Differenciálszámítás

1. B Írja fel az $f(x) = x^2$ függvény az $a = 1$ és az x helyekhez tartozó különbségi hányadosát (differenciahányadosát)! $\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1\right]$

2. B Számolja ki az $f(x) = x^2$ függvény $a = -3$ helyhez tartozó differenciálhányadosát!
$$\left[D_f = R, \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to -3} \frac{x^2-(-3)^2}{x-(-3)} = \lim_{x\to -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -3}(x-3) = -6\right]$$

3. B Számolja ki az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény $a = 4$ helyhez tartozó differenciálhányadosát!
$$\left[D_f = [0,\infty[, \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}\right]$$

4. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

   (a) $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 14x - 4$
   $[f'(x) = 5\cdot 4x^3 + 3\cdot 3x^2 - 14 - 0 = 20x^3 + 9x^2 - 14]$

   (b) $f(x) = 3\cos x - 7\mathrm{e}^x + \sqrt[5]{x^3} + 6$
   $\left[f'(x) = 3\cdot(-\sin x) - 7\cdot \mathrm{e}^x + \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + 0 = -3\sin x - 7\mathrm{e}^x + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = -3\sin x - 7\mathrm{e}^x + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}\right]$

   (c) $f(x) = 4\cos x + 5^x - \dfrac{3}{x^4} + e^3$
   $[f'(x) = 4\cdot(-\sin x) + 5^x\cdot\ln 5 - 3\cdot(-4)x^{-5} + 0 = -4\cdot\sin x + 5^x\cdot\ln 5 + 12\cdot\frac{1}{x^5} =$
   $-4\sin x + 5^x\ln 5 + \frac{12}{x^5}]$

   (d) $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x}} + \log_4 x + 3x - \sqrt{\pi}$
   $\left[f'(x) = 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x\cdot\ln 4} + 3 - 0 = -\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x\ln 4} + 3 = -\frac{7}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x\ln 4} + 3\right]$

   (e) $f(x) = \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[5]{x^3}}}$
   $[f(x) = x^{\frac{3}{5}}$
   $f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}]$

   (f) $f(x) = 5e^x - 4^x - \ln x - \log_2 x + e^2 - \ln 3$
   $\left[f'(x) = 5e^x - 4^x\cdot\ln 4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x\cdot\ln 2} + 0 - 0 = 5e^x - 4^x\ln 4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x\ln 2}\right]$

5. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

   (a) B $f(x) = \dfrac{11}{x} - \dfrac{\sqrt{3}}{x^4} + \dfrac{7}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt[7]{x^4}}$
   $[f(x) = 11x^{-1} - \sqrt{3}x^{-4} + 7x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{4}{7}}$
   $f'(x) = 11\cdot(-1)x^{-2} - \sqrt{3}\cdot(-4)x^{-5} + 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} - 2\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)x^{-\frac{11}{7}} =$
   $-\frac{11}{x^2} + \frac{4\sqrt{3}}{x^5} - \frac{7}{2\sqrt{x^3}} + \frac{8}{7\sqrt[7]{x^{11}}}]$

(b) B $f(x) = x^2\sqrt{x} - \dfrac{4}{x^6} + \dfrac{8x^3}{\sqrt[4]{x^5}}$
$[f(x) = x^{\frac{5}{2}} - 4x^{-6} + 8x^{\frac{7}{4}}$
$f'(x) = \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 4 \cdot (-6)x^{-7} + 8 \cdot \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} = \frac{5\sqrt{x^3}}{2} + \frac{24}{x^7} + 14\sqrt[4]{x^3}]$

(c) B $f(x) = (3x^5 + 2x)(5x^3 - 7x^2)$
$[f(x) = 15x^8 - 21x^7 + 10x^4 - 14x^3$
$f'(x) = 120x^7 - 147x^6 + 40x^3 - 42x^2]$

(d) B $f(x) = (x^2 + \sqrt[5]{x^3})(\sqrt{x} - \frac{5}{x})$
$[f(x) = x^{\frac{5}{2}} - 5x + x^{\frac{11}{10}} - 5x^{-\frac{2}{5}}$
$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - 5 + \frac{11}{10}x^{\frac{1}{10}} - 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) x^{-\frac{7}{5}} = \frac{5\sqrt{x^3}}{2} - 5 + \frac{11\sqrt[10]{x}}{10} + \frac{2}{\sqrt[5]{x^7}}]$

(e) B $f(x) = \dfrac{3x^7 + 8x^9 - 2x^6 + 5}{x^2}$
$[f(x) = 3x^5 + 8x^7 - 2x^4 + 5x^{-2}$
$f'(x) = 15x^4 + 56x^6 - 8x^3 - 10x^{-3} = 56x^6 + 15x^4 - 8x^3 - \frac{10}{x^3}]$

(f) B $f(x) = \dfrac{x^4 + \sqrt[4]{x^5} - 3}{\sqrt{x}}$
$[f(x) = x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{3}{4}} - 3x^{-\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = \frac{7\sqrt{x^5}}{2} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x^3}}]$

(g) B $f(x) = \dfrac{\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}}}{x^2}$
$[f(x) = \frac{x^{\frac{21}{30}}}{x^2} = \frac{x^{\frac{7}{10}}}{x^2} = x^{-\frac{13}{10}}$
$f'(x) = -\frac{13}{10}x^{-\frac{23}{10}} = -\frac{13}{10\sqrt[10]{x^{23}}}]$

6. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

(a) $f(x) = \cos x \cdot 3^x$
$[f'(x) = -\sin x \cdot 3^x + \cos x \cdot 3^x \cdot \ln 3]$

(b) $f(x) = \log_2 x \cdot (3x^2 + 7)$
$\left[f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2} \cdot (3x^2 + 7) + \log_2 x \cdot 6x\right]$

(c) $f(x) = (2x^4 + 3x - 7) \cdot \mathrm{ctg}x$
$\left[f'(x) = (2 \cdot 4x^3 + 3) \cdot \mathrm{ctg}x + (2x^4 + 3x - 7) \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = (8x^3 + 3)\mathrm{ctg}x - \frac{(2x^4+3x-7)}{\sin^2 x}\right]$

(d) $f(x) = (3\sin x + \sqrt{x})(\log_5 x - \mathrm{tg}\ x)$
$\left[f'(x) = (3\cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}})(\log_5 x - \mathrm{tg}\ x) + (3\sin x + \sqrt{x})\left(\frac{1}{x \ln 5} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\right]$

(e) $f(x) = \dfrac{\sin x}{8^x}$
$\left[f'(x) = \frac{\cos x \cdot 8^x - \sin x \cdot 8^x \cdot \ln 8}{(8^x)^2} = \frac{\cos x \cdot 8^x - \sin x \cdot 8^x \cdot \ln 8}{8^{2x}}\right]$

(f) $f(x) = \dfrac{\sin x}{4e^x + 2x}$
$\left[f'(x) = \frac{\cos x \cdot (4e^x + 2x) - \sin x \cdot (4e^x + 2)}{(4e^x + 2x)^2}\right]$

(g) $f(x) = \ln(x^2+1)$
$\left[f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}\right]$

(h) $f(x) = \sqrt[4]{x^3+4x}$
$[f(x) = (x^3+4x)^{\frac{1}{4}}$
$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^3+4x)^{-\frac{3}{4}} \cdot (3x^2+4) = \frac{3x^2+4}{4\sqrt[4]{(x^3+4x)^3}}]$

(i) $f(x) = \sin(5x)$
$[f'(x) = \cos(5x) \cdot 5]$

(j) $f(x) = \sin x^5$
$\left[f'(x) = \cos x^5 \cdot 5x^4\right]$

(k) $f(x) = \sin^5 x$
$\left[f'(x) = 5(\sin x)^4 \cdot \cos x = 5\sin^4 x \cos x\right]$

(l) $f(x) = (4e^x+2x)^{10}$
$\left[f'(x) = 10(4e^x+2x)^9(4e^x+2)\right]$

7. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

(a) B $f(x) = x^3 \ln(5x+4)$
$\left[f(x) = x^3 \cdot \ln(5x+4), f'(x) = 3x^2 \cdot \ln(5x+4) + x^3 \cdot \frac{1}{5x+4} \cdot 5 = 3x^2 \ln(5x+4) + \frac{5x^3}{5x+4}\right]$

(b) B $f(x) = 3^{4x+2}x^2$
$\left[f(x) = 3^{4x+2} \cdot x^2, f'(x) = 3^{4x+2} \cdot \ln 3 \cdot 4 \cdot x^2 + 3^{4x+2} \cdot 2x = 4\ln 3 \cdot 3^{4x+2}x^2 + 2 \cdot 3^{4x+2}x\right]$

(c) B $f(x) = \sqrt{x}\sin(4x+4)$
$[f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(4x+4)$
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(4x+4) + \sqrt{x} \cdot \cos(4x+4) \cdot 4 = \frac{\sin(4x+4)}{2\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}\cos(4x+4)]$

(d) B $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{3-2x}$
$\left[f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot e^{3-2x}, f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot e^{3-2x} + \sqrt[3]{x} \cdot e^{3-2x} \cdot (-2) = \frac{e^{3-2x}}{3\sqrt[3]{x^2}} - 2\sqrt[3]{x}e^{3-2x}\right]$

(e) B $f(x) = \dfrac{7-3x}{x^2+5x}$
$\left[f'(x) = \frac{-3\cdot(x^2+5x)-(7-3x)(2x+5)}{(x^2+5x)^2} = \frac{3x^2-14x-35}{(x^2+5x)^2}\right]$

(f) B $f(x) = -\dfrac{2}{x^4+x}$
$\left[f'(x) = -\frac{0\cdot(x^4+x)-2\cdot(4x^3+1)}{(x^4+x)^2} = \frac{8x^3+2}{(x^4+x)^2}\right]$

(g) B $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x+3}}{\sin x}$
$\left[f'(x) = \frac{\frac{1}{4}\cdot(2x+3)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2\cdot\sin x - \sqrt[4]{2x+3}\cdot\cos x}{(\sin x)^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(2x+3)^{-\frac{3}{4}}\sin x - \sqrt[4]{2x+3}\cos x}{\sin^2 x}\right]$

(h) B $f(x) = 8^x\sqrt[3]{1-7x}$
$[f(x) = 8^x \cdot \sqrt[3]{1-7x}$
$f'(x) = 8^x \cdot \ln 8 \cdot \sqrt[3]{1-7x} + 8^x \cdot \frac{1}{3} \cdot (1-7x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-7) = \ln 8 \cdot 8^x\sqrt[3]{1-7x} - \frac{7\cdot 8^x}{3\sqrt[3]{(1-7x)^2}}]$

(i) B $f(x) = \sqrt[7]{6x^2+3x}\,\mathrm{ctg}(x)$
$\left[f(x) = \sqrt[7]{6x^2+3x} \cdot \mathrm{ctg}(x)\right.$
$f'(x) = \frac{1}{7} \cdot (6x^2+3x)^{-\frac{6}{7}} \cdot (12x+3) \cdot \mathrm{ctg}(x) + \sqrt[7]{6x^2+3x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) =$
$\left.= \frac{(12x+3)\mathrm{ctg}(x)}{7\sqrt[7]{(6x^2+3x)^6}} - \frac{\sqrt[7]{6x^2+3x}}{\sin^2 x}\right]$

(j) B $f(x) = \dfrac{\cos(2+3x)}{\sqrt[6]{x}}$
$\left[f'(x) = \frac{-\sin(2+3x)\cdot 3\cdot \sqrt[6]{x} - \cos(2+3x)\cdot \frac{1}{6}\cdot x^{-\frac{5}{6}}}{(\sqrt[6]{x})^2} = \frac{-3\sqrt[6]{x}\sin(2+3x) - \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}\cos(2+3x)}{\sqrt[3]{x}}\right]$

(k) B $f(x) = \dfrac{\sin(x^3+2)}{3^x}$
$\left[f'(x) = \frac{\cos(x^3+2)\cdot 3x^2\cdot 3^x - \sin(x^3+2)\cdot 3^x\cdot \ln 3}{3^{2x}}\right]$

(l) B $f(x) = \sin\left(x^4+2x^5\right)\cdot 7^x$
$\left[f'(x) = \cos\left(x^4+2x^5\right)\cdot(4x^3+10x^4)\cdot 7^x + \sin\left(x^4+2x^5\right)\cdot 7^x \cdot \ln 7\right]$

(m) B $f(x) = \dfrac{x^2+9x}{\mathrm{e}^{4x+3}}$
$\left[f'(x) = \frac{(2x+9)\cdot \mathrm{e}^{4x+3} - (x^2+9x)\cdot \mathrm{e}^{4x+3}\cdot 4}{(\mathrm{e}^{4x+3})^2} = \frac{(2x+9)\mathrm{e}^{4x+3} - 4(x^2+9x)\mathrm{e}^{4x+3}}{(\mathrm{e}^{4x+3})^2}\right]$

(n) B $f(x) = \dfrac{\sqrt[9]{3x^2+7}}{\cos x}$
$\left[f'(x) = \frac{\frac{1}{9}\cdot(3x^2+7)^{-\frac{8}{9}}\cdot 6x\cdot\cos x - \sqrt[9]{3x^2+7}\cdot(-\sin x)}{(\cos^x)^2} = \frac{\frac{1}{9}6x(3x^2+7)^{-\frac{8}{9}}\cos x + \sqrt[9]{3x^2+7}\sin x}{\cos^2 x}\right]$

(o) B $f(x) = \sqrt{3x-2} - e^{2-x}$
$\left[f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x-2}}\cdot 3 - e^{2-x}\cdot(-1) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} + e^{2-x}\right]$

(p) B $f(x) = \cos\left(6^x x^3\right)$
$\left[f(x) = \cos\left(6^x\cdot x^3\right), f'(x) = -\sin\left(6^x\cdot x^3\right)\cdot(6^x\cdot\ln 6\cdot x^3 + 6^x\cdot 3x^2)\right]$

(r) B $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{4x^2+1}}$
$\left[f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{4x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1\cdot(4x^2+1) - x\cdot 8x}{(4x^2+1)^2}\right]$

(s) B $f(x) = \mathrm{tg}\left(\dfrac{x-3}{5}\right)$
$\left[f(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{5}\cdot x - \frac{3}{5}\right),\quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x-3}{5}\right)}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5\cos^2\left(\frac{x-3}{5}\right)}\right]$

(t) B $f(x) = e^{\sqrt{x}\sin x}$
$\left[f'(x) = e^{\sqrt{x}\sin x}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x + \sqrt{x}\cdot\cos x\right) = e^{\sqrt{x}\sin x}\left(\frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\cos x\right)\right]$

(v) B $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$
$\left[f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{x-(x+1)}{x^2} = \frac{-1}{x(x+1)}\right]$

(w) B,V $f(x) = \cos^2(3x+\pi)$
$[f'(x) = 2\cdot\cos(3x+\pi)\cdot(-\sin(3x+\pi))\cdot 3 = 6\cos(3x+\pi)(-\sin(3x+\pi))]$

(x) B,V $f(x) = \sqrt[5]{\ln(4x^2+7)}$
$\left[f'(x) = \frac{1}{5}\cdot(\ln(4x^2+7))^{-\frac{4}{5}}\cdot\frac{1}{4x^2+7}\cdot 8x = \frac{8x}{5(4x^2+7)\sqrt[5]{\ln^4(4x^2+7)}}\right]$

(y) B,V $f(x) = \sin\left(\sqrt[3]{7-2x}\right)$
$\left[f'(x) = \cos\left(\sqrt[3]{7-2x}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot(7-2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-2) = -\frac{2\cos\left(\sqrt[3]{7-2x}\right)}{3\sqrt[3]{(7-2x)^2}}\right]$

(z) B,V $f(x) = 4^{\cos(8x^3-5x^2)}$
$[f'(x) = 4^{\cos(8x^3-5x^2)}\cdot\ln 4\cdot(-\sin(8x^3-5x^2))\cdot(24x^2-10x) =$
$-\ln 4\cdot 4^{\cos(8x^3-5x^2)}\sin(8x^3-5x^2)(24x^2-10x)]$

8. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

(a) V $f(x) = \sin(6x^4-4x^3+5)\lg x^5$
$[f(x) = \sin(6x^4-4x^3+5)\cdot\lg x^5$
$f'(x) = \cos(6x^4-4x^3+5)\cdot(24x^3-12x^2)\cdot\lg x^5 + \sin(6x^4-4x^3+5)\cdot\frac{1}{x^5\cdot\ln 10}\cdot 5x^4]$

(b) V $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{4-5x}}{e^{3x}}$
$\left[f'(x) = \frac{\frac{1}{3}\cdot(4-5x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-5)\cdot e^{3x} - \sqrt[3]{4-5x}\cdot e^{3x}\cdot 3}{(e^{3x})^2} = \frac{-\frac{5}{3}\cdot(4-5x)^{-\frac{2}{3}}e^{3x} - 3\sqrt[3]{4-5x}e^{3x}}{e^{6x}}\right]$

(c) V $f(x) = \sin\left(x^4+2x^5\right)\cdot 7^{3x+2}$
$\left[f'(x) = \cos\left(x^4+2x^5\right)\cdot(4x^3+10x^4)\cdot 7^{3x+2} + \sin\left(x^4+2x^5\right)\cdot 7^{3x+2}\cdot\ln 7\cdot 3\right]$

(d) V $f(x) = \dfrac{\cos(7x)}{e^{5x^2+6x}}$
$[f'(x) = \frac{-\sin(7x)\cdot 7\cdot e^{5x^2+6x} - \cos(7x)\cdot e^{5x^2+6x}\cdot(10x+6)}{(e^{5x^2+6x})^2} = \frac{-7\sin(7x)e^{5x^2+6x} - \cos(7x)e^{5x^2+6x}(10x+6)}{(e^{5x^2+6x})^2}]$

(e) V $f(x) = (2-8x)^5\cdot\mathrm{tg}(3x^2)$
$[f'(x) = 5\cdot(2-8x)^4\cdot(-8)\cdot\mathrm{tg}(3x^2) + (2-8x)^5\cdot\frac{1}{\cos^2(3x^2)}\cdot 6x =$
$= -40(2-8x)^4\mathrm{tg}(3x^2) + \frac{6x(2-8x)^5}{\cos^2(3x^2)}]$

(f) V $f(x) = \sin\left(\dfrac{\log_3 x}{x^2}\right)$
$\left[f'(x) = \cos\left(\frac{\log_3 x}{x^2}\right)\cdot\frac{\frac{1}{x\cdot\ln 3}\cdot x^2 - \log_3 x\cdot 2x}{x^4} = \cos\left(\frac{\log_3 x}{x^2}\right)\cdot\frac{\frac{x}{\ln 3} - 2x\log_3 x}{x^4}\right]$

(g) B,V $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{3x+3}\right)$
$\left[f'(x) = \cos\left(\frac{1}{3x+3}\right)\cdot\frac{0\cdot(3x+3) - 1\cdot 3}{(3x+3)^2} = -\frac{3\cos\left(\frac{1}{3x+3}\right)}{(3x+3)^2}\right]$

(h) B,V $f(x) = \cos\left(\sqrt{5x-2}\right)$
$\left[f'(x) = -\sin\left(\sqrt{5x-2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot(5x-2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 5 = -\frac{5\sin\left(\sqrt{5x-2}\right)}{2\sqrt{5x-2}}\right]$

(i) B,V $f(x) = \sqrt{\sin(3x-3)}$
$\left[f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (\sin(3x-3))^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(3x-3) \cdot 3 = \frac{3\cos(3x-3)}{2\sqrt{\sin(3x-3)}}\right]$

(j) B,V $f(x) = \sin^4(4-3x)$
$\left[f'(x) = 4 \cdot \sin^3(4-3x) \cdot \cos(4-3x) \cdot (-3) = -12\sin^3(4-3x)\cos(4-3x)\right]$

(k) B,V $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(4x+2)}$
$\left[f(x) = \sin^{-2}(4x+2), \quad f'(x) = -2 \cdot \sin^{-3}(4x+2) \cdot \cos(4x+2) \cdot 4 = -\frac{8\cos(4x+2)}{\sin^3(4x+2)}\right]$

(l) V $f(x) = \cos\left(\sqrt[4]{-3x+10}\right)$
$\left[f'(x) = -\sin\left(\sqrt[4]{-3x+10}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot (-3x+10)^{-\frac{3}{4}} \cdot (-3) = \frac{3\sin\left(\sqrt[4]{-3x+10}\right)}{4\sqrt[4]{(-3x+10)^3}}\right]$

(m) B,V $f(x) = \cos\left(\ln(5x+1)\right)$
$\left[f'(x) = -\sin\left(\ln(5x+1)\right) \cdot \frac{1}{5x+1} \cdot 5 = -\frac{5\sin(\ln(5x+1))}{5x+1}\right]$

(n) V $f(x) = \sqrt[3]{\ln(4x-5)}$
$\left[f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (\ln(4x-5))^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4x-5} \cdot 4 = \frac{4}{3(4x-5)\sqrt[3]{\ln^2(4x-5)}}\right]$

9. Adja meg az alábbi függvények x_0 helyen vett érintőinek az egyenletét!

(a) B $f(x) = e^{6-5x}, \; x_0 = \dfrac{6}{5}, D_f = R$ $[y = -5x + 7]$

(b) B $f(x) = \ln(3x-1), \; x_0 = \dfrac{2}{3}, D_f = \left]\dfrac{1}{3}; \infty\right[$ $[y = 3x - 2]$

(c) B $f(x) = \dfrac{3}{x^2}, \; x_0 = -2, D_f = R \setminus \{0\}$ $\left[y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}\right]$

(d) B $f(x) = \sqrt{7-x} + 4, \; x_0 = 3, D_f =]-\infty; 7]$ $\left[y = -\frac{1}{4}x + \frac{27}{4}\right]$

(f) B $f(x) = \dfrac{4}{x} + 5, \; x_0 = -3, D_f = R \setminus \{0\}$ $\left[y = -\frac{4}{9}x + \frac{7}{3}\right]$

(g) B $f(x) = (-2+3x)^3 - 5, \; x_0 = 1, D_f = R$ $[y = 9x - 13]$

(i) B $f(x) = \ln(x^2-3), \; x_0 = 2, D_f =]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; \infty[$ $[y = 4x - 8]$

(j) B $f(x) = \sqrt{x^2+15x}, \; x_0 = 1, D_f =]-\infty; -15[\cup]0; \infty[$ $\left[y = \frac{17}{8}x + \frac{15}{8}\right]$

(j) B $f(x) = \dfrac{2-3x}{x+1}, \; x_0 = 1, D_f = R \setminus \{-1\}$ $\left[y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}\right]$

10. Írja fel a következő hozzárendeléssel adott függvények x_0 pontjához tartozó érintőinek az egyenletét!

(a) V $f(x) = \dfrac{\sin x - 3}{\sqrt{x+1}}, \; x_0 = 0, D_f =]-1; \infty[$ $\left[y = \frac{5}{2}x - 3\right]$

(b) V $f(x) = xe^{x-1} + 4, \; x_0 = 0, D_f = R$ $\left[y = \frac{1}{e}x + 4\right]$

(c) V $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+3}}{x}$, $x_0 = 2, D_f = [-1; \infty[\setminus\{0\}$ $[y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}]$

(d) V $f(x) = (2x-1)\sin(3x) + 5,\ x_0 = 0, D_f = R$ $[y = -3x + 5]$

11. V Hol metszi az $f(x) = x^2 - 8x + 19$ függvény $x_0 = 5$ -beli érintője az x és az y tengelyeket?
[az érintő egyenlete: $y = 2x - 6$, az x tengelyt metszi:3, az y tengelyt metszi:-6]

12. V Hol metszi az $f(x) = \sqrt{x+3}$ függvény $x_0 = -2$ -beli érintője az x és az y tengelyeket?
[az érintő egyenlete: $y = \frac{1}{2}x + 2$, az x tengelyt metszi:-4, az y tengelyt metszi:2]

13. V Hol metszi az $f(x) = -2x - \frac{1}{3x}$ függvény $x_0 = 1$ -beli érintője az x és az y tengelyeket?
[az érintő egyenlete: $y = -\frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$, az x tengelyt metszi:$-\frac{2}{5}$, az y tengelyt metszi:$-\frac{2}{3}$]

14. V Hol metszi az $f(x) = \frac{1}{3-2x}$ függvény $x_0 = 3$ -beli érintője az x és az y tengelyeket ?
[az érintő egyenlete: $y = \frac{2}{9}x - 1$, az x tengelyt metszi:$\frac{9}{2}$, az y tengelyt metszi:-1]

15. V Írja fel az $f(x) = \sqrt{2-3x} - 2$ függvény $y = -\frac{3}{4}x - 1$ egyenessel párhuzamos érintőjének az egyenletét!
$[y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}]$

16. V Írja fel az $f(x) = \mathrm{e}^{2x+2} - 4$ függvény $y = -\frac{x}{2} - 3$ egyenesre merőleges érintőjének az egyenletét!
$[y = 2x - 1]$

17. V Írja fel az $f(x) = \ln(2-x) - 2$ függvény $y = x - 1$ egyenesre merőleges érintőjének az egyenletét!
$[y = -x - 1]$

18. V Írja fel az $f(x) = 3x + 5\ln x$ függvény $4x - y = 3$ egyenessel párhuzamos érintőjének az egyenletét!
$[y = 4(x-5) + 15 + 5\ln 5]$

19. V Határozza meg az $f(x) = \ln(x^2+6)$ függvény $5y - 2x = 10$ egyenessel párhuzamos érintőjének az egyenletét!
[Ha $x_0 = 2$, akkor az érintő egyenlete:$y = \frac{2}{5}(x-2) + \ln 10$
Ha $x_0 = 3$, akkor az érintő egyenlete:$y = \frac{2}{5}(x-3) + \ln 15$]

20. V Írja fel az $f(x) = \dfrac{2x-1}{2-x}$ függvény $y = 3x$ egyenessel párhuzamos érintőjének az egyenletét!
[Ha $x_0 = 1$, akkor az érintő egyenlete:$y = 3x - 2$
Ha $x_0 = 3$, akkor az érintő egyenlete:$y = 3x - 14$]

21. V Írja fel az $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ függvény $m = 9$ meredekségű érintőjének az egyenletét!
[Ha $x_0 = 3$, akkor az érintő egyenlete:$y = 9(x-3) + 1 = 9x - 26$
Ha $x_0 = -1$, akkor az érintő egyenlete:$y = 9(x+1) - 3 = 9x + 6$]

22. V Írja fel az $f(x) = \dfrac{2x+4}{(x-6)^2} + 7x$ függvény $m = 7$ meredekségű érintőjének az egyenletét!
$[y = 7(x+10) - \frac{1121}{16} = 7x - \frac{1}{16}]$

23. B Legyen $h(x) = (x^2 - 2x)^{12}$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?
$[D_f = R, x = 0, x = 1, x = 2]$

24. B Legyen $h(x) = (2x^3 + 3x^2)^3$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?
$\left[D_f = R, x = -\frac{3}{2}, x = -1, x = 0\right]$

25. V Legyen $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?
$[D_f = R, x = -1, x = 1]$

26. V Legyen $h(x) = \ln^2(x^2 - 1)$. Milyen x-re lesz $h'(x) = 0$?
$\left[D_f =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}\right]$

27. Adott a függvény első deriváltjának képlete. Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az függvénynek?

(a) B $f'(x) = x(2 - x)^5(x + 3)^2, \quad D_f = R$

Megoldás

$f'(x)$ zérushelyei: $-3; 0; 2$

D_f	$]-\infty; -3[$	$x = -3$	$]-3; 0[$	$x = 0$	$]0; 2[$	$x = 2$	$]2; \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	csökken$\searrow$	X	csökken $\searrow$	lok.min.	nő$\nearrow$	lok.max.	csökken$\searrow$

(b) B $f'(x) = \dfrac{(2x + 8)^5}{(3 - x)^8}, \quad D_f = R \setminus \{3\}$

Megoldás

$f'(x)$ zérushelyei: -4

D_f	$]-\infty; -4[$	$x = -4$	$]-4; 3[$	$x = 3$	$]3; \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	nincs ért.	$+$
$f(x)$	csökken$\searrow$	lok.min.	nő$\nearrow$	nincs ért.	nő$\nearrow$

(c) B $f'(x) = \dfrac{(x - 5)^2(3x - 6)^3}{x - 1}, \quad D_f =]1; \infty[$

Megoldás

$f'(x)$ zérushelyei: $2; 5$

D_f	$]1; 2[$	$x = 2$	$]2; 5[$	$x = 5$	$]5; \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$	X	nő $\nearrow$

(d) B $f'(x) = \dfrac{(x - 3)^3(x + 1)^4}{x^2} \cdot e^{2x+3}, \quad D_f = R \setminus \{0\}$

Megoldás

$f'(x)$ zérushelyei: $-1; 3$

D_f	$]-\infty;-1[$	$x=-1$	$]-1;0[$	$x=0$	$]0;3[$	$x=3$	$]3;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	X	csökken $\searrow$	nincs ért.	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

(e) B $f'(x) = (x-2)^2 \ln x, \quad D_f =]0;\infty[$

Megoldás

$f'(x)$ zérushelyei:$1; 2$

D_f	$]0;1[$	$x=1$	$]1;2[$	$x=2$	$]2;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$	X	nő $\nearrow$

28. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken, hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x) = 2x^4 - 8x^3$ függvénynek?

Megoldás

$D_f = R$
$f'(x) = 8x^3 - 24x^2 = 8x^2(x-3)$
$f'(x)$ zérushelyei: $0; 3$

D_f	$]-\infty;0[$	$x=0$	$]0;3[$	$x=3$	$]3;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	X	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

$f(3) = -54$

29. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken, hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x) = (7x - x^2)^5$ függvénynek?

Megoldás

$D_f = R$
$f'(x) = 5(7x - x^2)^4(7-2x)$
$f'(x)$ zérushelyei: $0; \frac{7}{2}; 7$

D_f	$]-\infty;0[$	$x=0$	$]0;\frac{7}{2}[$	$x=\frac{7}{2}$	$]\frac{7}{2};7[$	$x=7$	$]7;\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	nő $\nearrow$	X	nő $\nearrow$	lok.max.	csökken $\searrow$	X	csökken $\searrow$

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{282\,475\,249}{1\,024}$$

30. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken, hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x) = x + \dfrac{16}{x}$ függvénynek?

Megoldás
$D_f = R \setminus \{0\}$
$f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2}$
$f'(x)$ zérushelyei: $-4; 4$

D_f	$]-\infty;-4[$	$x=-4$	$]-4;0[$	$x=0$	$]0;4[$	$x=4$	$]4;\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	nő $\nearrow$	lok. max.	csökken $\searrow$	nincs ért.	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

$f(-4) = -8$
$f(4) = 8$

31. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken, hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ függvénynek?

Megoldás
$D_f = R \setminus \{-2; 2\}$
$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-4)^2}$
$f'(x)$ zérushelyei: 0

D_f	$]-\infty;-2[$	$x=-2$	$]-2;0[$	$x=0$	$]0;2[$	$x=2$	$]2;\infty[$
$f'(x)$	$+$	nincs ért.	$+$	0	$-$	nincs ért.	$-$
$f(x)$	nő $\nearrow$	nincs ért.	nő $\nearrow$	lok.max	csökken $\searrow$	nincs ért.	csökken $\searrow$

$f(0) = -\frac{1}{4}$

32. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken, hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ függvénynek?

Megoldás
$D_f = R \setminus \{0\}$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{-x-2}{x^3}$
$f'(x)$ zérushelyei: -2

D_f	$]-\infty;-2[$	$x=-2$	$]-2;0[$	$x=0$	$]0;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	nincs ért.	$-$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok. min	nő $\nearrow$	nincs ért.	csökken $\searrow$

$f(-2) = -\frac{1}{4}$

33. V Adja meg az $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-3x}$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van a függvénynek?

Megoldás
$D_f = R$
$f'(x) = \mathrm{e}^{-3x}(4-3x)$
$f'(x)$ zérushelyei: $\frac{4}{3}$

D_f	$]-\infty;\frac{4}{3}[$	$x=\frac{4}{3}$	$]\frac{4}{3};\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	nő↗	lok.max	csökken↘

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3\mathrm{e}^4}$$

34. V Adja meg az $f(x) = \dfrac{x+11}{(x-5)^2}$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van a függvénynek?

Megoldás
$D_f = R \setminus \{5\}$
$$f'(x) = \frac{1\cdot(x-5)^2 - (x+11)\cdot 2\cdot(x-5)\cdot 1}{(x-5)^4} = \frac{(x-5)^2 - 2(x+11)(x-5)}{(x-5)^4} =$$
$$= \frac{(x-5)\left[(x-5) - 2(x-11)\right]}{(x-5)^4} = \frac{(x-5) - 2(x-11)}{(x-5)^3} = \frac{-x-27}{(x-5)^3}$$
$f'(x)$ zérushelyei: -27

D_f	$]-\infty;-27[$	$x=-27$	$]-27;5[$	$x=5$	$]5;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	nincs ért.	$-$
$f(x)$	csökken↘	lok. min.	nő↗	nincs ért.	csökken↘

$$f(-27) = -\frac{1}{64}$$

35. V Adja meg az $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{3-x}$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van a függvénynek?

Megoldás
$D_f = R \setminus \{3\}$
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(4-x)}{(3-x)^2}$$
$f'(x)$ zérushelyei: 4

D_f	$]-\infty;3[$	$x=3$	$]3;4[$	$x=4$	$]4;\infty[$
$f'(x)$	$+$	nincs ért.	$+$	0	$-$
$f(x)$	nő↗	nincs ért.	nő↗	lok. max.	csökken↘

$f\,(4) = -\mathrm{e}^4$

36. V Adja meg az $f(x) = \ln(-5x^2 - 6x + 8)$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van a függvénynek?

Megoldás
$D_f =]-2; \frac{4}{5}[$
$f'(x) = \frac{1}{-5x^2-6x+8} \cdot (-10x - 6) = \frac{-10x-6}{-5x^2-6x+8}$
$f'(x)$ zérushelyei:$-\frac{3}{5}$

D_f	$]-2; -\frac{3}{5}[$	$x = -\frac{3}{5}$	$]-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	nő$\nearrow$	lok.max	csökken$\searrow$

$f\left(-\frac{3}{5}\right) = \ln\left(\frac{49}{5}\right)$

37. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken, hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x) = 4xe^{-x^2}$ függvénynek?

Megoldás
$D_f = R$
$f'(x) = 4e^{-x^2} + 4xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(4 - 8x^2)$
$f'(x)$ zérushelyei: $\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

D_f	$]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}[$	$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$]-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}[$	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$]\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$	lok.max.	csökken $\searrow$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = -1,72$
$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = 1,72$

38. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken, hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{(x-1)^2}$ függvénynek?

Megoldás
$D_f = R\backslash\{1\}$
$f'(x) = \frac{-2x(x-1)^2-(2-x^2)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2x(x-1)-(2-x^2)2}{(x-1)^3} = \frac{2x-4}{(x-1)^3}$
$f'(x)$ zérushelyei:2

D_f	$]-\infty; 1[$	$x = 1$	$]1; 2[$	$x = 2$	$]2; \infty[$
$f'(x)$	$+$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	nő $\nearrow$	nincs ért.	csöken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

$f(2) = -2$

39. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken, hol és milyen jellegű szélsőértéke van az $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ függvénynek?

Megoldás
$D_f = R$
$f'(x) = \frac{6(x^2+1)-6x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6-6x^2}{(x^2+1)^2}$
$f'(x)$ zérushelyei:$-1; 1$

D_f	$]-\infty;-1[$	$x=-1$	$]-1;1[$	x=1	$]1;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$	lok.max.	csökken $\searrow$

$f(-1) = -3; f(1) = 3$

40. V Adja meg az $f(x) = \ln(x^2+1)^2$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az függvénynek?

Megoldás
$D_f = R$
$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2(x^2+1)\cdot 2x = \frac{4x}{(x^2+1)}$
$f'(x)$ zérushelyei:0

D_f	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

$f(0) = 0$

41. V Adja meg az $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van a függvénynek?

Megoldás
$D_f = R \setminus \{0\}$
$f'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} + x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$
$f'(x)$ zérushelyei:$\frac{1}{2}$

D_f	$]-\infty;0[$	$x=0$	$]0;\frac{1}{2}[$	$x=\frac{1}{2}$	$]\frac{1}{2};\infty[$
$f'(x)$	$-$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	nincs ért.	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^2$

42. V Adja meg az $f(x) = x\ln x$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az függvénynek?

Megoldás
$D_f =]0;\infty[$
$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$
$f'(x)$ zérushelyei: $\frac{1}{e}$

D_f	$]0;\frac{1}{e}[$	$x=\frac{1}{e}$	$]\frac{1}{e};\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

43. V Adja meg az $f(x) = x^2\ln(x^2)$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg a függvényt monotonitás szempontjából! Hol és milyen jellegű szélsőértéke van az függvénynek?

Megoldás
$D_f = R \setminus \{0\}$
$f'(x) = 2x \cdot \ln(x^2) + x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = 2x\left(\ln(x^2)+1\right)$
$f'(x)$ zérushelyei: $-\frac{1}{\sqrt{e}}; \frac{1}{\sqrt{e}}$

D_f	$]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{e}}[$	$x=-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$]-\frac{1}{\sqrt{e}};0[$	$x=0$	$]0,\frac{1}{\sqrt{e}}[$	$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$	$]\frac{1}{\sqrt{e}};\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$	nincs ért.	csökken $\searrow$	lok.min.	nő $\nearrow$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{e}$ $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{e}$

44. V Mekkorának kell választani egy 20cm kerületű téglalap oldalait, hogy területe maximális legyen? Mekkora ez a maximális terület?
[a téglalap oldalai:5cm;5cm. A terület maximumának értéke tehát $25cm^2$.]

45. V Két pozitív szám összege 1. A szorzatuk maximumát keressük.
[$\frac{1}{4}$]

46. V Egy termék iránti keresletet a t egységár függvényében $K(t) = \frac{t}{t^2+4}$ függvény írja le. Vizsgáljuk meg, hogy milyen egységár mellett lesz a termék iránti kereslet a legnagyobb?
[A feladat szövegéből következik, hogy a termék utáni keresletet megadó függvény értelmezési tartománya csak a pozitív valós számok halmaza lehet.t=2]

47. V Két pozitív szám szorzata 100. Melyik ez a két szám, ha összegük minimális? Mekkora a minimális összeg?
[poitív számok:10;10. Minimális összeg 20.]

48. V Adott egy 3 és 4 egység befogójú derékszögű háromszög. Tekintsük azokat a háromszögbe írható téglalapokat, amelyeknek egyik csúcsa a háromszög derékszöge, az ezzel szemközti csúcs pedig az átfogóra esik. A legnagyobb területű ilyen téglalapnak mekkorák az oldalai?
[a téglalap oldalai:2, $\frac{3}{2}$. A maximális terület 3 területegység.]

49. V Egy tó egyenes partján szeretnénk elkeríteni egy téglalap alakú telket. Ehhez 200 m drótfonat áll rendelkezésünkre. A legnagyobb területű téglalapot szeretnénk elkeríteni úgy, hogy a tó felőli oldalon nem lesz kerítés. Mekkorának kell választani az oldalait, hogy területe maximális legyen?
[A partra merőleges oldal 50 m, a parttal párhuzamos oldal 100 m.]

50. V Valamely joghurt iránti keresletet az $f(x) = e^{-0{,}02x+10}$ függvény fejezi ki, melyben x a joghurt egységára Ft-ban, $f(x)$ pedig a hozzá tartozó heti kereslet. Milyen egységár mellett lenne a heti árbevétel maximális? Mekkora heti kereslet tartozik ezen egységárhoz, s mekkora a maximális heti árbevétel?
[maximális árbevétel akkor érhető el, ha a joghurt egységára 50 Ft;$f(50) = 8103$;ilyen áron tehát 8103 darab joghurt adható el hetenként]

51. V Egy adott termék termelési költségét a termelt mennyiség függvényében az $f(x) = 2x^2 + 500000$ függvény adja meg, ahol x a termelt mennyiség, $f(x)$ pedig ezen termékmennyiség előállításának a költsége. Határozzuk meg, hogy mekkora termelés esetén lesz az egy termékre jutó átlagköltség minimális?
[Az átlagköltség a termelési költség és a termelt mennyiség hányadosa:$\frac{f(x)}{x} = 2x + \frac{500000}{x}$; $x = 500$ a lokális minimumhely, azaz a minimális termelési átlagköltség 500 darabos szériával érhető el]