

$$=3x^2-3\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)+2e^x+3\left(-x^{-2}\right)=$$

$$=3x^2-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}+2e^x-\frac{3}{x^2}.$$

Deriváláskor gyakori, hogy a törteket és a gyököket hatványokként kezeljük.

**5. feladat:** Határozzuk meg az $f(t)=\left(2t-1\right)^2$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Végezzük el a négyzetre emelést. Ekkor kapjuk, hogy $f(t)=4t^2-41+1$. Ezt felhasználva

$$f'(t)=\left(4t^2-4t+1\right)'=4\left(t^2\right)-4\left(t\right)'+\left(1\right)'=8t-4.$$

Később ezt a függvény a szorzatfüggvény és az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva is deriválni fogjuk.

**6. feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=2^x-\ln 2-\sqrt[4]{x^3}$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Persze majd tagonként fogunk deriválni, de először a negyedik gyököt hatványként írjuk fel. Azután vegyük figyelembe, hogy $\ln 2$ konstans, így a deriváltja 0, és nem $\frac{1}{2}$.

$$f'(x) = \left(2^x - \ln 2 - \sqrt[4]{x^3}\right)' = \left(2^x\right)' - \left(\ln 2\right)' - \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' =$$

$$= 2^x \ln 2 - \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}},$$

felhasználva az $a^x$ és az $x^\alpha$ elemi függvények deriváltjait.

**Ellenőrző kérdések:**

**1. kérdés:** Mi az $f(x) = 3x^4$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $12x^3$

**2. kérdés:** Mi az $f(t) = \frac{1}{t} - \operatorname{ctg} t$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{\sin^2 t}$

**3. kérdés:** Mi az $f(x) = e^{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $ee^x + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

**4. kérdés:** Mi az $f(x) = x^3 - 2 \cdot 3^x - 4x^{2,1}$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $3x^2 - 2 \cdot 3^x \ln 3 - 8{,}2x^{1,1}$

**5. kérdés:** Mi az $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - x^{-2}$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3}$

**Kidolgozott feladatok:**

**7. feladat:** Határozzuk meg az $f(t) = \left(2t-1\right)^2$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** A függvényünk így is írható: $f(t) = \left(2t-1\right)\left(2t-1\right)$. Így, a szorzatfüggvény deriválási szabálya alapján

$$f'(t) = \left(2t-1\right)'\left(2t-1\right) + \left(2t-1\right)\left(2t-1\right)' = 2\left(2t-1\right) + \left(2t-1\right)2 =$$

$$= 8t - 4.$$

**8. feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = (x^2 + x)(1 - 2x^2)$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Mivel a függvényünk szorzatfüggvény, alkalmazhatjuk a szorzatfüggvény deriválási szabályát:

$$f'(x) = (x^2 + x)'(1 - 2x^2) + (x^2 + x)(1 - 2x^2)' =$$

$$= (2x + 1)(1 - 2x^2) + (x^2 + x)(-4x) =$$

$$= 1 + 2x - 6x^2 - 8x^3,$$

De eljárhatunk úgy is, hogy először elvégezzük a függvényünket definiáló képletben a szorzást: $f(x) = x + x^2 - 2x^3 - 2x^4$. Ezután deriválás szempontjából már egyszerűbb a helyzet.

$$f'(x) = (x + x^2 - 2x^3 - 2x^4)' = \left(x\right)' + \left(x^2\right)' - 2\left(x^3\right)' - 2\left(x^4\right)' =$$
$$= 1 + 2x - 6x^2 - 8x^3.$$
Természetesen ugyanaz a végeredmény, mint az előbb. Látjuk, hogy gyakran elő fog fordulni, hogy egy deriválás több úton is elvégezhető.

A továbbiakban az összegek deriváltját, ha a tagok már elemi függvények, a deriválások kijelölése nélkül, közvetlenül felírjuk.

**9. feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \left(3x - \sqrt{x}\right)\left(e^x + 1\right)$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Most nem célszerű elvégezni a beszorzást, mert a keletkezett szorzatok nem egyszerűsíthetők, és így kétszer is alkalmazni kéne a szorzatfüggvény deriválási szabályát.
$$f'(x) = \left(3x - \sqrt{x}\right)'\left(e^x + 1\right) + \left(3x - \sqrt{x}\right)\left(e^x + 1\right)' =$$
$$= \left(3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(e^x + 1\right) + \left(3x - \sqrt{x}\right)e^x.$$
Felmerül, hogy az utolsó képletben el kell-e végezni a beszorzásokat. Amikor csak az a feladat, hogy határozzuk meg egy függvény derivált függvényét, a deriválások elvégzése után nem fogjuk a lehetséges összevonásokat elvégezni. Ez így gyorsabb és egyszerűbb. Később, amikor a derivált függvénnyel további számításokat fogunk végezni, más lesz a helyzet.

**10. feladat:** Határozzuk meg az
$f(x) = \left(\operatorname{tg} x + \sin 30 - x\right)\left(\sqrt[3]{x} - 2^x\right)$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Először is a $\sin 30$ egy konkrét szám, konstans, és a 30 radiánban értendő; az analízisben a trigonometrikus függvények argumentuma mindig radián van megadva. Így $\sin 30 \approx -0.9880316241$, és nem 0.5, amennyi a $30^\circ$ szinusza. Tehát $\sin 30$ deriváltja nulla, továbbá
$$f'(x) = \left(\operatorname{tg} x + \sin 30 - x\right)'\left(\sqrt[3]{x} - 2^x\right) + \left(\operatorname{tg} x + \sin 30 - x\right)\left(\sqrt[3]{x} - 2^x\right)' =$$
$$= \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\left(\sqrt[3]{x} - 2^x\right) + \left(\operatorname{tg} x + \sin 30 - x\right)\left(\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - 2^x \ln 2\right).$$

**11. feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = x^2 \cdot \sin x \cdot \lg x$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** A függvényünk három tényezős szorzat, de már ismerjük egy ilyen függvény deriváltjára vonatkozó képletet, az alapján

$$0$$

**12. feladat:** Határozzuk meg az $f(x) = \left(xe^x + 1\right)\left(x + \operatorname{tg} x\right)$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Ebben a feladatban elkerülhetetlen a szorzatfüggvény deriválási szabályának többszöri alkalmazása. Figyeljük meg, ahogyan először csak kijelöljük a szükséges deriválásokat.

$$f'(x)=\left(xe^x+1\right)'\left(x+\mathrm{tg}x\right)+\left(xe^x+1\right)\left(x+\mathrm{tg}x\right)'=$$

$$=\left(xe^x\right)'\left(x+\mathrm{tg}x\right)+\left(xe^x+1\right)\left(x+\mathrm{tg}x\right)'=$$

$$=\left(\left(x\right)'e^x+x\left(e^x\right)'\right)\left(x+\mathrm{tg}x\right)+\left(xe^x+1\right)\left(x+\mathrm{tg}x\right)'.$$

Ezután már könnyen elvégezhetjük a kijelölt deriválásokat, és azt kapjuk, hogy

$$f'(x)=\left(e^x+xe^x\right)\left(x+\mathrm{tg}x\right)+\left(xe^x+1\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right).$$

**Ellenőrző kérdések:**

**1. kérdés:** Mi az $f(x)=x\left(\sin x+1\right)$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $\sin x+1+x\cos x$

**2. kérdés:** Mi az $f(x)=\left(x^2-2x\right)\left(1-3x^2\right)$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $-12x^3+18x^2+2x-2$

**3. kérdés:** Mi az $f(x)=\left(\ln x-x\right)\left(x-\ln x\right)$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $2-\frac{2\ln x}{x}-2x+2\ln x$

**4. kérdés:** Mi az $f(x)=\left(\sqrt{x}+2\right)\left(x^2-1\right)$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $\frac{5\sqrt{x^3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+4x$

**5. kérdés:** Mi az $f(x)=(2x+1)x^4(1-x^2)$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $4x^3+10x^4-6x^5-14x^6$

**6. kérdés:** Mi az $f(x)=(3x-1)(x\ln x+2)$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $6x\ln x-\ln x+5+3x$

**Kidolgozott feladatok:**

**13. feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=\frac{2x}{3x+1}$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** A törtfüggvény deriválási szabályát kell alkalmazni:

$$f'(x)=\left(\frac{2x}{3x+1}\right)'=\frac{\left(2x\right)'\left(3x+1\right)-\left(2x\right)\left(3x+1\right)'}{\left(3x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2\left(3x+1\right)-\left(2x\right)3}{\left(3x+1\right)^2}=\frac{2}{\left(3x+1\right)^2}.$$

Figyeljük meg, hogy a számlálóban elvégeztük az összevonásokat, de a nevezőben a négyzetre emelést nem, ezt máskor sem fogjuk elvégezni, csak ha egytagú a nevező, így jobban kezelhető a kapott formula.

**14. feladat:** Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** A konstans számlálójú törteket, mint hamarosan látni fogjuk, gyakran célszerűbb összetett függvényként deriválni. De persze lehet törtként is, mint most is.

$$f'(x)=\left(\frac{3}{\sqrt{x}+1}\right)'=\frac{(3)'\left(\sqrt{x}+1\right)-3\left(\sqrt{x}+1\right)'}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=$$

$$=\frac{0\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)-3\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{-3}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}.$$

Általában is

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=\frac{-g'(x)}{g^2(x)}.$$

**15. feladat:** Számoljuk ki $f'(1)$ értékét, ha $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}$.

**Megoldás:** Először meghatározzuk $f$ derivált függvényét, majd vesszük annak a helyettesítési értékét az 1 helyen. Hogy ne kelljen kétszer alkalmazni a tört deriválási szabályt közös nevezőre hozzuk a függvényünk: $f(x)=\dfrac{x^2+\left(x+1\right)^2}{(x+1)x^2}=\dfrac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}$. Most már a derivált

$$f'(x)=\left(\frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}\right)'=\frac{\left(2x^2+2x+1\right)'\left(x^3+x^2\right)-\left(2x^2+2x+1\right)\left(x^3+x^2\right)'}{\left(x^3+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(4x+2\right)\left(x^3+x^2\right)-\left(2x^2+2x+1\right)\left(3x^2+2x\right)}{\left(x^3+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{4x^4+2x^3+4x^3+2x^2-\left(6x^4+6x^3+3x^2+4x^3+4x^2+2x\right)}{\left(x^3+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{-2x^4-4x^3-5x^2-2x}{x^4\left(x+1\right)^2}=\frac{-2x^3-4x^2-5x-2}{x^3\left(x+1\right)^2}.$$

Ebből pedig $f'(1)=-\dfrac{13}{4}$.

**16. feladat:** Számoljuk ki $g'(2)$ értékét ha $f(2)=-1$, $f'(2)=2$, és $g(x)=\dfrac{2x+1}{f(x)}$.

**Megoldás:** A $g$ deriváltjával kezdünk:

$$g'(x)=\left(\frac{2x+1}{f(x)}\right)'=\frac{\left(2x+1\right)'f(x)-\left(2x+1\right)f'(x)}{f^2(x)}=\frac{2f(x)-\left(2x+1\right)f'(x)}{f^2(x)}$$

Ebből pedig a keresett helyettesítési érték

$$g'(2) == \frac{2f(x)-(2x+1)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{2(-1)-5\cdot 2}{(-1)^2} = -12.$$

**17. feladat:** Legyen $h(x) = \frac{f(x)+1}{g(x)-1}$. Számoljuk ki $h'(1)$ értékét, ha $f(1)=1$, $f'(1)=2$ és $g(1)=-2$, $g'(1)=-1$.

**Megoldás:** Mivel $h'(x) = \left(\frac{f(x)+1}{g(x)-1}\right)' = \frac{f'(x)\cdot(g(x)-1)-(f(x)+1)\cdot g'(x)}{(g(x)-1)^2}$, azt kapjuk, hogy

$$h'(1) = \frac{2(-3)-2(-1)}{(-3)^2} = -\frac{4}{9}.$$

**Ellenőrző kérdések:**

**1. kérdés:** Mi az $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $\frac{2}{(x+1)^2}$

**2. kérdés:** Mi az $f(x) = \frac{-2}{1-\sqrt{x}}$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $-\frac{1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$

**3. kérdés:** Mennyi $f'(0)$ értéke, ha $f(x) = \frac{x}{e^x + x}$?

Válasz: *1*

**4. kérdés:** Mennyi $g'(1)$ értéke ha $f(1)=1$, $f'(1)=2$, és $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)+x}$.

Válasz: $\frac{1}{4}$

**5. kérdés:** Legyen $h(x) = \frac{f(x)+x}{g(x)+1}$. Számoljuk ki $h'(1)$ értékét, ha $f(1)=1$, $f'(1)=2$ és $g(1)=2$, $g'(1)=2$.

Válasz: $\frac{5}{9}$

**Kidolgozott feladatok:**

**18. feladat:** Határozzuk meg az $h(t)=\left(2t-1\right)^2$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Vegyük észre, hogy $h(t)$ összetett függvény: $h(t)=g(f(t))$, ha $f(t)=2t-1$ és $g(t)=t^2$. Ezzel a választással $f'(t)=2$, $g'(t)=2t$. Ezért az összetett függvény deriválási szabály alapján

$$\begin{aligned} h'(t) &= \left(g(f(t))\right)' = g'(f(t))\cdot f'(t) = \\ &= 2\cdot f(t)\cdot 2 = 2\cdot\left(2t-1\right)\cdot 2 = 8t-4. \end{aligned}$$

**19. feladat:** Határozzuk meg az $h(x)=\sqrt{1-x^2}$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** $h(x)$ most is összetett függvény, hiszen $h(x)=g(f(x))$, ha $f(x)=1-x^2$, és $g(x)=\sqrt{x}$. Tudjuk, hogy $f'(x)=-2x$ és $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Így tehát

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(g(f(x))\right)' = g'(f(x))\cdot f'(x) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot\left(-2x\right) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

**20. feladat:** Határozzuk meg az $h(x)=\sin\left(x^2-x\right)$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** $h(x)$ ismét $h(x)=g(f(x))$ szerkezetű összetett függvény az $f(x)=x^2-x$, $g(x)=\sin x$ választással. Mivel $f'(x)=2x-1$ és $g'(x)=\cos x$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(g(f(x))\right)' = g'(f(x))\cdot f'(x) = \\ &= \cos(f(x))\cdot\left(2x-1\right) = \cos\left(x^2-x\right)\cdot\left(2x-1\right). \end{aligned}$$

**21. feladat:** Határozzuk meg az $h(x)=\ln\left(x+\sqrt{x}\right)$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Most $h(x)=g(f(x))$, ha $f(x)=x+\sqrt{x}$ és $g(x)=\ln x$. De mint tudjuk $f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, továbbá $g'(x)=\dfrac{1}{x}$. Ezeket felhasználva

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(g(f(x))\right)' = g'(f(x))\cdot f'(x) = \\ &= \frac{1}{f(x)}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

**22. feladat:** Határozzuk meg az $h(x)=\dfrac{1}{\left(x^3-\dfrac{2}{x}\right)^2}$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Ahogy említettük, a konstans számlálójú törteket célszerűbb összetett függvényként deriválni. Ennek érdekében átírjuk a függvényünket

$$h(x)=\frac{1}{\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^2}=\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^{-2}$$

alakba. Innen leolvasható, hogy $h(x)=g(f(x))$ szerkezetű összetett függvény az $f(x)=x^3-\frac{2}{x}$, $g(x)=x^{-2}$ választással. Ekkor $f'(x)=3x^2+\frac{2}{x^2}$, és $g'(x)=-2\cdot x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$. Ezek alapján

$$h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)=$$

$$=-\frac{2}{(f(x))^3}\cdot\left(3x^2+\frac{2}{x^2}\right)=$$

$$=-\frac{2}{\left(x^3-\frac{2}{x}\right)^3}\cdot\left(3x^2+\frac{2}{x^2}\right).$$

**23. feladat:** Legyen $h(x)=\left(x^2-2x\right)^{12}$. Milyen x-re lesz $h'(x)=0$?

**Megoldás:** Az összetett függvény deriválási szabályát addig célszerű gyakorolni, hogy a kompozíció tényezőinek felírására már ne is legyen szükség. Most például a következőt kapjuk:

$$h'(x)=\left(\left(x^2-2x\right)^{12}\right)'=12\left(x^2-2x\right)^{11}\cdot\left(x^2-2x\right)'=$$

$$=12\left(x^2-2x\right)^{11}\cdot(2x-2).$$

Most még kicsit átalakítjuk $h'(x)$ képletét, hogy a gyökeit könnyen leolvashassuk.

$$h'(x)=12\left(x^2-2x\right)^{11}\cdot(2x-2)=$$

$$12\left(x(x-2)\right)^{11}\cdot2\cdot(x-1)=$$

$$=24x^{11}(x-2)^{11}(x-1).$$

Mivel egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője az, azt kapjuk, hogy $h'(x)=0$, ha $x=0$, vagy $x=2$, vagy $x=1$. Mivel a h függvény mindenütt értelmezve van, mind a három szám megoldás. (A nulla és a kettő tizenegyszeres gyök, az egy egyszeres.)

**24. feladat:** Legyen $h(x)=\ln^2\left(x^2-1\right)$. Milyen x-re lesz $h'(x)=0$?

**Megoldás:** Kezdjük a derivált függvénnyel. Mivel

$$h'(x)=2\ln\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'=$$

$$=2\ln\left(x^2-1\right)\cdot2x=4x\ln\left(x^2-1\right).$$

Tudjuk, hogy $\ln1=0$, így ennek a szorzatnak három gyöke van: a $-\sqrt{2}$, a nulla és a $\sqrt{2}$. De azt is tudjuk, hogy a derivált függvény értelmezési tartománya, a definíció alapján, az eredeti

függvény értelmezési tartományának részhalmaza. Akkor is, ha a derivált képletének lehetséges legbővebb értelmezési tartománya ennél bővebb.
Mivel a h függvény nincs értelmezve a nullában, ezért a feladat kérdésére az a válasz, hogy $h'(x)=0$, ha $x=\pm\sqrt{2}$.

**25. feladat:** Határozzuk meg az $s(x)=\sqrt{\ln\left(1-2x^3\right)}$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Ez a függvény egy háromszorosan összetett függvény: $s(x)=h(g(f(x)))$, ha $h(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\ln x$, és $f(x)=1-x^3$. Ezeknek a deriváltja rendre:

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad g'(x)=\frac{1}{x},\quad f'(x)=-3x^2.$$

A láncszabály alapján $s'(x)=h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)$. Vegyük azt is figyelembe, hogy, leolvasva az s képletéről, $g(f(x))=\ln\left(1-x^3\right)$. Ezek alapján:

$$s'(x)=h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{g(f(x))}}\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\ln\left(1-x^3\right)}}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\left(-3x^2\right).$$

Figyeljük meg, hogy az utolsó képletben zárójelbe tettük a $-3x^2$ tényezőt. Ha ezt nem tettük volna, és a pontot sem írtuk volna ki, amit amúgy nem is kötelező, a képlet hibás lenne.

**26. feladat:** Határozzuk meg az $s(x)=\sin\left(\sqrt{e^x-x}\right)$ függvény derivált függvényét.

**Megoldás:** Most is egy háromszorosan összetett függvénnyel van dolgunk, persze újra a láncszabályt fogjuk alkalmazni. Mivel $\left(\sin x\right)'=\cos x$, $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, és végül $\left(e^x-x\right)'=e^x-1$, kapjuk, hogy

$$s'(x)=\cos\left(\sqrt{e^x-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{e^x-x}}\right)\cdot\left(e^x-1\right).$$

**27. feladat:** Legyen $f(x)=-2x^3+x^2-6x-3$. Határozzuk meg $f''(x)$-et.

**Megoldás:** Először meghatározzuk az $f'(x)$ derivált függvényt.

$$f'(x)=\left(-2x^3+x^2-6x-3\right)'=$$
$$=-6x^2+2x-6.$$

Ezt felhasználva

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' =$$
$$= \left(-6x^2 + 2x - 6\right)' =$$
$$= -12x + 2.$$

**28. feladat:** Legyen $f(x) = x^2 \cos(2x)$. Határozzuk meg $f''(x)$-et.

**Megoldás:** Most, a szorzat deriválási szabályát alkalmazva,

$$f'(x) = \left(x^2 \cos(2x)\right)' =$$
$$= \left(x^2\right)' \cos(2x) + x^2 \left(\cos(2x)\right)' =$$
$$= 2x \cos(2x) + x^2 \left(-\sin(2x) \cdot 2\right) =$$
$$= 2x \cos(2x) - 2x^2 \sin(2x).$$

Ez alapján, még kétszer alkalmazva a szorzat deriválási szabályát, és elvégezve a lehetséges összevonásokat

$$f''(x) = \left(2x \cos(2x) - 2x^2 \sin(2x)\right)' =$$
$$= \left(2x'\right) \cos(2x) + 2x \left(\cos(2x)\right)' - \left[\left(2x^2\right)' \sin(2x) + 2x^2 \left(\sin(2x)\right)'\right] =$$
$$= 2\cos(2x) + 2x\left(-\sin(2x) \cdot 2\right) - \left[4x \sin(2x) + 2x^2 \cos(2x) \cdot 2\right] =$$
$$= 2\cos(2x) - 4x \sin(2x) - 4x \sin(2x) - 4x^2 \cos(2x) =$$
$$= \left(2 - 4x^2\right) \cos(2x) - 8x \sin(2x).$$

**Ellenőrző kérdések:**

**1. kérdés:** Mi az $h(x) = \left(1 - 3x\right)^3$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $-9\left(1 - 3x\right)^2$

**2. kérdés:** Mi az $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $\dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

**3. kérdés:** Mi az $h(x) = \cos\left(1 - \sin x\right)$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $-\left(1 - \cos x\right) \sin\left(x - \sin x\right)$

**4. kérdés:** Mi az $h(x)=\ln\left(\frac{1}{x}-x\right)$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $\dfrac{-\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x}-x}$

**5. kérdés:** Mi az $h(x)=\dfrac{-1}{xe^x-x^2}$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $\dfrac{-e^x-xe^x+2x}{\left(xe^x-x^2\right)^2}$

**6. kérdés:** Legyen $h(x)=\left(2x^3+3x^2\right)^3$. Milyen x-re lesz $h'(x)=0$?

Válasz: $-\frac{3}{2}$, $-1$, $0$

**7. kérdés:** Legyen $h(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Milyen x-re lesz $h'(x)=0$?

Válasz: $-1$, $1$

**8. kérdés:** Mi az $s(x)=\cos^2\left(x^2\right)$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $-4\cos\left(x^2\right)\sin\left(x^2\right)\cdot x$

**9. kérdés:** Mi az $s(x)=e^{\sqrt{x^2-1}}$ függvény derivált függvénye?

Válasz: $\dfrac{xe^{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}}$

**10. kérdés:** Legyen $f(x)=xe^{-x}$. Mi f második deriváltja?

Válasz: $\left(x^2-4x+2\right)e^{-x}$ (helyes)

**11. kérdés:** Legyen $f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt[4]{x^3}$. Mi f második deriváltja?

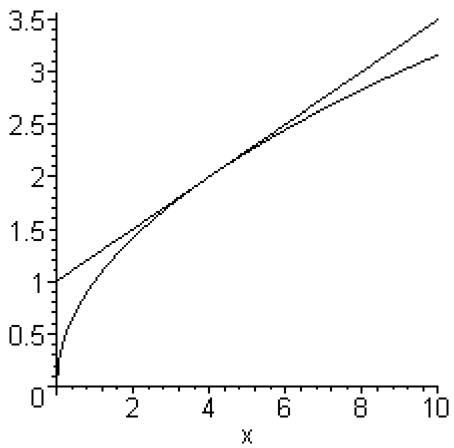
Válasz: $\frac{1}{16}\left(77x^2-3\right)\cdot x^{-\frac{5}{4}}$

## 11. A derivált alkalmazásai

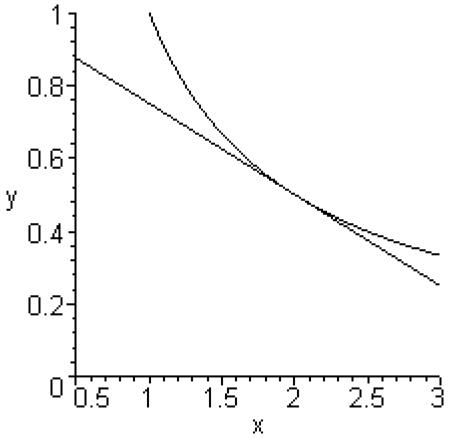
**Tanulási cél:** Olyan eljárás megismerése, melynek segítségével a függvények növekedés, csökkenés és szélsőérték szempontjából vizsgálhatók, valamint az eljárás alkalmazása szöveges feladatokban minimum vagy maximum keresésére.

**Motivációs példa:**
Valamely termék árbevételét az $f(x)$ függvény adja meg, ahol $x$ a termék egységára Ft-ban. Ha a jelenlegi egységár növekszik, vajon mennyivel csökken a bevétel? Milyen egységár mellett lesz a bevétel maximális?
Egy adott termék előállítási költségét a $g(x)$ függvény adja meg, ahol $x$ a termelt mennyiség. Ha a jelenlegi termelés nő, vajon az átlagos előállítási költség mennyivel növekszik? Mekkora termelés esetén lesz az egy termékre jutó átlagos előállítási költség minimális?
A gyakorlati életben nagyon sok ehhez hasonló problémával találkozunk, amiben valamilyen fizikai vagy közgazdasági mennyiségnek maximumát vagy minimumát, azaz szélsőértékét keressük, egy másik mennyiség függvényében. A megadott példákban a bevétel függ a termék egységárától, vagy az előállítási költség a termelt mennyiségtől. A mennyiségek közötti kapcsolatokat az $f(x)$ illetve $g(x)$ függvények írják le. Ha sikerül megállapítanunk, hogy ezek a függvények mikor nőnek, és mikor csökkennek, akkor azt is meg tudjuk mondani, hogy hol veszik fel a legnagyobb illetve legkisebb értékeiket. Az alábbiakban olyan módszerrel ismerkedünk meg, aminek segítségével el tudjuk dönteni, hogy egy függvény mely intervallumokon nő, és mely intervallumokon csökken, valamint hol és milyen típusú szélsőértéke van.

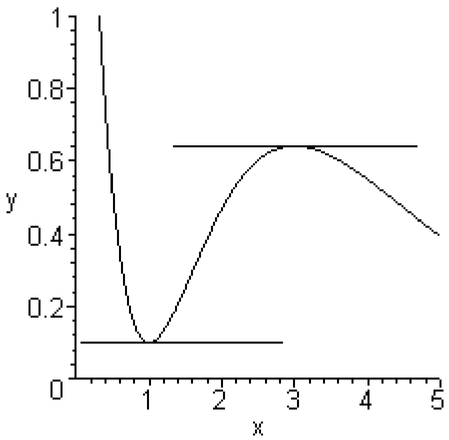
**Elméleti összefoglaló:** Mivel a derivált értéke minden pontban megadja a grafikon érintőjének meredekségét, ezért a derivált előjeléből következtethetünk arra, hogy hol nő és hol csökken a függvény, valamint hol van szélsőértéke. Szemléletesen ugyanis arra gondolhatunk, hogy ha egy pontban a derivált pozitív, akkor ott az érintő meredeksége pozitív, tehát az érintő úgymond felfelé halad, s mivel ő jól közelíti a függvényt, így a függvény is növekedni fog. Erre látunk példát az alábbi ábrán.




Hasonlóan okoskodhatunk akkor, ha egy pontban a derivált negatív. Ekkor az érintő nyilván lefelé halad, s ekkor a függvény csökkenni fog. Erre mutat példát az alábbi ábra.




Ha pedig egy függvénynek valahol szélsőértéke, azaz maximuma vagy minimuma van, akkor ott az érintőnek vízszintesnek kell lennie, tehát meredeksége 0, s így a derivált értéke itt 0 kell legyen. Erre láthatunk két példát is az alábbi ábrán.




Hangsúlyozzuk, hogy ez csak szemléletes okoskodás. A pontos megfogalmazás majd a most következő definíciókban és tételekben szerepel majd. Elsőként definiáljuk pontosan a lokális növekedés és csökkenés, valamint a szélsőértékek fogalmát.

**Definíció:** Az $f$ függvény az $x_0 \in D_f$ helyen lokálisan növekvő, ha létezik az $x_0$-nak olyan környezete, amelybe eső minden $x_1 < x_0 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Az $f$ függvény az $x_0 \in D_f$ helyen lokálisan csökkenő, ha létezik az $x_0$-nak olyan környezete, amelybe eső minden $x_1 < x_0 < x_2$ esetén teljesül, hogy $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$.

**Definíció:** Az $f$ függvénynek az $x_0$ helyen helyi, másképpen lokális maximuma van, ha megadható $x_0$-nak olyan környezete, amelybe eső minden $x$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$.

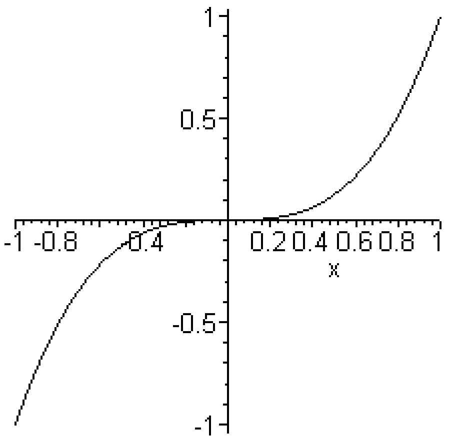
Az $f$ függvénynek az $x_0$ helyen helyi, másképpen lokális minimuma van, ha megadható $x_0$-nak olyan környezete, amelybe eső minden $x$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$.

Ezek után kimondható az alábbi tétel, melyre a szemléletes okoskodással utaltunk.

**Tétel:** Ha az $f$ függvény az $x_0$ helyen differenciálható és $f'(x_0) > 0$, akkor a függvény az $x_0$ helyen lokálisan növekvő.

Ha az $f$ függvény az $x_0$ helyen differenciálható és $f'(x_0) < 0$, akkor a függvény az $x_0$ helyen lokálisan csökkenő.

A tétel megfordítása azonban sajnos nem igaz. Gondoljunk ugyanis az $f(x) = x^3$ függvényre, amely az $x_0 = 0$ helyen nyilván lokálisan növekvő, azonban deriváltja ott nem pozitív, hanem 0-val egyenlő. Az alábbi ábrán látható az $f(x) = x^3$ függvény grafikonja, amiről teljesen egyértelmű, hogy a függvény nő az $x_0 = 0$ helyen.




Így nem egészen megfordításként, következő tétel mondható ki.

**Tétel:** Ha az $f$ függvény az $x_0$ helyen differenciálható és ott lokálisan növekedő, akkor $f'(x_0) \geq 0$.

Ha az $f$ függvény az $x_0$ helyen differenciálható és ott lokálisan csökkenő, akkor $f'(x_0) \leq 0$.

A feladatok megoldása során a lokális növekedés és csökkenés helyett, az intervallumon növekedés és csökkenés fogalmát használjuk.

**Definíció:** Az $f$ függvény az $]a,b[$ intervallumon növekvő, ha minden $x \in ]a,b[$ esetén lokálisan növekvő.

Az $f$ függvény az $]a,b[$ intervallumon csökkenő, ha minden $x \in ]a,b[$ esetén lokálisan csökkenő.

Ezek után feladatokban leginkább a tétel alábbi megfogalmazásra hivatkozunk.

**Tétel:** Ha $f$ az $]a,b[$ intervallumon differenciálható és minden $x \in ]a,b[$ esetén $f'(x) > 0$, akkor $f$ az $]a,b[$ intervallumon növekvő.
Ha $f$ az $]a,b[$ intervallumon differenciálható és minden $x \in ]a,b[$ esetén $f'(x) < 0$, akkor $f$ az $]a,b[$ intervallumon csökkenő.

A lokális szélsőértékekre is több tétel mondható ki. Az első a szélsőérték létezésének szükséges feltétele.

**Tétel:** Ha $f$ differenciálható az $x_0$ hely valamely környeztében, és $f$ -nek $x_0$-ban lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x) = 0$.

Gondoljunk bele, a tétel nem azt mondja ki, hogy ahol a derivált 0, ott szélsőérték van. Ez a tétel megfordítása lenne, és ez nem igaz. Példaként megint az $f(x) = x^3$ függvényt említhetjük, amelynek deriváltja az $x_0 = 0$ helyen 0-val egyenlő, de ott nincs szélsőértéke a függvénynek, mert ott lokálisan növekvő. Tehát csak annyit mondhatunk, ahol a derivált 0, ott könnyen elképzelhető, hogy van szélsőérték. Ezért van szükségünk egy másik tételre is, ami már elégséges feltétel a szélsőérték létezésére.

**Tétel:** Ha az $f$ függvény differenciálható az $x_0$ helyen és $f'(x_0) = 0$, valamint $f'$ előjele megváltozik az $x_0$-ban, akkor $f$ -nek az $x_0$ helyen lokális szélsőértéke van.

A fenti tételek birtokában a következő módon vizsgálhatjuk majd a függvényeket növekedés, csökkenés és szélsőérték szempontjából.
1. Megvizsgáljuk, mi a legbővebb halmaz, amelyen a függvény értelmezhető.
2. Deriváljuk a függvényt.
3. Megoldjuk az $f'(x) = 0$ egyenletet. Ezzel megkapjuk azokat a helyeket, ahol szélsőérték lehet.
4. Az értelmezési tartományt a szakadási helyekkel és a derivált zérushelyeivel részekre bontjuk, s a részeken vizsgáljuk a derivált előjelét. Ezt például úgy hajtjuk végre, hogy mindegyik részből választunk egy számot, melyet a deriváltba helyettesítünk.
5. Az értelmezési tartomány egyes részein a derivált előjeléből következtetünk a növekedésre, csökkenésre.
Az utolsó két pontban leírtakat célszerű egy táblázatban összefoglalni, mert akkor tömörebben írhatjuk a dolgokat.

**Kidolgozott feladatok:**

**1. feladat:** Vizsgáljuk meg növekedés és csökkenés, azaz monotonitás, valamint szélsőérték szempontjából az $f(x) = 3x^4 - 8x^3$ függvényt.

**Megoldás:** A függvény minden valós számra értelmezhető, azaz $D_f = \mathbb{R}$.

$f'(x)=12x^3-24x^2$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^3-24x^2=0$

Emeljünk ki amit csak lehet, így alakítsunk szorzattá.

$12x^2(x-2)=0$

Szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Két eset lesz, vagy $x^2=0$, amiből $x=0$ következik, vagy $x-2=0$, amiből $x=2$ következik. A derivált zérushelyei tehát most a 0 és a 2.

Készítsünk ezután egy táblázatot. Az első sorban az értelmezési tartomány részeit tüntessük fel. A derivált zérushelyei bontják részekre a valós számok halmazát. A zérushelyeknek is készítsünk külön oszlopot, mert ezeket a helyeket kell vizsgálnunk, hogy van-e bennük szélsőérték. A második sorban majd azt jelezzük, hogy az adott részen milyen előjelű a derivált. A harmadik sorban pedig majd azt, hogy azon a részen hogyan viselkedik a függvény. Most egyelőre azonban csak az első sort töltsük ki. Így az induló táblázatunk az alábbi.

| $x$ | $]-\infty,0[$ | $0$ | $]0,2[$ | $2$ | $]2,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | |

Most vegyünk egy számot a $]-\infty,0[$ intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. a $-1$.

$f'(-1)=12(-1)^3-24(-1)^2=-36$

Negatív számot kaptunk, tehát a derivált negatív értékeket vesz fel a $]-\infty,0[$ intervallumon.

Most vegyünk egy számot a $]0,2[$ intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. az $1$.

$f'(1)=12\cdot1^3-24\cdot1^2=-12$

Negatív számot kaptunk, tehát a derivált negatív értékeket vesz fel a $]0,2[$ intervallumon.

Végül vegyünk egy számot a $]2,\infty[$ intervallumból, és helyettesítsük be a deriváltba. Ilyen szám pl. a $3$.

$f'(1)=12\cdot3^3-24\cdot3^2=108$

Pozitív számot kaptunk, tehát a derivált pozitív értékeket vesz fel a $]2,\infty[$ intervallumon.

Töltsük ki ezután a táblázat második sorát, beírva a derivált előjelét. A zérushelyeken természetesen azt írjuk be, hogy a derivált ott 0.

| $x$ | $]-\infty,0[$ | $0$ | $]0,2[$ | $2$ | $]2,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | neg. $(-)$ | $0$ | neg. $(-)$ | $0$ | poz. $(+)$ |
| $f(x)$ | | | | | |

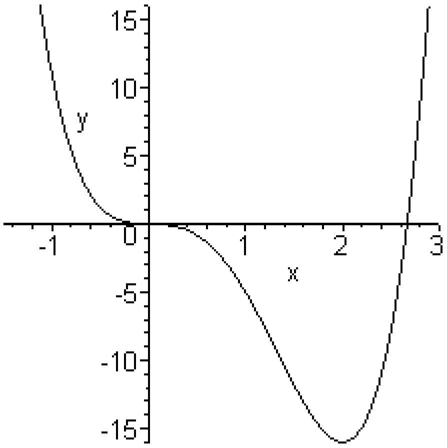
Ezután töltsük ki a harmadik sort is. Ahol a második sorban negatív a derivált, ott a függvény csökken, ahol pedig pozitív a derivált ott a függvény nő. Amelyik zérushelynél nem vált előjelet a derivált, ott nincs szélsőérték, de ahol megváltozik a derivált előjele ott van. Ha negatívból pozitívba vált a derivált, akkor lokális minimum van, hiszen a függvény a szélsőérték előtt csökken, azután pedig nő. Míg ha pozitívból negatívba megy át a derivált, akkor lokális maximum van, mert a függvény a szélsőérték előtt nő, utána pedig csökken.

| $x$ | $]-\infty,0[$ | $0$ | $]0,2[$ | $2$ | $]2,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | neg. $(-)$ | $0$ | neg. $(-)$ | $0$ | poz. $(+)$ |
| $f(x)$ | csökk. ↘ | nincs SZÉ. ↘ | csökk. ↘ | lokális minimum | nő ↗ |

A függvény tehát csökken a $]-\infty,2[$ intervallumon, nő a $]2,\infty[$ intervallumon, és lokális minimuma van az $x=2$ helyen.
Az $x=0$ helyen nincs szélsőérték, mert ott nem vált előjelet a derivált, s mert a függvény előtte és utána is csökken. Ebből következik, hogy az $x=0$ helyen is lokálisan csökkenő a függvény.
A táblázat alapján bármilyen növekedéssel, csökkenéssel és szélsőértékkel kapcsolatos kérdésre választ tudunk adni.
A szélsőérték nagyságát is megkaphatjuk, ha helyét behelyettesítjük az eredeti függvénybe. Jelen esetben tehát $2$-t helyettesítünk az $f$-be.

$$f(2)=3\cdot 2^4-8\cdot 2^3=-16$$

A függvény minimumának értéke tehát $-16$.
Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.




**2. feladat:** Vizsgáljuk meg növekedés és csökkenés, azaz monotonitás, valamint szélsőérték szempontjából az $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ függvényt.

**Megoldás:** A törtek miatt kikötést kell tennünk, $x\neq 0$. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)'=\left(x^{-1}+x^{-2}\right)'=(-1)\cdot x^{-2}+(-2)\cdot x^{-3}=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}=0$$

Célszerű $-1$-gyel szorozni, és közös nevezőre hozni. Így az alábbit kapjuk:

$\frac{x+2}{x^3}=0$.

Egy tört akkor 0, ha számlálója 0. Így az $x+2=0$ egyenletet kapjuk, amiből $x=-2$.
A deriváltnak tehát most csak egy zérushelye van. A táblázat készítésekor azonban ne feledkezzünk meg arról, hogy 0-ban nem értelmezett a függvény. Így a 0-t is vegyük be a táblázatba ugyanúgy, mint a derivált zérushelyét. Így az induló táblázat a következő.

| $x$ | $]-\infty,-2[$ | $-2$ | $]-2,0[$ | $0$ | $]0,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | X | |
| $f(x)$ | | | | X | |

A 0 oszlopában az X-ekkel azt jelöltük, hogy ott a függvény nincs értelmezve.
Vegyünk egy számot a $]-\infty,-2[$ -ból, mondjuk a $-3$-at, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(-3)=-\frac{1}{(-3)^2}-\frac{2}{(-3)^3}=-\frac{1}{27}$$

Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.
Vegyünk egy számot a $]-2,0[$ -ból, mondjuk a $-1$-et, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(-1)=-\frac{1}{(-1)^2}-\frac{2}{(-1)^3}=1$$

Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.
Végül vegyünk egy számot a $]0,\infty[$ -ból, mondjuk a 1-et, s helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(1)=-\frac{1}{1^2}-\frac{2}{1^3}=-3$$

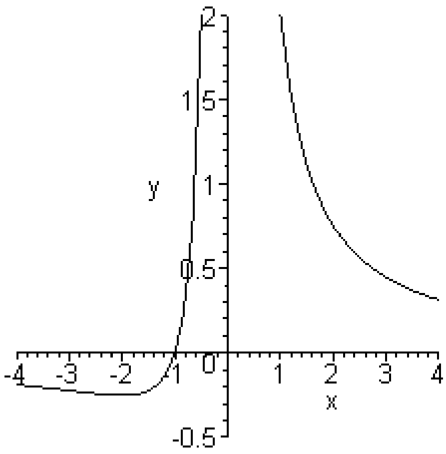
Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.
Mivel $-2$ előtt negatív a derivált, utána azonban pozitív, így az $x=-2$ helyen a függvénynek lokális minimuma van.
Töltsük ki ezután egyből a táblázat második és harmadik sorát is.

| $x$ | $]-\infty,-2[$ | $-2$ | $]-2,0[$ | $0$ | $]0,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | neg. $(-)$ | 0 | poz. $(+)$ | X | neg. $(-)$ |
| $f(x)$ | csökk. ↘ | lokáis minimum | nő ↗ | X | csökk. ↘ |

A függvény tehát csökken a $]-\infty,-2[$ és $]0,\infty[$ intervallumokon, nő a $]-2,0[$ intervallumon, és lokális minimuma van az $x=-2$ helyen.

A minimum értéke $f(-2)=\frac{1}{(-2)}+\frac{1}{(-2)^2}=-\frac{1}{4}$.

Bár az $x=0$ helyen megváltozik a derivált előjele, ez mégsem szélsőérték, hiszen itt a függvény nincs értelmezve.
Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.




**3. feladat:** Hol növekvő az $f$ függvény, ha deriváltja $f'(x)=(x+2)(x-5)^2$**?** Az $f$ ugyanott értelmezhető ahol $f'$.

**Megoldás:** Első lépésként meg kell vizsgálnunk, mi a legbővebb halmaz, amelyen $f'$ értelmezhető. Mivel nem kell semmilyen kikötést tennünk $D_{f'}=\mathbb{R}$, s ugyanitt értelmezhető $f$ is.
Mivel most ismerjük a függvény deriváltját, így az $f'(x)=0$ egyenlet megoldásával folytatjuk.
$(x+2)(x-5)^2=0$
Mivel szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0, így az egyenlet két egyszerűbb egyenletre bontható. Vagy $x+2=0$**,** amiből $x=-2$, vagy $(x-5)^2=0$, amiből $x=5$.
Készítsük most táblázatot, aminek első sorában feltüntetjük az értelmezési tartomány részeit. Most a derivált két zérushelye a $-2$ és az $5$ bontja részekre a valós számok halmazát.

| $x$ | $]-\infty,-2[$ | $-2$ | $]-2,5[$ | $5$ | $]5,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | |

Vegyünk egy számot a $]-\infty,-2[$ -ból, mondjuk a $-3$-at, s helyettesítsük a deriváltba.
$f'(-3)=(-3+2)(-3-5)^2=-64$
Mivel negatív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt negatív lesz a derivált, s így itt csökken a függvény.
Vegyünk egy számot a $]-2,5[$ -ból, mondjuk a $0$-t, s helyettesítsük a deriváltba. (Egy pozitív és egy negatív szám között mindig a 0-t célszerű választani, mert azt a legegyszerűbb helyettesíteni.)
$f'(0)=(0+2)(0-5)^2=50$
Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.
Végül vegyünk egy számot az $]5,\infty[$ -ból, mondjuk a $10$-et, s helyettesítsük a deriváltba.

$f'(10)=(10+2)(10-5)^2=300$

Mivel pozitív értéket kaptunk, ezen az intervallumon mindenütt pozitív lesz a derivált, s így itt nő a függvény.

Mivel $-2$ előtt negatív a derivált, utána azonban pozitív, így az $x=-2$ helyen a függvénynek lokális minimuma van.

Az $x=5$ helyen nem változik a derivált előjele, és a függvény $5$ előtt és után is nő, így ezen a helyen nincs szélsőérték. A függvény az $x=5$ helyen is lokálisan nő.

| $x$ | $]-\infty,-2[$ | $-2$ | $]-2,5[$ | $5$ | $]5,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | neg. $(-)$ | 0 | poz. $(+)$ | 0 | poz. $(+)$ |
| $f(x)$ | csökk. ↘ | lokáis minimum | nő ↗ | nincs SZÉ. ↗ | nő ↗ |

A kész táblázat alapján már csak válaszolnunk kell a kérdésre. Látható, hogy a függvény a $]-2,\infty[$ intervallumon nő.

**4. feladat:** Hol csökkenő az $f$ függvény, ha deriváltja $f'(x)=\dfrac{3-x}{x+4}$? Az $f$ ugyanott értelmezhető ahol $f'$.

**Megoldás:** A feladat nagyon hasonlít az előzőhöz, így ugyanúgy járhatunk el. Első lépésként határozzuk meg, mely halmazon értelmezhető a függvény deriváltja. A nevező nem lehet zérus, így $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$.

Ezután oldjuk meg az $f'(x)=0$ egyenletet.

$$\frac{3-x}{x+4}=0 \Rightarrow 3-x=0 \Rightarrow x=3$$

Nézzük ezután, milyen részekre kell bontanunk az értelmezési tartományt. Az előzőekben szerepelt, hogy a derivált zérushelyei bontják részekre az értelmezési tartományt, mert általában ezeken a helyeken változik meg a derivált előjele. De nem csak zérushelyen változhat egy függvény előjele, hanem olyan helyen is, ahol nincs értelmezve. Gondoljunk pl. az $\dfrac{1}{x}$ függvényre, amely nincs értelmezve az $x=0$ helyen. A negatív $x$ értékekre negatív ez a függvény, a pozitív $x$-ekre pedig pozitív. Nincs tehát zérushely a $0$-ban, hisz a függvény itt nem is értelmezett, de a függvény előjele mégis változik. Amikor készítjük a táblázatot, akkor tehát nem csak a derivált zérushelyével kell részekre bontani az értelmezési tartományt, hanem az értelmezési tartományban levő szakadási hellyel is. Készítsük el most a táblázatot, egyelőre az első sorát kitöltve. A szakadási helyen azonban a második és a harmadik sorban jelölhetjük, hogy ott a derivált nem értelmezett, így a függvényről sem tudunk semmit mondani.

| $x$ | $]-\infty,-4[$ | $-4$ | $]-4,3[$ | $3$ | $]3,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | X | | | |
| $f(x)$ | | X | | | |

Ezután vizsgáljuk meg az értelmezési tartomány részein a derivált előjelét, és ebből határozzuk meg, nő vagy csökken ott a függvény.
Vegyünk egy $-4$-nél kisebb számot. Legyen pl. $-5$, s helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(-5)=\frac{3-(-5)}{-5+4}=-8$$

Negatív értéket kaptunk, tehát $x<-4$ esetén negatív a derivált, ebből következően itt csökken a függvény.
Vegyünk egy $-4$ és $3$ közé eső számot. Legyen pl. $0$, s ezt is helyettesítsük a deriváltba.

$$f'(0)=\frac{3-0}{0+4}=\frac{3}{4}$$

Pozitív értéket kaptunk, tehát ha $-4<x<3$, akkor pozitív a derivált, s így itt nő a függvény.
Végül vegyünk egy $3$-nál nagyobb számot is. Legyen pl. $4$, és helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(4)=\frac{3-4}{4+4}=-\frac{1}{8}$$

Negatív értéket kaptunk, így ha $3<x$ akkor negatív a derivált, tehát ekkor csökken függvény.
Mivel a derivált értéke az $x=3$ helyen előjelet vált, így ezen a helyen van lokális szélsőértéke a függvénynek. Mert a derivált pozitívból negatívba megy át, így ezen a helyen lokális maximum van.
Ezután kitölthetjük a táblázat második és harmadik sorát is.

| $x$ | $]-\infty,-4[$ | $-4$ | $]-4,3[$ | $3$ | $]3,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | neg. $(-)$ | X | poz. $(+)$ | $0$ | neg. $(-)$ |
| $f(x)$ | csökk. ↘ | X | nő ↗ | lokális maximum | csökk. ↘ |

A kitöltött táblázat alapján válaszolhatunk a feladat kérdésére. A függvény csökken a $]-\infty,-4[$ és $]3,\infty[$ intervallumokon.

**5. feladat:** Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f$ függvénynek, ha deriváltja $f'(x)=(x-2)^2\ln x$? Az $f$ ugyanott értelmezhető ahol $f'$.

**Megoldás:** Az előző feladatok megoldásából láthattuk, hogy egy függvény szélsőértékeinek meghatározásához is azokra a lépésekre van szükség, mint a növekedés és a csökkenés vizsgálatához. Így járjunk el hasonlóan, mint az előzőekben. Elsőként vizsgáljuk meg, mely halmazon értelmezhető a függvény deriváltja. Most a $\ln x$ miatt ki kell kötnünk, hogy $x$ csak pozitív értékeket vehet fel, így $D_f=\mathbb{R}^+=]0,\infty[$.
Ezután oldjuk meg az $f'(x)=0$ egyenletet.

$$(x-2)^2\ln x=0$$

Arra hivatkozunk, hogy szorzat csak akkor lehet zérus, ha valamelyik tényezője $0$. Így az egyenletet egyszerűbb egyenletekre bontjuk.

$(x-2)^2=0$ vagy $\ln x=0$

Az első egyenlet megoldása nyilván $x=2$.
A második egyenlet mindkét oldalát tekintsük úgy mint kitevőt, s az $e$ számot emeljük fel ezen kitevőkre. Így a bal oldalon olyan kompozíciót kapunk, amiben egy függvény és inverze szerepel, így ott egyszerűen $x$ áll.

$\ln x = 0 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$

A derivált zérushelyei tehát az $1$ és a $2$.

Ezután elkészíthetjük a táblázatot, egyelőre csak az első sort kitöltve. Figyeljünk oda, hogy az értelmezési tartomány most csak a pozitív valós számok halmaza. Így az első részben nem a $]-\infty, 1[$ intervallum áll, hanem ott a $]0,1[$ intervallumnak kell szerepelni.

| $x$ | $]0,1[$ | $1$ | $]1,2[$ | $2$ | $]2,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | |

Ezután vizsgáljuk a derivált előjelét az egyes részeken, s ebből következtessünk a növekedésre vagy a csökkenésre.

A $]0,1[$ intervallumban található pl. az $0.5$. Helyettesítsük ezt a deriváltba.

$$f'(0.5) = (0.5-2)^2 \ln 0.5 \approx -1.56$$

A derivált értéke itt negatív, tehát ezen az intervallumon csökken a függvény.

Az $]1,2[$ intervallumban található pl. az $1.5$, amit behelyettesítünk a deriváltba.

$$f'(1.5) = (1.5-2)^2 \ln 1.5 \approx 0.101$$

A derivált értéke ezen a helyen pozitív, ebből következően ezen az intervallumon nő a függvény.

Végül a $]2,\infty[$ intervallumban van pl. az $3$, amit a deriváltba helyettesítünk.

$$f'(3) = (3-2)^2 \ln 3 \approx 1.10$$

A derivált pozitív ezen a helyen, így itt is nő a függvény.

Az $x = 1$ helyen a derivált előjele megváltozik, így itt a függvénynek lokális szélsőértéke van. Mivel a derivált negatívból pozitívba megy át ezen a helyen, így itt lokális minimuma van a függvénynek.

Az $x = 2$ helyen a derivált nem vált előjelet, így ezen a helyen nincs szélsőértéke a függvénynek. Mivel előtte és utána is növekvő a függvény, így ezen a helyen is lokálisan növekvő a függvény.

Töltsük ki ezután a táblázat második és harmadik sorát is.

| $x$ | $]0,1[$ | $1$ | $]1,2[$ | $2$ | $]2,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | neg. $(-)$ | $0$ | poz. $(+)$ | $0$ | poz. $(+)$ |
| $f(x)$ | csökk. ↘ | lokális minimum | nő ↗ | nincs SZÉ. ↗ | nő ↗ |

A függvénynek tehát csak az $x = 1$ helyen van lokális szélsőértéke, ahol lokális minimuma van.

**Ellenőrző kérdések:**

**1. kérdés:** Hol növekvő az $f(x) = 3x^4 + 12x^3$ függvény?

Válasz: A $]-3,\infty[$ intervallumon

**2. kérdés:** Hol csökkenő az $f(x)=x+\frac{1}{x}$ függvény?

Válasz: A $]-1,0[$ és $]0,1[$ intervallumokon.

**3. kérdés:** Hol növekvő az $f$ függvény, ha deriváltja $f'(x)=(x-1)^3(x+8)$**?** Az $f$ ugyanott értelmezhető ahol $f'$.

Válasz: A $]-\infty,-8[$ és $]1,\infty[$ intervallumokon.

**4. kérdés:** Hol csökkenő az $f$ függvény, ha deriváltja $f'(x)=\frac{x-5}{(x+2)^2}$ **?** Az $f$ ugyanott értelmezhető ahol $f'$.

Válasz: A $]-\infty,-2[$ és $]2,5[$ intervallumokon.

**5. kérdés:** Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f$ függvénynek, ha deriváltja $f'(x)=(x-7)^3\ln x$? Az $f$ ugyanott értelmezhető ahol $f'$.

Válasz: Az $x=1$ helyen lokális maximuma, az $x=7$ helyen lokális minimuma van.

**Elméleti összefoglaló:** Az eddigiekben megismertük azt a módszert, mellyel függvényeket monotonitás és szélsőérték szempontjából vizsgálni tudunk. Most foglalkozzunk azzal, hogyan tudjuk alkalmazni ezt a módszert a lecke elején vázolt problémákhoz hasonló esetekben, melyeket szöveges szélsőérték feladatoknak nevezhetünk. Az ilyen feladatokban első lépésként fel kell írnunk, egy általunk választott független változó függvényében azt a mennyiséget, aminek a szélsőértékét keressük. Ezután meg kell határozni a feladat feltételeiből, hogy a független változó milyen értékeket vehet fel. Az így kapott, szöveg szerinti értelmezési tartományon kell aztán megkeresnünk a függvény szélsőértékeit a korábban megismert módon. A módszerrel az alábbi kidolgozott feladatokon keresztül ismerkedünk meg. Megoldjuk majd a lecke elején vázolt problémát is, de előbb egyszerűbb feladatokkal foglalkozunk.

**Kidolgozott feladatok:**

**1. feladat:** Mekkorának kell választani egy $20\,\text{cm}$ kerületű téglalap oldalait, hogy területe maximális legyen? Mekkora ez a maximális terület?

**Megoldás:** Jelöljük a téglalap egyik oldalát $x$-szel, a másikat pedig $y$-nal.
Ekkor a téglalap területe: $T=xy$.
Így felírva a területet, két változó mennyiség szerepel. Azonban a két változó között kapcsolat van, hiszen a kerület $20\,\text{cm}$. Írjuk fel a kerületet az oldalakkal.
$K=20=2x+2y$
Ebből az összefüggésből az egyik változó, pl. $y$ kifejezhető.
$y=10-x$

Ha pedig ezután behelyettesítünk $y$ helyére a területet leíró összefüggésben, akkor már egyváltozós függvényt kapunk. Ekkor már jelölhetjük azt is, hogy a terület az $x$ változó függvénye.
$T(x) = x(10-x) = 10x - x^2$
Ezzel olyan függvényt kaptunk, ami a terület változását írja le az egyik oldal függvényében.
Határozzuk meg ezután, hogy milyen határok között vehet fel értékeket a változó.
Nyilvánvaló, hogy az $x > 0$ feltételnek teljesülni kell, hiszen egy téglalap oldala csak pozitív lehet. Az $x$-nek azonban $10$-nél kisebbnek is kell lennie, hiszen a téglalap másik oldala $10-x$, és ennek is pozitívnak kell lenni. Így a változóra a $0 < x < 10$ feltételt kapjuk. Ezen a halmazon kell keresnünk a fenti $T(x)$ függvény maximumát. Ehhez állítsuk elő a függvény deriváltját.
$T'(x) = 10 - 2x$
Megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet.
$10 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$
A deriváltnak a zérushelye a $]0,10[$ intervallumba esik, így szóba jöhet, mint lehetséges maximum hely. Annak eldöntésére, hogy az $x = 5$ helyen valóban maximuma van-e a területnek, célszerű elkészíteni a szokásos táblázatot.
Az első sor kitöltésekor vegyük figyelembe a $0 < x < 10$ feltételt.
A derivált előjelének vizsgálatát immár nem részletezzük, mert nyilvánvaló, hogy melyik intervallumon pozitív ill. negatív a derivált.

| $x$ | $]0,5[$ | $5$ | $]5,10[$ |
|---|---|---|---|
| $T'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $T(x)$ | $\nearrow$ | lok. max. | $\searrow$ |

Az $x = 5$ helyen tehát lokális maximuma van a függvénynek. Sőt ez a $0 < x < 10$ feltétel mellett nem csak lokális maximum, hanem ezen a halmazon ez globális maximum is, hiszen $x < 5$ esetén végig nő a függvény, $x > 5$ esetén pedig végig csökken.
A terület tehát akkor lesz maximális, ha az egyik oldal $5$ cm hosszúságú. Persze ekkor a másik oldal hossza is $5$ cm, azaz a téglalap ekkor négyzet.
A maximális területet kell még meghatároznunk. Helyettesítsük be a maximum helyét a függvénybe.
$T_{max} = T(5) = 5(10-5) = 25$
A terület maximumának értéke tehát $25\ \text{cm}^2$.

Megjegyzés: Az ilyen feladatokban nem egyértelmű, hogy mit lesz majd a legjobb független változónak tekinteni. Jelen feladatban elég egyértelmű volt, hogy a téglalap egyik oldalát célszerű választani, de eljárhattunk volna más módon is. Mivel a két oldal összege $10$, így az egyik oldal ugyanannyival rövidebb $5$-nél, mint amennyivel a másik hosszabb $5$-nél. Választhattuk volna változónak ezt a mennyiséget is, amivel az oldalak az $5$-től eltérnek. Természetesen ekkor másik függvény írja le területet, és más a szöveg szerinti értelmezési tartomány is. Ennek megmutatása végett megoldjuk most a feladatot másik módon is.

Jelölje a téglalap két oldalát $a$ és $b$. Tegyük fel, hogy $a$ a nem rövidebb oldal, $b$ pedig a nem hosszabb oldal, azaz $a \geq b$.

Jelölje $x$ az oldalak hosszának $5$-től való eltérését.
Ekkor $a = 5 + x$, $b = 5 - x$.
A téglalap terület: $T = ab$, amibe behelyettesítve a fentieket, egy függvényt kapunk, aminek változója $x$ lesz.
$T(x) = (5+x)(5-x) = 25 - x^2$
Ne feledkezzünk el annak vizsgálatáról, hogy a szöveg milyen értékeket enged meg a változóra. Jelen esetben $0 \le x$, hiszen egy eltérés nem lehet negatív, $x < 5$, mert a $b$ oldalnak, azaz $5 - x$-nek is pozitívnak kell lenni. Ez együttesen $0 \le x < 5$, vagy $x \in [0,5[$ formában írható. Amint látható, most olyan intervallumon keressük a maximumot, aminek egyik vége zárt, másik vége nyitott.
Vegyük a területfüggvény deriváltját.
$T'(x) = -2x$
Itt kell felhívnunk azonban a figyelmet arra, hogy a derivált csak a $T$ függvény értelmezési tartományának belső pontjaiban értelmezhető, így a derivált esetén már $0 < x < 5$, azaz $x \in ]0,5[$.
Ha megoldjuk a $T'(x) = 0$ egyenletet, ami $-2x = 0$, akkor abból $x = 0$ következik.
Ez azonban nem eleme $T'$ értelmezési tartományának. Ennek ellenére olyan érzésünk támadhat, hogy ha van szélsőérték, akkor az most csak az $x = 0$ esetén lehet. Ennek igazolására készítsünk táblázatot. Az $x = 0$ értéket kezeljük külön, és itt a derivált sorában azt tüntetjük fel, hogy az nem értelmezett.

| $x$ | $0$ | $]0,5[$ |
|---|---|---|
| $T'(x)$ | nem értelmezett | neg. $(-)$ |
| $T(x)$ | maximum | $\searrow$ |

A táblázatból leolvasható, hogy a függvény végig csökken, s ebből következően a maximumát az értelmezési tartomány alsó határán, azaz $x = 0$ esetén veszi fel. Megkaptuk tehát most is, hogy akkor van szélsőérték, ha a téglalap négyzet.
Megjegyezzük, hogy ha a második megoldásunk során nem éltünk volna az $a \ge b$ feltevéssel, akkor $x$ negatív értékeket is felvehetett volna. Ekkor egyrészt a $-5 < x$ feltételnek kellett volna teljesülni amiatt, hogy az $a$ oldalnak, azaz $x + 5$-nek pozitívnak kell lenni. Másrészt az $x < 5$ feltételnek kell fennállni, mert a $b$ oldalnak, azaz $5 - x$-nek pozitívnak kell lenni. A kettőből együttesen kapjuk, hogy $-5 < x < 5$, azaz $x \in ]-5,5[$. Ekkor ugyanúgy az értelmezési tartomány belső pontjában kapjuk a szélsőértéket, mint az első megoldásunkban. A fentiekből jól látható, hogy a független változó megválasztása nagyban befolyásolja a feladat megoldásának további részét. Arra is felhívjuk a figyelmet, hogy a szélsőértéket nagyon sok esetben a derivált alkalmazása nélkül is meghatározhatjuk. Ha például a második megoldásunkban kapott területet leíró függvényt $T(x) = 25 - x^2$ vizsgáljuk, akkor egyértelműen $x = 0$ esetén van maximuma a függvénynek. Ennek oka, hogy egy konstansból vonunk $x^2$-et, aminek legkisebb értéke a 0, az $x = 0$ esetben. Így amikor $x^2$ a legkisebb, akkor lesz $25 - x^2$ a legnagyobb. Sok esetben viszont nem találunk ilyen elemi megoldást, s így ilyenkor nem tudjuk elkerülni a derivált alkalmazását.

**2. feladat:** Egy termék iránti keresletet a $t$ egységár függvényében $K(t)=\dfrac{t}{t^2+4}$ függvény írja le. Vizsgáljuk meg, hogy milyen $t$ egységár mellett lesz a termék iránti kereslet a legnagyobb?

**Megoldás:** A feladat szövegéből következik, hogy a termék utáni keresletet megadó függvény értelmezési tartománya csak a pozitív valós számok halmaza lehet, tehát $t>0$. A kereslet ott lehet maximális, ahol a $K$ függvény deriváltja 0-val egyenlő (ahol a derivált eltűnik). Első lépésként tehát deriváljuk a $K$ függvényt.

$$K'(t)=\frac{1\cdot(t^2+4)-t\cdot 2t}{(t^2+4)^2}=\frac{4-t^2}{(t^2+4)^2}$$

Oldjuk meg a $K'(t)=0$ egyenletet. Használjuk fel, hogy egy tört csak akkor lehet 0, ha a számlálója 0.

$$\frac{4-t^2}{(t^2+4)^2}=0, \quad \text{ha} \quad 4-t^2=0$$

Egy másodfokú egyenletet kaptunk $t$-re, amelynek gyökei az $t=\pm 2$ .

A két megoldás közül csak $t_1=2$ esik a $]0,\infty[$ intervallumba, így a táblázat elkészítésénél csak ezt kell figyelembe venni.
Készítsük el a szokásos táblázatot.

| t | $]0,2[$ | 2 | $]2,\infty[$ |
|---|---|---|---|
| $K'(t)$ | | | |
| $K(t)$ | | | |

A $K'(t)$ sorában az előjeleket például a következő módon kaphattuk meg. Választunk egy számot a $]0,2[$ intervallumból, mondjuk az 1-et, mert azzal könnyű lesz számolni. Ezt behelyettesítjük $K'(t)$-be.

$$K'(1)=\frac{3}{25}>0$$

Hasonlóan választunk egy számot a $]2,\infty[$ intervallumból. Legyen ez mondjuk a $10$, mert ezzel is könnyű lesz számolni.

$$K'(10)=\frac{4-100}{(100+4)^2}<0$$

| t | $]0,2[$ | 2 | $]2,\infty[$ |
|---|---|---|---|
| $K'(t)$ | + | 0 | – |
| $K(t)$ | ↗ | lok. max. | ↘ |

Ezután már kijelenthetjük, hogy az $t=2$ helyen lokális maximuma van a $K(t)$ függvénynek. A $]0,\infty[$ intervallumon ez nem csak lokális, hanem globális maximum is, hiszen $t=2$ előtt végig nő a függvény, $t=2$ után pedig végig csökken.

**3. feladat:** Két pozitív szám szorzata $100$. Melyik ez a két szám, ha összegük minimális? Mekkora a minimális összeg?

**Megoldás:** Legyen a két szám $x$ és $y$. Tudjuk, hogy $xy=100$. Fejezzük ki ebből $y$-t.

$$y=\frac{100}{x}$$

Írjuk a két szám összegét ezután $x$ függvényeként.

$$f(x)=x+\frac{100}{x}$$

Ennek a függvénynek kell keresnünk a minimumát a $]0,\infty[$ intervallumon.

Deriváljuk a függvényt.

$$f'(x)=\left(x+\frac{100}{x}\right)'=\left(x+100x^{-1}\right)'=1+100(-1)x^{-2}=1-\frac{100}{x^2}$$

Oldjuk meg az $f'(x)=0$ egyenletet.

$$1-\frac{100}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2=100 \Leftrightarrow x=\pm 10$$

Minimum szempontjából nyilván csak az $x=10$ esettel kell foglalkoznunk, hiszen most $x>0$.

Készítsük el a már jól ismert táblázatot.

| $x$ | $]0,10[$ | $10$ | $]10,\infty[$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | lok. min. | $\nearrow$ |

Az $f'(x)$ sorában az előjeleket például $x=1$ és $x=100$ deriváltba történő helyettesítésével kaphatjuk.

$$f'(1)=1-\frac{100}{1^2}=-99<0$$

$$f'(100)=1-\frac{100}{100^2}=0.99>0$$

Amint látható, a függvénynek az $x=10$ helyen lokális minimuma van, ami pozitív $x$-ekre egyben globális minimum is.

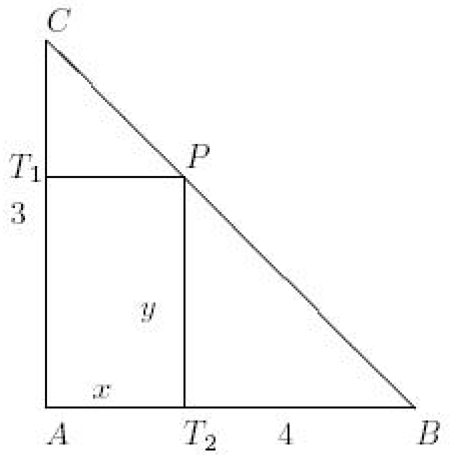
Határozzuk meg ezután a másik számot, tehát $y$-t is.

$$y=\frac{100}{x}=\frac{100}{10}=10$$

Az összeg tehát akkor lesz minimális, ha mindkét szám 10. Ekkor az összegük 20, ez a minimális összeg.

**4. feladat:** Adott egy $3$ és $4$ egység befogójú derékszögű háromszög. Tekintsük azokat a háromszögbe írható téglalapokat, amelyeknek egyik csúcsa a háromszög derékszöge, az ezzel szemközti csúcs pedig az átfogóra esik. A legnagyobb területű ilyen téglalapnak mekkorák az oldalai?

**Megoldás:** Készítsünk egy ábrát a háromszögről és a belé írt téglalapról.




A téglalap $x$-szel és $y$-nal jelölt oldala között most hasonlóság alapján lehet összefüggést találni. A $PT_2B$ és $CAB$ derékszögű háromszögek hasonlóak, ezért

$$\frac{y}{4-x}=\frac{3}{4}$$

Rendezzük ezt $y$-ra.

$$y=\frac{3}{4}(4-x)=3-\frac{3}{4}x$$

Ezt felhasználva felírhatjuk a téglalap területét az $x$ függvényében.

$$T(x)=x\left(3-\frac{3}{4}x\right)=3x-\frac{3}{4}x^2$$

Az $x$ változó most nyilván a $]0,4[$ intervallumba esik, így ezen a halmazon keressük a függvény maximumát.

Deriváljuk a függvényt.

$$T'(x)=3-\frac{3}{2}x$$

Megoldjuk a $T'(x)=0$ egyenletet.

$$3-\frac{3}{2}x=0 \iff x=2$$

A szokásos táblázat segítségével megvizsgáljuk, hogy ezen a helyen valóban van-e maximuma a függvénynek.

| $x$ | $]0,2[$ | $2$ | $]2,4[$ |
|---|---|---|---|
| $T'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $T(x)$ | $\nearrow$ | lok. max. | $\searrow$ |

A második sorban $T'$ előjelét például $x=1$ és $x=3$ helyettesítésével vizsgálhattuk.

$T'(1) = 3 - \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} > 0$

$T'(3) = 3 - \frac{3}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{2} < 0$

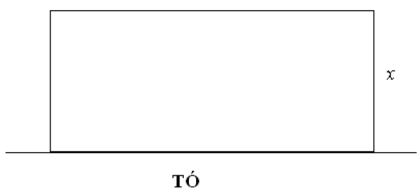
Amint látható, az $x = 2$ helyen lokális maximuma van a függvénynek, ami egyben globális maximum is.
Már csak a téglalap másik oldalát kell kiszámolnunk.

$y = 3 - \frac{3}{4}x = 3 - \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$

A maximális területű téglalap oldalai tehát $2$ és $\frac{3}{2}$ hosszúságúak.

**Ellenőrző kérdések:**

**1. kérdés:** Egy tó egyenes partján szeretnénk elkeríteni egy téglalap alakú telket. Ehhez $200\,\mathrm{m}$ drótfonat áll rendelkezésünkre. A legnagyobb területű téglalapot szeretnénk elkeríteni úgy, hogy a tó felőli oldalon nem lesz kerítés.




Ha a téglalap tópartra merőleges oldalát választjuk változónak, és $x$-szel jelöljük, akkor az alábbi függvénnyel írható le a terület:

Válasz: $T(x) = 200x - 2x^2$

**2. kérdés:** Az előző kérdésben a maximális területű telek oldalai az alábbiak:

Válasz: A partra merőleges oldal $50\,\mathrm{m}$, a parttal párhuzamos oldal $100\,\mathrm{m}$

**3. kérdés:** Két pozitív szám összege 1. A szorzatuk maximumát keressük. Ekkor a következő függvényt kell vizsgálnunk:

Válasz: $f(x) = x - x^2$

**4. kérdés:** Az előző kérdésben a két szám szorzatának maximuma az alábbi:

Válasz: $\frac{1}{4}$

**5. kérdés:** A $[0,1]$ intervallumot egy belső pontjával két részre bontjuk, és mindegyik rész fölé négyzetet emelünk. A négyzetek területösszegének minimumát szeretnénk meghatározni.

Melyik függvényt kell vizsgálnunk, ha független változónak az egyik szakasz hosszát választjuk?

Válasz3: $f\left(x\right)=2x^2-2x+1$

**További kidolgozott feladatok:**

**1. feladat:** Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$ függvényt!

Megoldás: Amikor egy függvényt valamilyen szempontból vizsgálunk, akkor elsőként mindig az értelmezési tartományt kell meghatároznunk. Jelen esetben ki kell kötnünk, hogy a nevező nem lehet $0$, s ebből az következik, hogy $x \neq -1$. A függvény értelmezési tartománya tehát: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ .

A monotonitás vizsgálata azt jelenti, hogy meghatározzuk, hol nő, hol csökken a függvény. Ehhez elő kell állítanunk a függvény deriváltját. Alkalmazzuk a törtekre vonatkozó deriválási szabályt.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x+1)^2-x^2\cdot 2(x+1)}{\left((x+1)^2\right)^2}$$

Ez ilyen formában nagyon csúnyán néz ki, ezért próbáljunk alakítani rajta. Emeljünk ki a számlálóban, amit csak lehet, a nevezőt pedig írjuk egyetlen hatványként.

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)[(x+1)-x]}{(x+1)^4}$$

Ezután egyszerűsítsünk, és a szögletes zárójelen belül vonjunk össze.

$$f'(x)=\frac{2x}{(x+1)^3}$$

A derivált minél egyszerűbb alakra hozása azért fontos, mert ezután meg kell oldanunk az $f'(x)=0$ egyenletet, valamint vizsgálnunk kell majd a derivált előjelét. Ha a derivált bonyolult alakban van felírva, akkor mind az egyenlet megoldása, mind az előjel vizsgálata nehézségekbe ütközik. Általában elmondhatjuk, hogy ha lehetőség van kiemelésre, akkor ezzel a lehetőséggel élni kell, s törtek esetében egyszerűsítsünk, ha erre lehetőség van.
Most oldjuk meg az $f'(x)=0$ egyenletet, hogy megkapjuk, hol lehet szélsőértéke a függvénynek.

$$\frac{2x}{(x+1)^3}=0$$

Tört csak úgy lehet egyenlő $0$-val, ha számlálója $0$, így egyszerűbb egyenletet kapunk.

$$2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$$

Ezután a szokásos módon táblázatot készíthetünk. Elsőként csak az első sort töltsük ki, melyben feltüntetjük az értelmezési tartomány részeit, melyeken belül már nem változik a derivált előjele. Az értelmezési tartományt a derivált zérushelye és az értelmezési tartományban levő szakadás bontja részekre. A szakadási hely oszlopában X-ekkel jelölhetjük, hogy ott a függvény nem értelmezett.

| $x$ | $]-\infty,-1[$ | $-1$ | $]-1,0[$ | $0$ | $]0,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | X | | | |
| $f(x)$ | | X | | | |

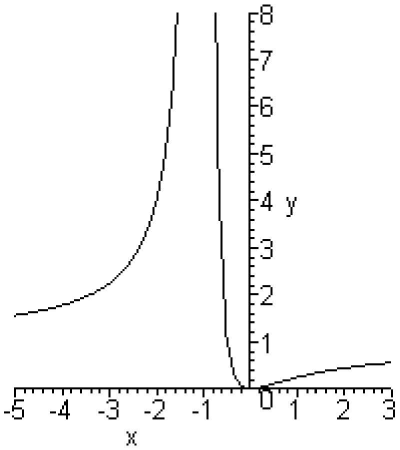
Most vizsgáljuk meg a derivált előjelét az egyes részeken. A derivált tört, így külön vizsgálhatjuk a számláló és a nevező előjelét, amiből következtethetünk a tört előjelére.
Ha $x < -1$ , akkor a számláló, azaz $2x$ negatív, és a nevező, azaz $(x+1)^3$ is negatív, így a derivált ekkor pozitív. Ebben az esetben tehát nő a függvény.
Ha $-1 < x < 0$, akkor $2x$ negatív, de $(x+1)^3$ pozitív, így negatív lesz a derivált. A függvény tehát ekkor csökken.
Ha $0 < x$ , akkor $2x$ is pozitív, és $(x+1)^3$ is pozitív, azaz pozitív lesz a derivált. Ebből következően itt nő a függvény.
Az $x = 0$ helyen a derivált előjele megváltozik, így itt szélsőértéke van a függvénynek. Mivel a derivált negatívból pozitívba megy át ezen a helyen, így itt lokális minimuma van a függvénynek.
Készítsük el a teljes táblázatot.

| $x$ | $]-\infty,-1[$ | $-1$ | $]-1,0[$ | $0$ | $]0,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | X | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | X | $\searrow$ | lok. min. | $\nearrow$ |

A táblázattal így megadtuk, hogy hol nő, és hol csökken a függvény, valamint hol, milyen jellegű szélsőértéke van. Már csak egyetlen feladatunk van, megadni a szélsőérték nagyságát. Helyettesítsük be a függvénybe azt a helyet, ahol szélsőértéke van.

$$f(0) = \frac{0^2}{(0+1)^2} = 0$$

A lokális minimum értéke tehát $0$.
A függvény grafikonja az alábbi ábrán látható.




**2. feladat:** Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x) = x^2 e^{-2x}$ függvényt!

**Megoldás:** Határozzuk meg a legbővebb halmazt, amin értelmezhető a függvény. Nem kell kikötést tennünk, így $D_f = \mathbb{R}$ .

Deriváljuk a függvényt. Alkalmazzuk a szorzatra vonatkozó deriválási szabályt, és ne feledkezzünk el arról, hogy szorzat második tényezője összetett függvény.

$f'(x) = 2xe^{-2x} + x^2e^{-2x} \cdot (-2)$

Emeljük ki amit lehet.

$f'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$

Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$2xe^{-2x}(1-x) = 0$

Egy három tényezős szorzat egyenlő $0$-val, ami csak úgy lehetséges, ha valamelyik tényező $0$. Így három egyszerűbb egyenletet kapunk.

$x = 0$, vagy $e^{-2x} = 0$, vagy $(1-x) = 0$.

Az első egyenlettel semmit sem kell tenni, a harmadiknak pedig $x = 1$ megoldása.
A második egyenletnek nincs megoldása, mert exponenciális függvény csak pozitív értékeket vesz fel, azaz $e^{-2x} > 0$ minden $x$ esetén, így $e^{-2x} \neq 0$.
A derivált zérushelyeinek ismertében készítsük el a táblázatot, egyelőre csak az első sort kitöltve.

| $x$ | $]-\infty,0[$ | $0$ | $]0,1[$ | $1$ | $]1,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | |

Vizsgáljuk meg a derivált előjelét az egyes intervallumokon.

$(-\infty,0)$: $f'(-1) = 2(-1)e^{-2(-1)}(1-(-1)) = -4e^2 < 0$

$(0,1)$: $f'(0.5) = 2 \cdot 0.5e^{-2 \cdot 0.5}(1-0.5) = 0.5e^{-1} > 0$

$(1,\infty)$: $f'(2) = 2 \cdot 2e^{-2 \cdot 2}(1-2) = -4e^{-4} < 0$

Megjegyezzük, hogy a derivált előjelét a szorzat egyes tényezőinek előjeléből is könnyen vizsgálhatjuk. Például a $(-\infty,0)$ intervallumon $x$ nyilván negatív, az $e^{-2x}$ mindig pozitív, az $1-x$ szintén pozitív. Mivel a három tényezőből csak egy negatív, így negatív lesz a szorzat is.
Hasonlóan járhatunk el a másik két intervallumon is.
Most töltsük az egész táblázatot.

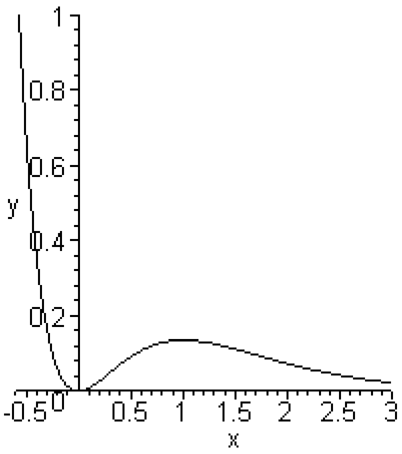
| $x$ | $]-\infty,0[$ | $0$ | $]0,1[$ | $1$ | $]1,\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | lok. min. | $\nearrow$ | lok. max. | $\searrow$ |

A táblázatból látható, hogy a függvény a $]-\infty,0[$ és $]1,\infty[$ intervallumokon csökken, a $]0,1[$ intervallumon pedig nő. Az $x = 0$ helyen lokális minimuma, az $x = 1$ helyen pedig lokális maximuma van.
Határozzuk meg a minimum és maximum értékét is.

A lokális minimum értéke: $f(0) = 0^2e^{-2 \cdot 0} = 0$.

A lokális maximum értéke: $f(1) = 1^2e^{-2 \cdot 1} = e^{-2} \approx 0.135$.

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható.




**3. feladat:** Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szempontjából az $f(x) = x^2 \ln\left(x^2\right)$ függvényt!

**Megoldás:** Határozzuk meg a legbővebb halmazt, amin értelmezhető a függvény. A logaritmus miatt kell kikötést tennünk. Mivel csak pozitív számoknak létezik logaritmusa, így kikötjük, hogy $x^2 > 0$. Ez minden $0$-tól különböző szám esetén teljesül, így $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Előállítjuk a függvény deriváltját. Szorzatot deriválunk, melynek második tényezője összetett függvény.

$$f'(x) = 2x \ln\left(x^2\right) + x^2 \frac{1}{x^2} 2x = 2x \ln\left(x^2\right) + 2x$$

Emeljük ki amit lehet.

$$f'(x) = 2x\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right)$$

Oldjuk meg az $f'(x) = 0$ egyenletet.

$$2x\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right) = 0$$

Vizsgáljuk külön a szorzat tényezőit, hogy mikor egyenlők $0$-val.
Első tényező: $x = 0$. Ez nem eleme a függvény értelmezési tartományának.
Második tényező: $\ln\left(x^2\right) + 1 = 0$. Ez átrendezve $\ln\left(x^2\right) = -1$ lesz.
A $-1$-et írjuk fel $\ln\left(e^{-1}\right)$ formában, így az $\ln\left(x^2\right) = \ln\left(e^{-1}\right)$ egyenletet kapjuk.
A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt elhagyhatjuk az egyenlet két oldaláról a logaritmust. Így kapjuk $x^2 = e^{-1} = \frac{1}{e}$.
Ennek megoldásai: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$.
Most készítsük el a szokásos táblázatunkat. Ez most egy kicsit hosszabb lesz mint az eddigiek, hiszen a deriváltnak két zérushelye is van, és a függvény értelmezési tartományában is van szakadás. Egyelőre csak az első sort töltsük ki, és a szakadást jelöljük.

| $x$ | $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ | $-\frac{1}{\sqrt{e}}$ | $\left]-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0\right[$ | $0$ | $\left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | $\left]\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | X | | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | X | | | |

Határozzuk meg $f'$ előjelét az egyes intervallumokon.

$\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ : $f'(-1)=2\cdot(-1)\left(\ln\left((-1)^2\right)+1\right)=-2(0+1)=-2<0$

$\left]-\frac{1}{\sqrt{e}},0\right[$ : $f'\left(-\frac{1}{e}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{e}\right)\left(\ln\left(\left(-\frac{1}{e}\right)^2\right)+1\right)=-\frac{2}{e}(-2+1)=\frac{2}{e}>0$

$\left]0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ : $f'\left(\frac{1}{e}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{e}\right)\left(\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^2\right)+1\right)=\frac{2}{e}(-2+1)=-\frac{2}{e}<0$

$\left]\frac{1}{\sqrt{e}},\infty\right[$ : $f'(1)=2\cdot 1\left(\ln\left(1^2\right)+1\right)=2(0+1)=2>0$

Most töltsük ki a teljes táblázatot.

| $x$ | $\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ | $-\frac{1}{\sqrt{e}}$ | $\left]-\frac{1}{\sqrt{e}},0\right[$ | $0$ | $\left]0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | $\left]\frac{1}{\sqrt{e}},\infty\right[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | X | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | lok. min. | $\nearrow$ | X | $\searrow$ | lok. min. | $\nearrow$ |

A táblázatból látható, hogy a függvény csökken a $\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ és $\left]0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ intervallumokon, nő a $\left]-\frac{1}{\sqrt{e}},0\right[$ és $\left]\frac{1}{\sqrt{e}},\infty\right[$ intervallumokon. Két lokális minimuma van az $x=\pm\frac{1}{\sqrt{e}}$ helyeken.

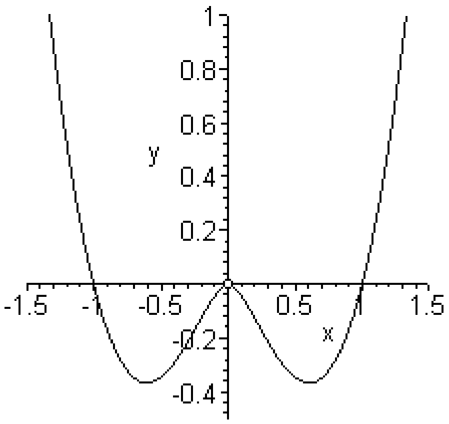
Határozzuk meg a lokális minimumok értékét is.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\ln\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\right)=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot(-1)=-\frac{1}{e}\approx-0.368$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\right)=\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot(-1)=-\frac{1}{e}\approx-0.368$$

A két minimum értéke megegyezik.

Az alábbi ábrán a függvény grafikonja látható. Az origóban az üres karika jelzi a függvény szakadását.




**4. feladat:** Valamely joghurt iránti keresletet az $f(x) = e^{-0.02x+10}$ függvény fejezi ki, melyben $x$ a joghurt egységára Ft-ban, $f(x)$ pedig a hozzá tartozó heti kereslet. Milyen egységár mellett lenne a heti árbevétel maximális? Mekkora heti kereslet tartozik ezen egységárhoz, s mekkora a maximális heti árbevétel?

**Megoldás:** Az árbevételt a kereslet és az egységár szorzataként kapjuk, azaz a $g(x) = x \cdot f(x) = x \cdot e^{-0.02x+10}$ függvény írja le. Ennek a függvénynek kell megkeressük a maximumát az $x > 0$ feltétel mellett. (Az árak sajnos pozitívak.)
Deriváljuk a függvényt.

$$g'(x) = e^{-0,02x+10} + x \cdot e^{-0,02x+10} \cdot (-0,02) = e^{-0.02x+10}(1-0,02x)$$

Oldjuk meg a $g'(x) = 0$ egyenletet. Mivel $g'(x)$ szorzat, valamelyik tényezőnek kell nullának lennie. Az első tényező azonban mindig pozitív, ezért csak a második lehet nulla.

$$1-0,02x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 50$$

Készítsük el a szokásos táblázatot, melyben megvizsgáljuk, hogy ez valóban szélsőérték-e.

| $x$ | $]0;50[$ | $x = 50$ | $]50;\infty[$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $g(x)$ | $\nearrow$ | lok. max. | $\searrow$ |

Mint a táblázatból látható az $x = 50$ valóban maximum hely, tehát a maximális árbevétel akkor érhető el, ha a joghurt egységára 50 Ft.

Az ehhez tartozó heti keresletet az $f(x)$ függvénybe történő helyettesítéssel kapjuk.

$$f(50) = e^{-0.02 \cdot 50+10} = e^{9} \approx 8103$$

Ilyen áron tehát 8103 darab joghurt adható el hetenként.

Ekkor a heti árbevétel $g(50) = 50 \cdot f(50) = 405150$ Ft lesz.

**5. feladat** Egy adott termék termelési költségét a termelt mennyiség függvényében az $f(x) = 2x^2 + 500000$ függvény adja meg, ahol $x$ a termelt mennyiség, $f(x)$ pedig ezen termékmennyiség előállításának a költsége. Határozzuk meg, hogy mekkora termelés esetén lesz az egy termékre jutó átlagköltség minimális?

**Megoldás:** Az átlagköltség a termelési költség és a termelt mennyiség hányadosa, s így a $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2 + 500000}{x} = 2x + \frac{500000}{x}$ függvény írja le a termelt mennyiség függvényében. Ennek a függvénynek keressük a minimumát az $x > 0$ feltétel mellett. (A termelt mennyiség pozitív.)

Deriváljuk a függvényt.

$$g'(x) = 2 - \frac{500000}{x^2}$$

Oldjuk meg a $g'(x) = 0$ egyenletet.

$$2 - \frac{500000}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 = 500000 \Rightarrow x = \pm 500$$

A negatív gyök a feltétel miatt kizárható, csak a másikkal foglalkozunk.

Készítsük el a monotonitási táblázatot.

| $x$ | | $x = 500$ | |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | - | 0 | + |
| $g(x)$ | $\searrow$ | lok. min. | $\nearrow$ |

A táblázatból látható, hogy az $x = 500$ valóban lokális minimumhely, azaz a minimális termelési átlagköltség 500 darabos szériával érhető el.

**Ellenőrző kérdések:**

**1. kérdés:** Hol nő az $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ függvény?

Válasz: A $]-\infty, -2[$ és $]2, \infty[$ intervallumokon.

**2. kérdés:** Hol van szélsőértéke az $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 2}$ függvénynek?

Válasz: Az $x = -\sqrt{2}$ és az $x = \sqrt{2}$ helyeken

**3. kérdés:** Hol és milyen szélsőértéke van az $f(x) = x \cdot e^x$ függvénynek?

Válasz: Az $x = -\frac{1}{2}$ helyen minimuma van.

**4. kérdés:** Hol csökken az $f(x) = x \ln(x^2)$ függvény?

Válasz: A $\left]-\frac{1}{e}, 0\right[$ és $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ intervallumokon.

**5. feladat:** Valamely termék iránti heti keresletet az $f(x) = e^{-0.1x+5}$ függvény fejezi ki, melyben $x$ a termék egységára Ft-ban. Milyen egységár mellett lenne a heti árbevétel maximális?

Válasz: 10