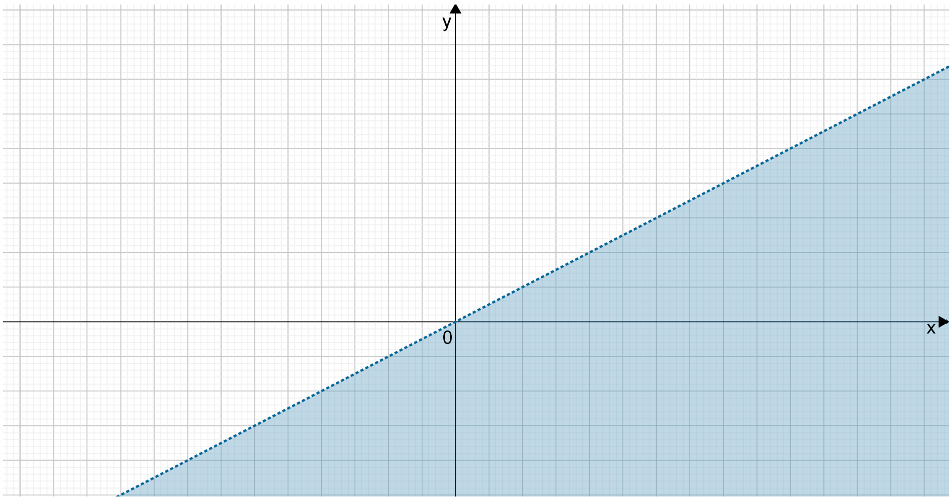
Többváltozós függvények, parciális deriválás

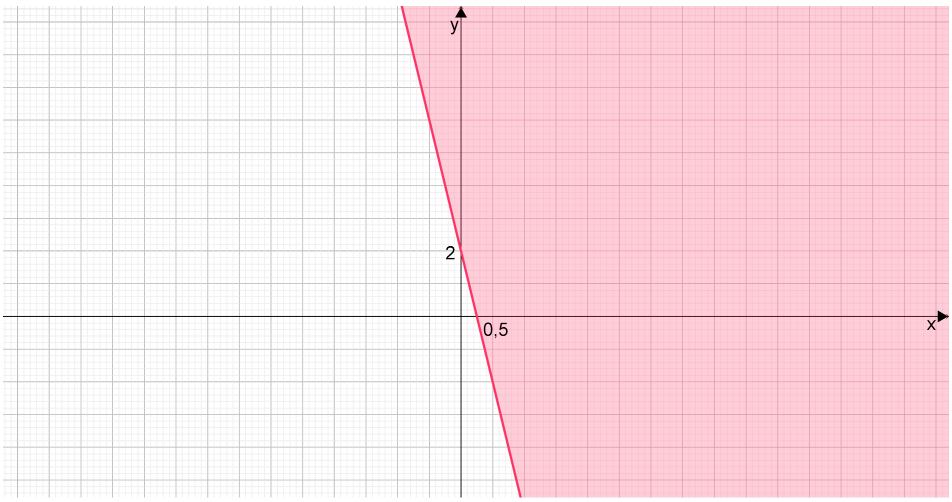
1. B Tekintsük a következő kétváltozós függvényt: $f(x,y) = x^2y - x + 2y$. Számítsa ki az $f(1,2), f(2,1), f(3,3)$ helyettesítési értékeket!
   Megoldás: $f(1,2) = 5, f(2,1) = 4, f(3,3) = 30$

2. B Tekintsük a következő kétváltozós függvényt: $f(x,y) = x \ln y$. Számítsa ki az $f(-1,1), f(1,-1)$ helyettesítési értékeket!
   Megoldás: $f(-1,1) = 0$, a függvény a $(1,-1)$ pontban nincs értelmezve

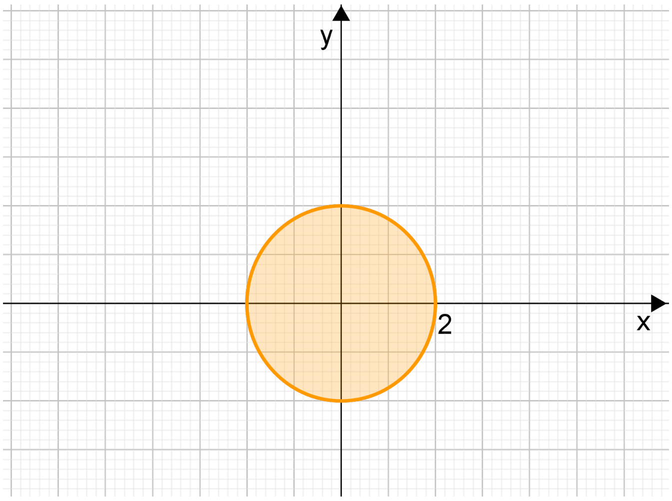
3. B Határozza meg az $f(x,y) = \ln(x - 2y)$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
   Megoldás: $x - 2y > 0$



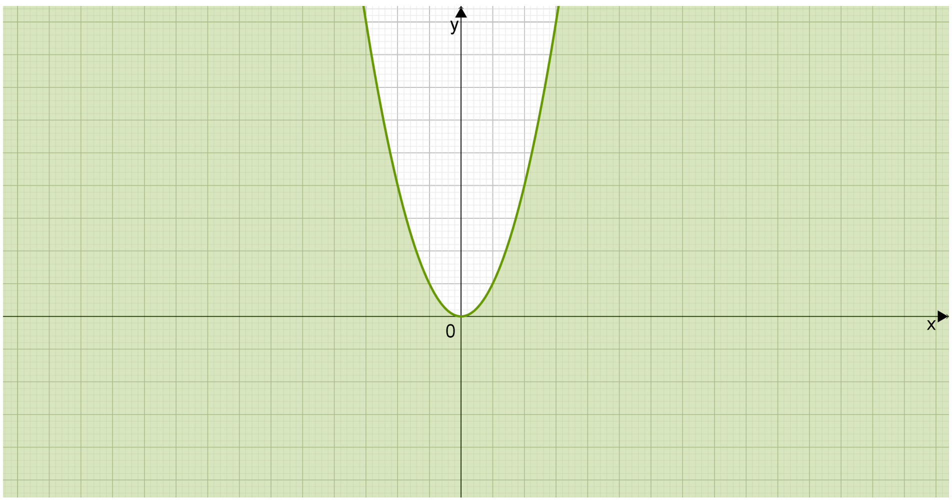
4. B Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt{4x + y - 2}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
   Megoldás: $4x + y - 2 \geq 0$



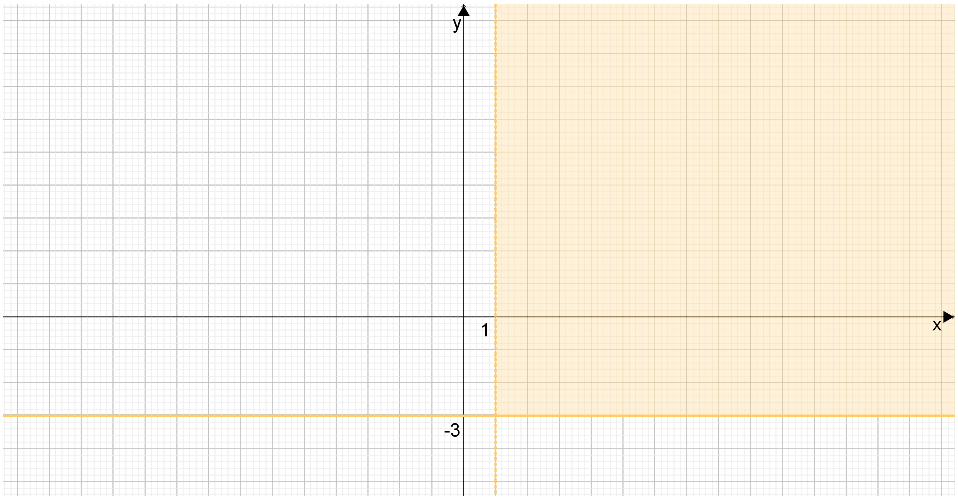
5. B Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $4 - x^2 - y^2 \geq 0$



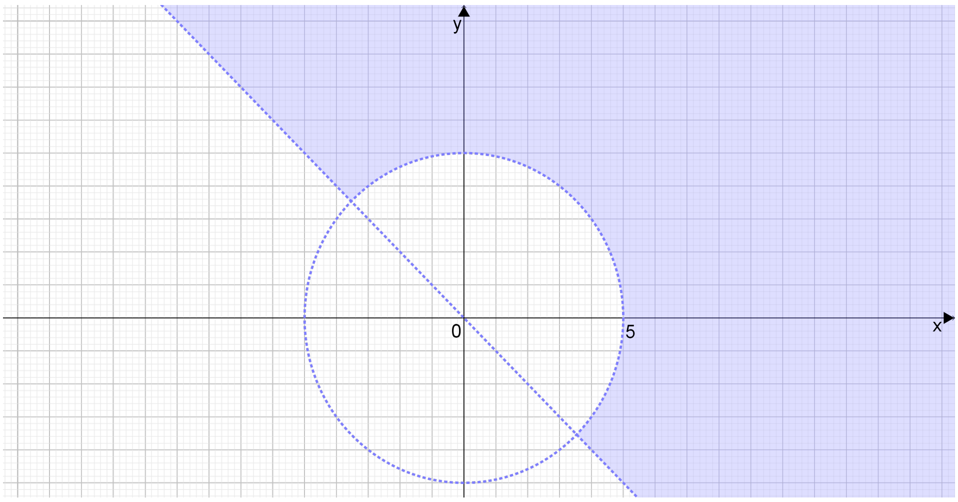
6. B Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x^2 - y \geq 0$



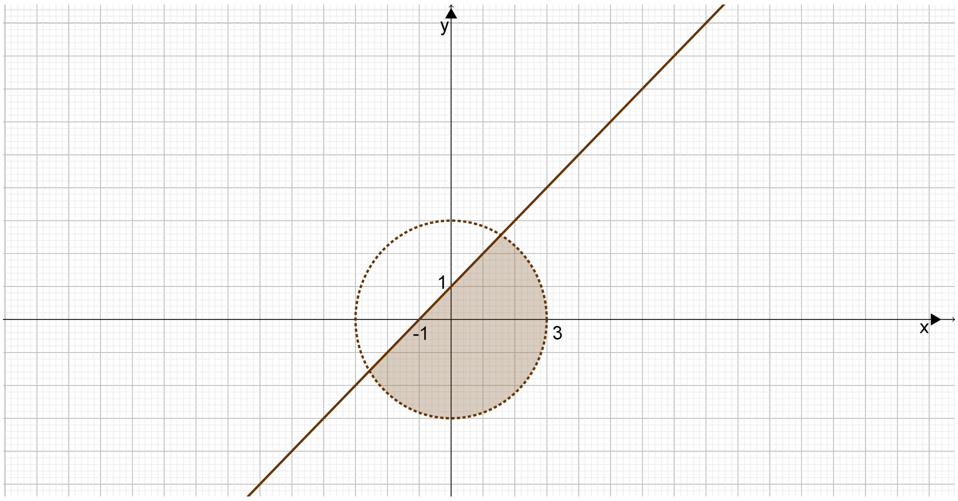
7. B,V Határozza meg az $f(x,y) = e^{\sqrt{y+3}} + \ln(x-1)$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $y + 3 \geq 0, x - 1 > 0$



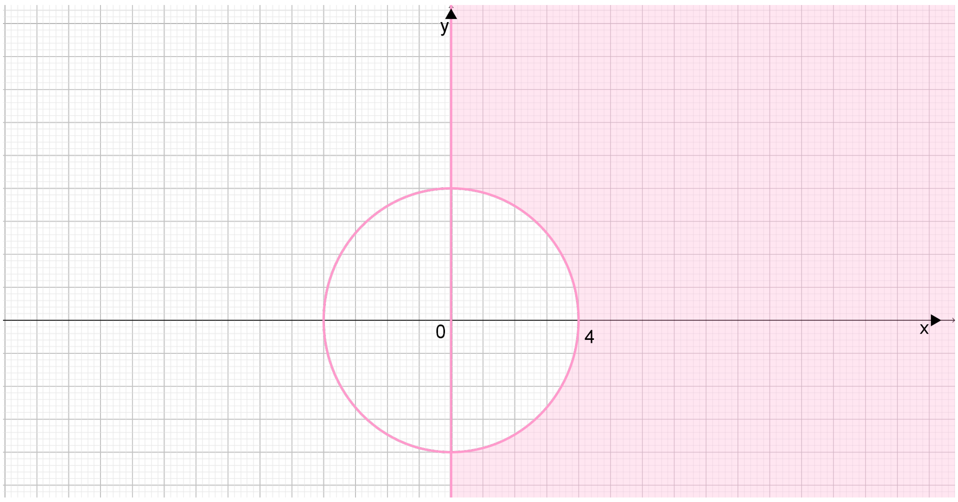
8. B,V Határozza meg az $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2-25)}{\sqrt{x+y}}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x^2+y^2-25>0, x+y>0$



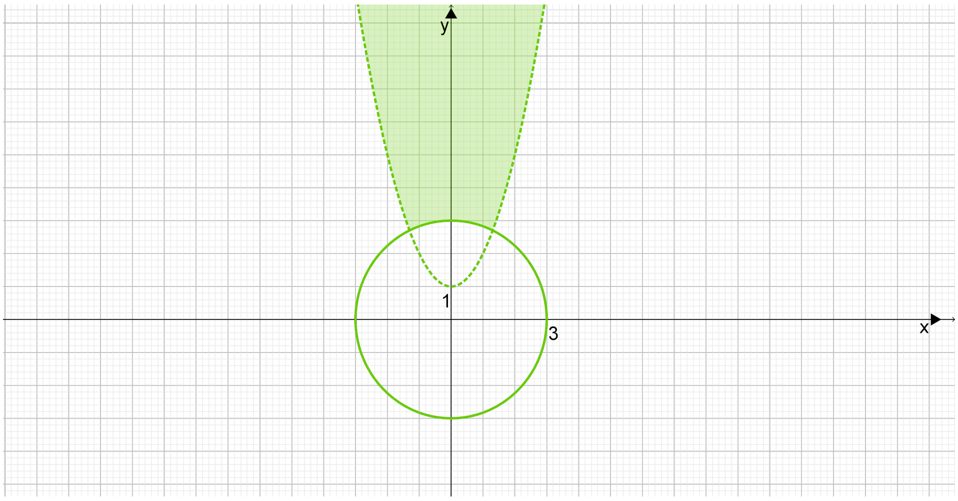
9. B,V Határozza meg az $f(x,y) = \lg(9-x^2-y^2)+\sqrt{x+1-y}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $9-x^2-y^2>0, x+1-y\geq 0$



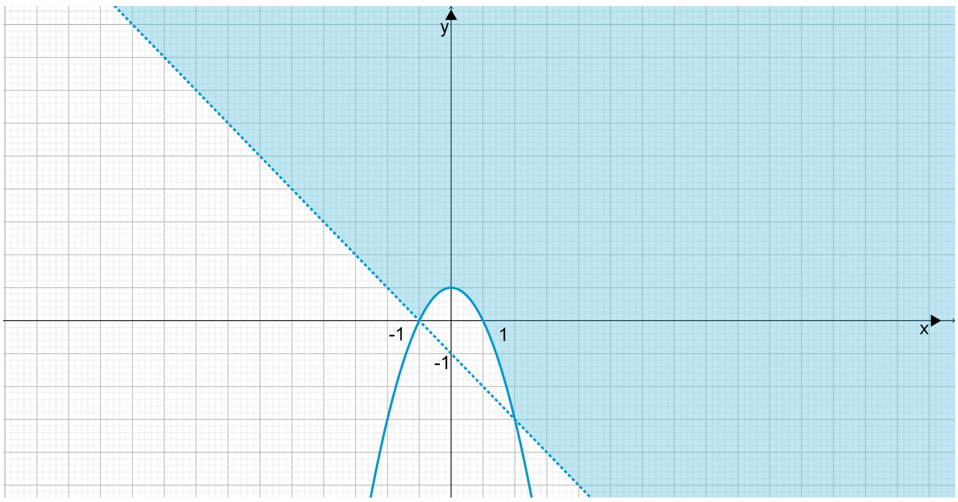
10. B,V Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-16} + \sqrt{2x}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x^2+y^2-16 \geq 0, 2x \geq 0$



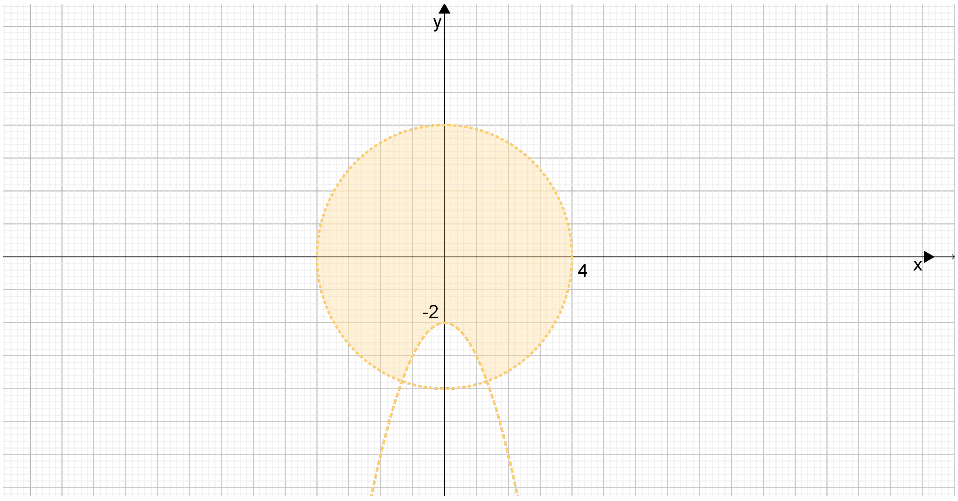
11. V Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2-9} - \ln(y-x^2-1)$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x^2+y^2-9 \geq 0, y-x^2-1 > 0$



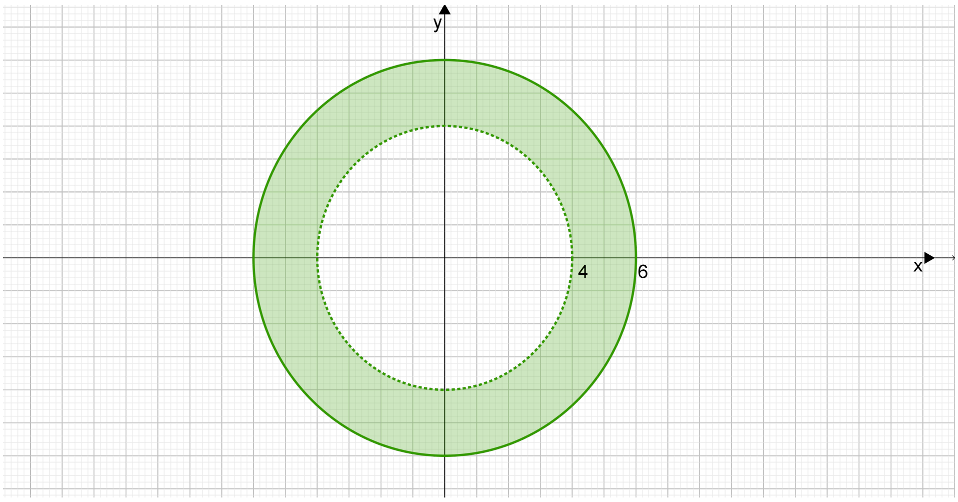
12. V Határozza meg az $f(x, y) = \ln(x + y + 1) + \sqrt{x^2 + y - 1}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x + y + 1 > 0, x^2 + y - 1 \geq 0$



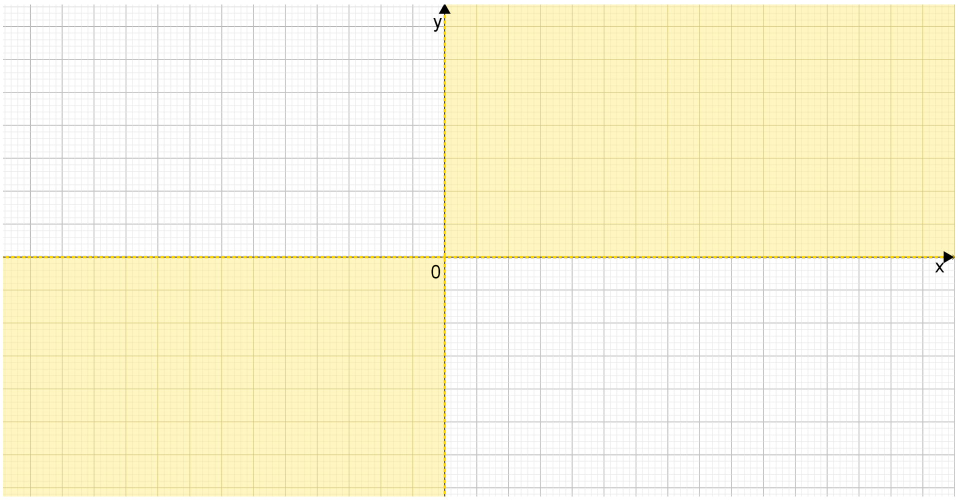
13. V Határozza meg az $f(x, y) = \dfrac{\ln(y + x^2 + 2)}{\sqrt{-x^2 - y^2 + 16}}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $y + x^2 + 2 > 0, -x^2 - y^2 + 16 > 0$



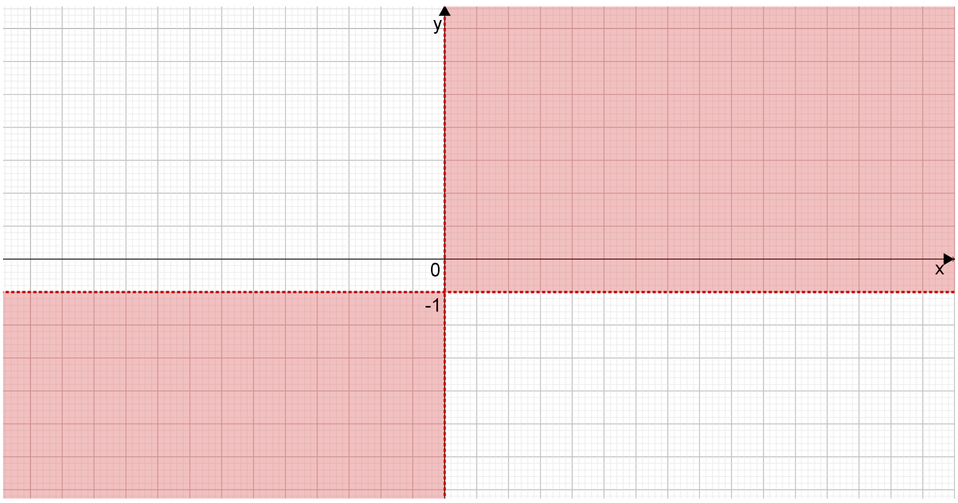
14. V Határozza meg az $f(x,y) = \dfrac{7}{\sqrt{x^2+y^2-16}} + \sqrt{36-x^2-y^2}$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $x^2+y^2-16>0, 36-x^2-y^2 \geq 0$



15. V Határozza meg az $f(x,y) = \log_2\left(\dfrac{x}{y}\right)$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $\frac{x}{y} > 0$



16. V Határozza meg az $f(x,y) = \ln(xy + x)$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát!
Megoldás: $xy + x > 0, azaz x(y+1) > 0$



17. B Határozza meg az $f(x,y) = x^2 \sin y$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = 2x \cdot \sin y$; $f_y(x,y) = x^2 \cdot \cos y$

18. B Határozza meg az $f(x,y) = x^2y - xy^3$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = 2x \cdot y - 1 \cdot y^3 = 2xy - y^3$; $f_y(x,y) = x^2 \cdot 1 - x \cdot y^3 = x^2 - 3xy^2$

19. B Vegyük az alábbi kétváltozós függvényt:

$$f : R^2 \to R, f(x,y) = x^2y - xy^3 + x$$

Számítsa ki $f_x\,(1,2)$ és $f_y\,(1,2)$ értékeit! Majd képezze az összes másodrendű parciális deriváltat!
Megoldás:

$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^3 + 1$, $f_x(1,2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2^3 + 1 = -3$
$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3xy^2 + 0$, $f_y(1,2) = 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2^2 = -11$
$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$, $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x - 3y^2$, $f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x - 3y^2$, $f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6xy$

20. B Vegyük az alábbi kétváltozós függvényt:

$$f : R^2 \to R, f(x,y) = 3x^3y^2 - 4xy^3 + x + 1$$

Számítsa ki $f_x(1,-1)$ és $f_y(1,-1)$ értékeit! Majd képezze az összes másodrendű parciális deriváltat!
Megoldás:
$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2y^2 - 4y^3 + 1$, $f_x(1,-1) = 14$
$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y - 12xy^2$, $f_y(1,-1) = -18$
$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18xy^2$, $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 18x^2y - 12y^2$, $f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 18x^2y - 12y^2$,
$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^3 - 24xy$

21. B Vegyük az alábbi kétváltozós függvényt:

$$f : R^2 \to R, f(x,y) = x^4y^3 - xy^2 + y$$

Számítsa ki $f_x(-1,3)$ és $f_y(1,-1)$ értékeit! Majd képezze az összes másodrendű parciális deriváltat!
Megoldás:
$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^3 - y^2$, $f_x(-1,3) = -117$
$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^4y^2 - 2xy + 1$,$f_y(1,-1) = 6$
$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2y^3$, $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x^3y^2 - 2y$, $f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 12x^3y^2 - 2y$,
$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^4y - 2x$

22. B Vegyük az alábbi kétváltozós függvényt:

$$f : R^2 \to R, f(x,y) = \frac{4}{x} + x^2y + \frac{y^2}{4}$$

Határozza meg a függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{4}{x^2} + 2xy$; $f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{1}{2}y$
$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{8}{x^3} + 2y$; $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$; $f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$; $f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}$

23. B Határozza meg az $f(x,y) = x^2\mathrm{e}^{2y}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = \mathrm{e}^{2y} \cdot 2x = 2x\mathrm{e}^{2y}$; $f_y(x,y) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{2y} \cdot 2 = 2x^2\mathrm{e}^{2y}$

24. B Határozza meg az $f(x,y) = y^3e^{6x-4}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = 6y^3e^{6x-4}$; $f_y(x,y) = 3y^2e^{6x-4}$

25. B Határozza meg az $f(x,y) = e^{2x^2+4y-xy}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = e^{2x^2+4y-xy}(4x-y)$; $f_y(x,y) = e^{2x^2+4y-xy}(4-x)$

26. B Határozza meg az $f(x,y) = (2xy-y^4)^3$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = 3(2xy-y^4)^2\cdot(1\cdot 2y-0) = 6y(2xy-y^4)^2$;
$f_y(x,y) = 3(2xy-y^4)^2\cdot(2x\cdot 1-4y^3) = 3(2xy-y^4)^2(2x-4y^3)$

27. B Határozza meg az $f(x,y) = \left(4x^2y-y^3+5x\right)^7$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = 7\left(4x^2y-y^3+5x\right)^6(8xy+5)$; $f_y(x,y) = 7\left(4x^2y-y^3+5x\right)^6(4x^2-3y^2)$

28. B Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt{x^2y^2+x^7}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$$f_x(x,y) = \frac{1}{2}\cdot(x^2y^2+x^7)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x\cdot y^2+7x^6) = \frac{2xy^2+7x^6}{2\sqrt{x^2y^2+x^7}};$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{2}\cdot(x^2y^2+x^7)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2\cdot 2y+0) = \frac{x^2y}{\sqrt{x^2y^2+x^7}}$$

29. B Határozza meg az $f(x,y) = \sqrt[5]{3-xy+y^3}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$$f_x(x,y) = \frac{1}{5}(3-xy+y^3)^{-\frac{4}{5}}(-y);\ f_y(x,y) = \frac{1}{5}(3-xy+y^3)^{-\frac{4}{5}}(-x+3y^2)$$

30. B Határozza meg az $f(x,y) = \ln\left(3x+7x^4y\right)$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$$f_x(x,y) = \frac{1}{3x+7x^4y}\cdot(3+28x^3y);\ f_y(x,y) = \frac{1}{3x+7x^4y}\cdot 7x^4$$

31. B Határozza meg az $f(x,y) = \ln(2x^2+xy^5)$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$$f_x(x,y) = \frac{1}{2x^2+xy^5}\cdot(2\cdot 2x+1\cdot y^5) = \frac{4x+y^5}{2x^2+xy^5};$$
$$f_y(x,y) = \frac{1}{2x^2+xy^5}\cdot(0+x\cdot 5y^4) = \frac{5xy^4}{2x^2+xy^5}$$

32. B Határozza meg az $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{3x+y^2}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$$f_x(x,y) = \frac{3x^2y\cdot(3x+y^2)-x^3y\cdot 3}{(3x+y^2)^2};\ f_y(x,y) = \frac{x^3\cdot(3x+y^2)-x^3y\cdot 2y}{(3x+y^2)^2}$$

33. B,V Határozza meg az $f(x,y) = x^2 \sin(xy)$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = 2x \cdot \sin(xy) + x^2 \cdot \cos(xy) \cdot y = 2x\sin(xy) + x^2 y \cos(xy)$; $f_y(x,y) = x^2 \cdot \cos(xy) \cdot x = x^3 \cos(xy)$

34. B,V Határozza meg az $f(x,y) = y^3 \cos(2x+4y)$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = y^3 \cdot (-\sin(2x+4y)) \cdot 2 = -2y^3 \sin(2x+4y)$; $f_y(x,y) = 3y^2 \cdot \cos(2x+4y) + y^3 \cdot (-\sin(2x+4y)) \cdot 4 = 3y^2 \cos(2x+4y) - 4y^3 \sin(2x+4y)$

35. B,V Határozza meg az $f(x,y) = x^y$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = yx^{y-1}$, ("x^3"); $f_y(x,y) = x^y \ln(x)$, ("3^y")

36. V Határozza meg az $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{2x-3y^2}}{x^2y^4+2}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$$f_x(x,y) = \frac{\frac{1}{2} \cdot (2x-3y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2 \cdot 1 - 0) \cdot (x^2y^4+2) - (2x-3y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x \cdot y^4 + 0)}{(x^2y^4+2)^2} = \frac{\frac{x^2y^4+2}{\sqrt{2x-3y^2}} - 2xy^4\sqrt{2x-3y^2}}{(x^2y^4+2)^2};$$
$$f_y(x,y) = \frac{\frac{1}{2} \cdot (2x-3y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (0 - 3 \cdot 2y) \cdot (x^2y^4+2) - (2x-3y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (x^2 \cdot 4y^3 + 0)}{(x^2y^4+2)^2} = \frac{\frac{-3y(x^2y^4+2)}{\sqrt{2x-3y^2}} - 4x^2y^3\sqrt{2x-3y^2}}{(x^2y^4+2)^2}$$

37. V Határozza meg az $f(x,y) = x^5y^3 \cdot e^{2x-y}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = e^{2x-y}x^4y^3(5+2x)$;$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x-y}x^5y^2(3-y)$

38. V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = e^{x^2y} \cdot \ln(xy)$ függvény elsőrendű derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = e^{x^2y}\left(2xy\ln(xy) + \frac{1}{x}\right)$; $f_y(x,y) = e^{x^2y}\left(x^2\ln(xy) + \frac{1}{y}\right)$

39. V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = x\sin(2x+5y) + y\cos(x-y)$ függvény elsőrendű derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = \sin(2x+5y) + 2x\cos(2x+5y) - y\sin(x-y)$; $f_y(x,y) = 5x\cos(2x+5y) + \cos(x-y) + y\sin(x-y)$

40. V Határozza meg az $f(x,y) = x^3\cos(x^7y^5) + 10x$ függvény elsőrendű derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\cos(x^7y^5) - 7x^9y^5\sin(x^7y^5) + 10$;$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = -5x^{10}y^4\sin(x^7y^5)$

41. V Határozza meg az $f(x,y) = y^9 \sin(x^6 + y^9) + 6y$ függvény elsőrendű derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^5y^9\cos(x^6+y^9)$;$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 9y^8\sin(x^6+y^9) + 9y^{17}\cos(x^6+y^9) + 6$

42. V Határozza meg az $f(x,y) = 7x^5\sqrt[4]{x^{10}y^5 + 7y^2} + 3x$ függvény elsőrendű derivált függvényeit!
Megoldás:
$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 35x^4\cdot\sqrt[4]{x^{10}y^5+7y^2} + 7x^5\cdot\frac{1}{4}(x^{10}y^5+7y^2)^{-\frac{3}{4}}10x^9y^5 + 3 = 35x^4\sqrt[4]{x^{10}y^5+7y^2} + \frac{35x^{14}y^5}{2\sqrt[4]{(x^{10}y^5+7y^2)^3}} + 3$
$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 7x^5\cdot\frac{1}{4}(x^{10}y^5+7y^2)^{-\frac{3}{4}}(5x^{10}y^4+14y) = \frac{7x^5(x^{10}y^5+7y^2)^{-\frac{3}{4}}(5x^{10}y^4+14y)}{4} = \frac{7x^5(5x^{10}y^4+14y)}{4\sqrt[4]{(x^{10}y^5+7y^2)^3}}$