

## 12. Határozatlan és határozott integrál

**Tanulási cél:** Megismerni a határozatlan és határozott integrál fogalmát. Elsajátítani az alapintegrálokat, és az egyszerűbb integrálási tételeket, valamint a Newton-Leibniz-formulát. Ezen ismereteket alkalmazni területszámítási feladatokban.

### Motivációs példa:

Egy termék gyártásánál a határkötség megmutatja, hogy az összköltség hogyan változik, ha a termelés egy egységgel növekszik. Azaz a határkötség a költségfüggvény deriváltja. Ha a határkötséget ismerjük, akkor hogyan lehetne előállítani a költségfüggvényt?

Egy termék előállításánál a határbevétel azt mutatja meg, hogy miként változik a bevétel, ha az eladásokat egy egységgel emeljük. Azaz a határbevétel a bevétel-függvény deriváltja. Ha ismerjük a határbevételt, fel tudnánk írni a bevétel-függvényt?

Amint látható, több olyan problémával találjuk magunkat szembe, melyben ismerünk egy függvényt, és olyan függvényt keresünk, aminek ez az ismert függvény a deriváltja. Az alábbiakban a matematika azon témakörét ismerhetjük meg, amely ezzel a problémával foglalkozunk.

### Elméleti összefoglaló:

**Definíció:** A  $F(x)$  függvényt a  $f(x)$  függvény primitív függvényének nevezzük, ha  $F'(x) = f(x)$ .

Egy  $f(x)$  függvénynek nem csak egy primitív függvénye van. Tekintsük például a  $f(x) = \cos x$  függvényt. Ennek nyilván primitív függvénye a  $F(x) = \sin x$  függvény, hiszen  $(\sin x)' = \cos x$ . De primitív függvény lesz a  $F_1(x) = \sin x + 1$  függvény is, mert  $(\sin x + 1)' = (\sin x)' + 1' = \cos x + 0 = \cos x$ .

Sőt, ha ezt így meggondoltuk, akkor azt mondhatjuk,  $f(x)$ -nek végtelenül sok primitív függvénye van, mert bármilyen konstans hozzáadhatunk  $\sin x$ -hez, mindenképpen olyan függvényt kapunk, aminek deriváltja  $\cos x$ , hiszen a konstans deriváltja 0 lesz. Ezek alapján az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg.

**Tétel:** Ha az  $f(x)$  függvénynek primitív függvénye a  $F(x)$  függvény, akkor bármely  $F(x) + c$  függvény is primitív függvénye, ahol  $c \in \mathbb{R}$ .

Felvetődik azonban a kérdés, hogy ilyen módon megkaphatunk-e minden olyan függvényt, ami primitív függvénye  $f(x)$ -nek? A válasz erre igen, ezt is megfogalmazhatjuk egy tételben.

**Tétel:** Ha  $F_1(x)$  és  $F_2(x)$  is primitív függvénye  $f(x)$ -nek, akkor  $F_1(x) - F_2(x)$  konstans függvény.

Amint láthatjuk, egy  $f(x)$  függvény primitív függvényei egy halmazt alkotnak, s ezen halmaz bármely két eleme csak egy konstansban tér el egymástól. Elég tehát egy elemet ismernünk ebből a halmazból, mert akkor az összes elemet megkaphatjuk ezen elemből különböző konstansok hozzáadásával. Mivel a primitív függvények halmazát ilyen egyszerűen megkaphatjuk, ezért egy fogalmat definiálunk.

**Definíció:** Az  $f(x)$  függvény primitív függvényeinek halmazát az  $f(x)$  függvény határozatlan integráljának nevezzük, és  $\int f(x) dx$ -szel jelöljük.

Ha  $F(x)$  egy primitív függvénye  $f(x)$ -nek, akkor  $\int f(x) dx = F(x) + c$ , ahol  $c$  tetszőleges konstans.

Amint a fentiekből látható, a határozatlan integrálás vagy másképp a primitív függvény keresés a deriválás megfordításának tekinthető. Ezért a továbbiakban úgy haladhatunk, hogy tekintjük az alapderiváltakat, és azokat megfordítva az úgynevezett alapintegrálokat kapjuk.

Például azt az alapderiváltat, hogy  $(\sin x)' = \cos x$  az  $\int \cos x dx = \sin x + c$  formában fordítjuk meg, és írjuk alapintegrálként. Néhány esetben a megfordításon egy kicsit alakítunk. Például ha a  $(\cos x)' = -\sin x$  alapderiváltból indulunk ki, akkor az egyszerű megfordítás

$\int -\sin x dx = \cos x + c$  lenne, de ezt inkább  $\int \sin x dx = -\cos x + c$  formában írjuk, hiszen

nyilván  $(-\cos x)' = \sin x$  is igaz. Hasonlóan a  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$  alapderiváltból az

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$  alapintegrált kapjuk.

Az így kapott alapintegrálokat egy táblázatban foglaljuk össze. Ez lényegében az alapderiváltak táblázatának megfordítása, olyan apróbb változtatásokkal, amikről fentebb írtunk.

### Az alapintegrálok táblázata:

$\int k dx = kx + c, k \in \mathbb{R}$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	

Néhány alapintegrállal kapcsolatban szeretnénk megjegyzést tenni. Az egyik a hatványok integrálásra vonatkozó  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  alapintegrál. Itt arra hívjuk fel nyomtatékosan a figyelmet, hogy a  $-1$ -edik hatvány kivétel. Bár a hatványokat általában úgy integráljuk, hogy a kitevőt eggyel megnöveljük, és osztunk az új kitevővel, a  $-1$ -edik hatvány esetén nem ez történik. Mivel  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  a természetes alapú logaritmus, azaz  $\ln x$  deriváltja,

ezért az  $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$  alapintegrált kapjuk. Ez csak pozitív  $x$ -ekre igaz, hiszen a

logaritmus csak ekkor értelmezhető. Belátható azonban, hogy negatív  $x$ -ek esetén

$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c$  igaz, s ezt együttesen  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$  formában foglalhatjuk össze. Ez

így már pozitív és negatív  $x$ -ekre is igaz.

Az alapintegrálok megismerése után jó lenne, ha ahhoz hasonló szabályokat is megfogalmazhatnánk, mint amilyenek a deriválásnál szerepeltek, mert akkor az alapintegrálokból műveletekkel képezett függvényeket is tudnánk integrálni. Nézzük milyen szabályok igazak a primitív függvényekre.

**Tétel:** Ha az  $f(x)$  függvénynek létezik primitív függvénye, akkor a  $k \cdot f(x)$ ,  $k \in \mathbb{R}$  függvénynek is létezik primitív függvénye, és  $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$ .

**Bizonyítás:** Legyen  $F(x)$  egy primitív függvénye  $f(x)$ -nek, azaz  $F'(x) = f(x)$ , vagy másképp  $\int f(x) dx = F(x) + c$ . Ekkor nyilván  $k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$ , ami azt jelenti, hogy  $k \cdot F'(x)$  egy primitív függvénye  $k \cdot f(x)$ -nek, azaz

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot F(x) + c = k \cdot \int f(x) dx.$$

A tétel másképp úgy fogalmazható, hogy integrálás során konstans szorzó kiemelhető az integrálból.

**Tétel:** Ha az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor az  $f(x) + g(x)$  függvénynek is létezik primitív függvénye, és

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

**Bizonyítás:** Legyen  $F(x)$  az  $f(x)$  és  $G(x)$  a  $g(x)$  egy-egy primitív függvénye, tehát  $F'(x) = f(x)$  és  $G'(x) = g(x)$ , vagy  $\int f(x) dx = F(x) + c$  és  $\int g(x) dx = G(x) + c$ . Ekkor nyilván  $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ , azaz  $F(x) + G(x)$  primitív függvénye  $f(x) + g(x)$ -nek, tehát

$$\int f(x) + g(x) dx = F(x) + G(x) + c = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Ezt a tételt fogalmazhatjuk meg úgy is, hogy függvények összegét tagonként integrálhatjuk.

A fenti két tételből nyilván az is következik, hogy függvények különbsége esetén

$$\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

A deriválásnál ezután az következett, hogy a függvények szorzatára, hányadosára és az összetett függvényekre is sikerült deriválási szabályt találnunk. Ezek a deriválási szabályok bármilyen szorzat, tört vagy összetett függvény esetén alkalmazhatóak voltak. Sajnos az integrálásnál ilyen szabályok nincsenek. Nem lehet kimondani olyan összefüggést, amelynek segítségével bármilyen függvények szorzata, vagy hányadosa, vagy kompozíciója integrálható lenne. A későbbiekben megismerünk majd szabályokat, melyek segítségével függvények szorzatát integrálhatjuk, de ezek a szabályok nem alkalmazhatóak bármilyen függvények szorzata esetében, csak bizonyos speciális esetekben. Megismerünk majd olyan szabályt is, amit függvények hányadosának integrálására használhatunk, de csak bizonyos speciális törtekre alkalmazható. Speciális összetett függvényekre is lesz majd integrálási szabály, de azt sem lehet általánosan alkalmazni minden összetett függvényre. Éppen ezért az integrálás több találatekonyságot igényel majd, mint amire a deriválásnál szükség volt.

### Kidolgozott feladatok:

**1. feladat:** Határozzuk meg az  $f(x) = 3x^4 - 2\sin x + 8e^x$  függvény határozatlan integrálját, azaz  $\int 3x^4 - 2\sin x + 8e^x dx$ -et!

**Megoldás:** Mivel függvények összegét illetve különbségét kell integrálnunk, ezért tagonként végezhethetjük el az integrálást. Így három integrált kapunk.

$$\int 3x^4 - 2\sin x + 8e^x dx = \int 3x^4 dx - \int 2\sin x dx + \int 8e^x dx$$

Az egyes integrálokból a konstans szorzókat kiemelhetjük.

$$\int 3x^4 dx - \int 2\sin x dx + \int 8e^x dx = 3\int x^4 dx - 2\int \sin x dx + 8\int e^x dx$$

Már csak alapintegrálok szerepelnek, melyeket egyszerűen behelyettesítünk. Az első részben

egy hatványfüggvényt kell integrálnunk, így itt az  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

alapintegrálra hivatkozva eggyel megnöveljük a kitevőt, s osztunk az új kitevővel. A második részben az  $\int \sin x dx = -\cos x + c$ , a harmadikban pedig az  $\int e^x dx = e^x + c$  alapintegrálra hivatkozunk.

$$3\int x^4 dx - 2\int \sin x dx + 8\int e^x dx = 3\frac{x^5}{5} - 2(-\cos x) + 8e^x + c = \frac{3}{5}x^5 + 2\cos x + 8e^x + c$$

Nem írjuk ki mindegyik rész integrálásánál külön-külön a  $c$  integrációs konstans, mert  $c$  bármilyen valós értéket felvehet. Ha többször szerepelne, akkor a konstansok összege is egy konstans lenne, ami bármilyen valós értéket felvehetne. Ezért elég mindig csak egyetlen konstans írunk a primitív függvény után.

**2. feladat:**  $\int \sqrt[4]{x} dx$

**Megoldás:** Első lépésként a konstans szorzót emeljük ki az integrálból.

$$\int \sqrt[4]{x} dx = 7\int \sqrt[4]{x} dx$$

Az alapintegrálok között a különböző gyökök a hatványokban szerepelnek. A deriválásnál is az történt, hogy a gyököket törtkitevős hatványként írtuk, és hatványként felírt alakot deriváltuk. Most ugyanígy járunk el az integrálás során is.

$$7 \int \sqrt[4]{x} dx = 7 \int x^{\frac{1}{4}} dx$$

Ezután már hivatkozhatunk az  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  alapintegrálra.

$$7 \int x^{\frac{1}{4}} dx = 7 \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + c = 7 \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + c = \frac{28}{5} x^{\frac{5}{4}} + c = \frac{28}{5} \sqrt[4]{x^5} + c.$$

Az eredményt írhatjuk törtkitevős hatványként, vagy gyökös formában is.

**3. feladat:**  $\int \frac{6}{x^5} dx$

**Megoldás:** Kezdjük most is a konstans szorzó kiemelésével.

$$\int \frac{6}{x^5} dx = 6 \int \frac{1}{x^5} dx$$

Az integrálandó függvényben, amit integrandusnak is szoktak hívni, most egy hatvány reciprokát látjuk. Ezt felírhatjuk negatív kitevős hatvány formájában, s így ismét csak egy hatványt kell majd integrálnunk. Ugyanígy járhatunk el az ilyen függvények deriválásakor is.

$$6 \int \frac{1}{x^5} dx = 6 \int x^{-5} dx$$

A hatvány integrálásakor most is növeljük eggyel a kitevőt, és osztunk az új kitevővel.

$$6 \int x^{-5} dx = 6 \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = 6 \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{6}{4} x^{-4} + c = -\frac{3}{2} \frac{1}{x^4} + c$$

Az eredményt most írhatjuk negatív kitevős hatvány, vagy tört formájában is.

**4. feladat:**  $\int \sqrt[5]{x \cdot \sqrt{x}} dx$

**Megoldás:** Az integrálást ebből az alakból nyilván nem tudjuk végrehajtani, ezért először átalakítjuk az integrálandó függvényt. A gyököket írjuk át törtkitevős hatvánnyá, amint azt egy korábbi feladatban tettük.

$$\int \sqrt[5]{x \cdot \sqrt{x}} dx = \int \left( x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx$$

Végezzük el a zárójelen belül a szorzást. Azonos alapú hatványok szorzása esetén egyetlen hatványt kapunk, melyben a kitevők összeadódnak.

$$\int \left( x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx = \int \left( x^{1+\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx = \int \left( x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx$$

Most egy hatványt tovább hatványozunk. Ha ezt egyetlen hatványként írjuk, akkor a kitevők szorzódnak.

$$\int \left( x^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{5}} dx = \int x^{\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 5}} dx = \int x^{\frac{3}{10}} dx$$

Az integrandust sikerült egyetlen hatvánnyá alakítunk, így végre tudjuk hajtani az integrálást.

$$\int x^{\frac{3}{10}} dx = \frac{x^{\frac{3}{10}+1}}{\frac{3}{10}+1} + c = \frac{x^{\frac{13}{10}}}{\frac{13}{10}} + c = \frac{10}{13} x^{\frac{13}{10}} + c = \frac{10}{13} \sqrt[10]{x^{13}} + c$$

Az eredmény most is több alakban írható. Hagyhatjuk törtkitevős hatványként, de írhatjuk gyökös formában is.

A feladatból látható, hogy az integrandus megadott alakjából nem lehet elvégezni az integrálást. De az átalakítások után már olyan formában kapjuk meg a függvényt, ami egyetlen alapintegrál. Az integrálási feladatokban nagyon sokszor nem az okozza a fejtörést, hogy magát az integrálási lépést hogyan hajtsuk végre, hanem hogyan készítsük elő az integrálást, azaz milyen módon alakítsuk át az integrandust az integrálás előtt. Az átalakítások során nagyon gyakran olyan azonosságokra hivatkozunk, amelyek a középiskolából ismertek. Különösen szeretnénk kiemelni a hatványozás azonosságait, mert a hatványok gyakran fordulnak elő, s átalakításukra több azonosságot is ismerünk.

**5. feladat:**  $\int (3x^2 + 1)(5x - 4) dx$

**Megoldás:** Az integrandusunk most egy szorzat. Amint az korábban szerepelt, ilyen esetben nincs általánosan alkalmazható integrálási szabály. Át kellene ezért alakítanunk úgy a függvényt, hogy már ne szerepeljen szorzás. Végezzük el a szorzást, azaz bontsuk fel a zárójeleket.

$$\int (3x^2 + 1)(5x - 4) dx = \int 15x^3 - 12x^2 + 5x - 4 dx =$$

Egyszerű polinomot kaptunk. Ekkor tagonként integrálhatunk. Az egyes tagokból a konstans szorzókat kiemelhetjük.

$$\int 15x^3 - 12x^2 + 5x - 4 dx = 15 \int x^3 dx - 12 \int x^2 dx + 5 \int x dx - 4 \int 1 dx =$$

Alkalmazzuk a hatványfüggvényekre vonatkozó integrálási szabályt.

$$15 \frac{x^4}{4} - 12 \frac{x^3}{3} + 5 \frac{x^2}{2} - 4x + c = 15 \frac{x^4}{4} - 4x^3 + 5 \frac{x^2}{2} - 4x + c$$

**6. feladat:**  $\int \frac{2x^2 + x - 3}{x^2} dx$

**Megoldás:** Az integrálandó függvény most egy tört. Sajnos a törtekre sincsen minden esetben használható integrálási szabály. Mivel a tört számlálójában összeg illetve különbség áll, a törtet több törtre bonthatjuk úgy, hogy az egyes tagokat külön-külön osztjuk a nevezővel.

$$\int \frac{2x^2 + x - 3}{x^2} dx = \int \frac{2x^2}{x^2} dx + \int \frac{x}{x^2} dx - \int \frac{3}{x^2} dx$$

Ahol tudunk egyszerűsítsünk és a konstans szorzókat emeljük ki az egyes integrálokból.

$$\int 2 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{3}{x^2} dx = 2 \int 1 dx + \int \frac{1}{x} dx - 3 \int \frac{1}{x^2} dx$$

Az első két tag egyszerű alapintegrál, nem kell már tovább alakítani. A harmadik tagban egy hatvány reciproka szerepel, amit negatív kitevős hatványként írhatunk fel.

$$\int 2 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{3}{x^2} dx = 2 \int 1 dx + \int \frac{1}{x} dx - 3 \int x^{-2} dx$$

Már csak egy-egy hatványt kell integrálnunk.

$$2 \int 1 \, dx + \int \frac{1}{x} \, dx - 3 \int x^{-2} \, dx = 2x + \ln|x| - 3 \frac{x^{-1}}{-1} + c = 2x + \ln|x| + \frac{3}{x} + c$$

**7. feladat:** Egy termék gyártása során  $x$  mennyiség esetén a határkölség  $C'(x) = 6x + 4$ . Határozzuk meg a költségfüggvényt, ha tudjuk, hogy a fix költség éppen 30?

**Megoldás:** A határkölség megmutatja az összkölség változását, ha egy egységgel növeljük a termelést. Tehát a keresett  $C(x)$  költségfüggvény deriváltja éppen  $C'(x) = 6x + 4$ . Azt már tudjuk, hogy végtelen sok olyan függvény adható, aminek a deriváltfüggvénye éppen  $6x + 4$ . Most azt kellene megkeresni a sok függvény között, amelyiknek  $x = 0$  esetén (amikor nincs termelés) éppen 30-t vesz fel helyettesítési értéként, azaz  $C(0) = 30$ . Kezdjük most is a feladat megoldását a primitívfüggvények előállításával. Az integrációs konstanszt a félreértések elkerülése végett jelöljük most  $k$ -val.

$$\int 6x + 4 \, dx = 3x^2 + 4x + k$$

A  $x = 0$  behelyettesítésével kapjuk, hogy  $C(0) = k = 30$ . Tehát a keresett költségfüggvény  $C(x) = 3x^2 + 4x + 30$

**Ellenőrző kérdések:**

**1. kérdés:**  $\int 9x^5 - 7^x \, dx$

Válasz:  $\frac{3}{2}x^6 - \frac{7^x}{\ln 7} + c$

**2. kérdés:**  $\int 4\sqrt[5]{x^3} \, dx$

Válasz:  $\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^8} + c$

**3. kérdés:**  $\int \frac{3}{x^4} \, dx$

Válasz:  $-\frac{1}{x^3} + c$

**4. kérdés:**  $\int \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \, dx$

Válasz:  $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$

**5. kérdés:**  $\int (4x^3 + x)(x^2 - x) \, dx$

Válasz:  $\frac{2x^6}{3} - \frac{4x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c$

6. kérdés:  $\int \frac{x^3 + 6x - 3}{2x^2} dx$

Válasz:  $\frac{x^2}{4} + 3 \ln|x| + \frac{3}{2x} + c$

7. kérdés: Egy termék gyártása során  $x$  mennyiség esetén a határkölség

$C'(x) = 9x^2 + x + 2$ . Határozzuk meg a költségfüggvényt, ha tudjuk, hogy a fix költség éppen 100?

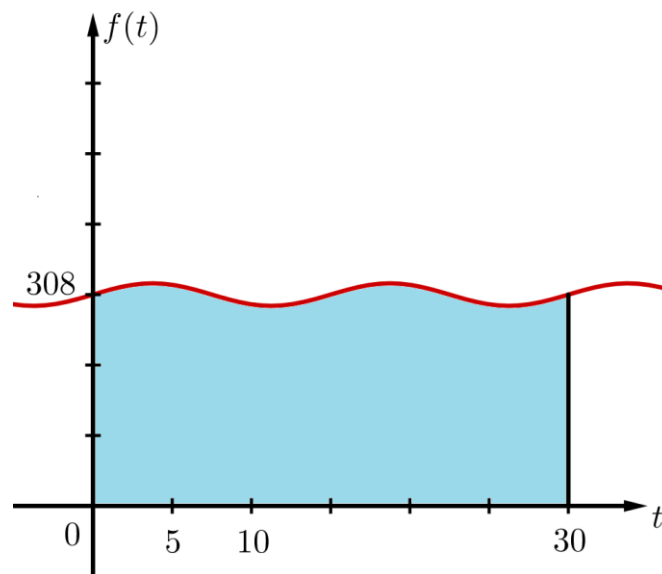
Válasz:  $3x^3 + 0,5x^2 + 2x + 100$

**Motivációs példa:** Az euró árfolyama (forintban) az elmúlt hónapban az

$$f(t) = 308 + 0,8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right)$$

függvény szerint alakult. Mennyi volt az euró átlagárfolyama az elmúlt hónapban?

Korábbi ismereteinkből tudjuk, hogy átlagot úgy számolunk, hogy az összmenyiséget osztjuk az adatok számával. Ebben az esetben ez azt jelenti, hogy a napi árfolyamok összegét el kell osztanunk a napok számával. Ez szemléletesen az árfolyamváltozást leíró függvény görbéje és az  $x$  tengely által közbezárt terület osztva az intervallum hosszával.



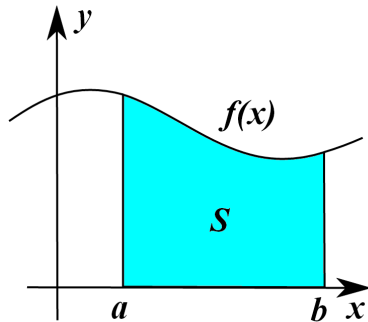
A gyakorlati életben számos olyan példa adható, ahol a keresett mennyiség egy adott intervallumon a függvénygörbe és az  $x$  tengely által közbezárt területtel hozható kapcsolatba.



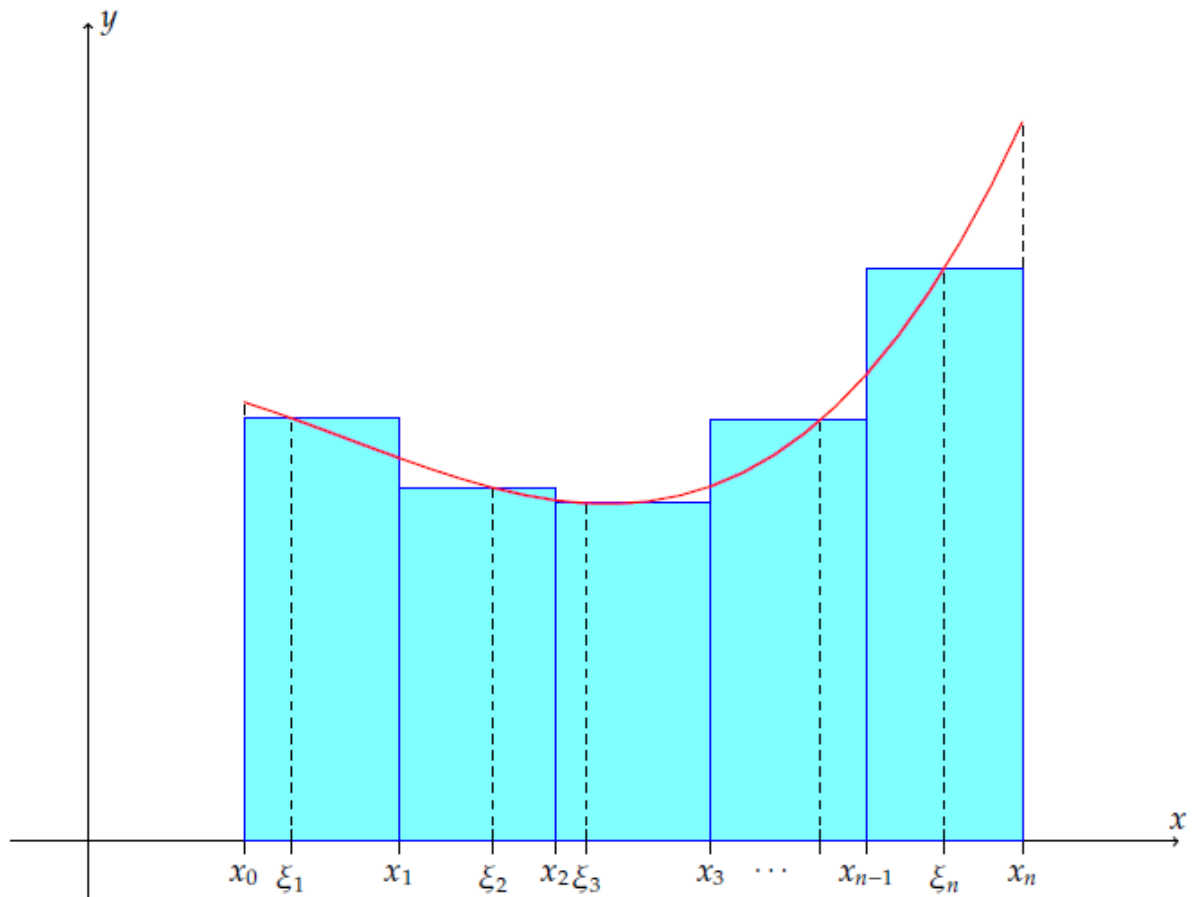
Ezek kiszámítására szolgáló matematikai módszerekkel fogunk foglalkozni a következő fejezetben.

### Elméleti összefoglaló:

Induljunk ki tehát abból, hogy adott egy  $[a, b]$ -n értelmezett folytonos  $f(x)$  függvény, melyre  $f(x) > 0$  teljesül az  $[a, b]$ -n, és szeretnénk meghatározni az  $y = f(x)$ , az  $y = 0$ , az  $x = a$  és az  $x = b$  görbék által határolt alakzat területét. Ez az alakzat látható az alábbi ábrán.



Osszuk fel az  $[a, b]$  intervallumot  $n$  részre valamilyen  $F_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  halmazzal, amelyre  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  teljesül. Ezt az  $F_n$  halmazt az  $[a, b]$  intervallum egy felosztásának nevezzük. Egy-egy részintervallum hosszát a szomszédos osztópontok különbségeként kaphatjuk meg. Az  $i$ -edik részintervallum hossza például  $x_i - x_{i-1}$ , melyet  $\Delta x_i$ -vel is jelölünk. (A részintervallumok nem feltétlenül egyforma hosszúak.) A felosztás finomságának nevezzük a leghosszabb részintervallum hosszát, azaz  $\max \Delta x_i$ -t. Válasszunk ki mindegyik  $[x_{i-1}, x_i]$  részintervallumból egy  $\xi_i$  számot. Emeljünk mindegyik részintervallum fölé  $f(\xi_i)$  magasságú téglalapot.



Ezen téglalapok területének összegével közelítjük a meghatározandó területet. Ezt az összeget az adott felosztáshoz tartozó közelítő összegnek nevezzük, és  $\sigma_n$ -nel jelöljük. Írjuk fel ezt az összeget. Az első téglalap területe:  $T_1 = f(\xi_1) \cdot (x_1 - x_0) = f(\xi_1) \cdot \Delta x_1$ , a második téglalap

területe  $T_2 = f(\xi_2) \cdot (x_2 - x_1) = f(\xi_2) \cdot \Delta x_2$ , az  $i$ -edik téglalap területe

$T_i = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ . Ezek alapján a közelítő összeg a következő:

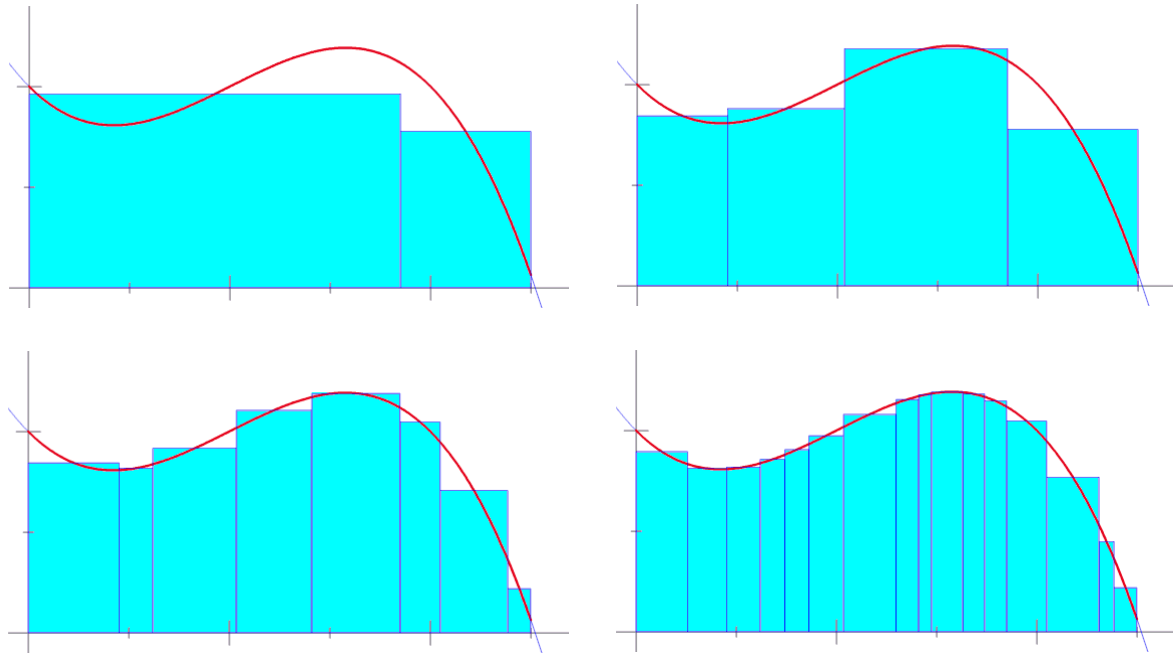
$$\begin{aligned} \sigma_n &= T_1 + T_2 + \dots + T_n = f(\xi_1) \cdot (x_1 - x_0) + f(\xi_2) \cdot (x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n) \cdot (x_n - x_{n-1}) = \\ &= f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n. \end{aligned}$$

Ugyanezt rövidebben is írhatjuk:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Növeljük a felosztásban a részintervallumok számát, így újabb és újabb felosztásokat kapunk. Ha az osztópontok számát minden határon túl növeljük akkor így felosztásoknak egy sorozatát kapjuk. Várhatóan az egyre több osztóponttal rendelkező felosztások egyre pontosabban fogják közelíteni az alakzatot, melynek területét meghatározni szeretnénk. Ez azonban csak akkor lesz igaz, ha a felosztás az osztópontok számának növelésével egyre finomodik is, azaz nem marad benne seholy túl hosszú részintervallum. Ezt fejezzük ki azzal, hogy olyan felosztássorozatot készítünk, amiben a felosztás finomsága nullához tart, azaz  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ . Nem történhet meg olyan a felosztássorozatban, hogy az  $[a, b]$  intervallum egyik részén egyre sűrűsödik a felosztás, de valahol máshol benne marad egy hosszabb

részintervallum. Az ilyen felosztások sorozatokat végtelenül finomodó felosztásoknak nevezzük. Az alábbi ábrákon ilyen egyre finomodó felosztások láthatók.



**Definíció:** Azt mondjuk, hogy az  $[a, b]$ -n értelmezett  $f(x)$  függvény Riemann-integrálható az  $[a, b]$ -n, ha a  $\sigma_n$  közelítő összegek sorozata minden végtelenül finomodó felosztás sorozat esetén konvergens, és ugyanahhoz a számhoz tart. Ekkor ezt a számot az  $f(x)$  függvény

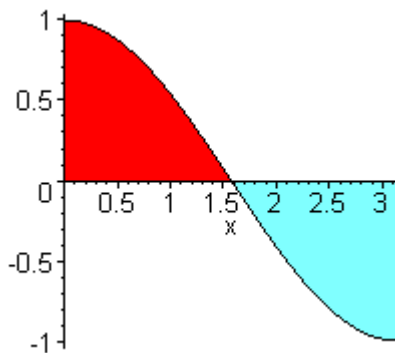
$[a, b]$ -n vett Riemann-integráljának, vagy határozott integráljának nevezzük és  $\int_a^b f(x) dx$ -

szel jelöljük. Ez rövidebben az alábbi jelölésekkel írható:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Itt kell megjegyeznünk, hogy az egyszerűség kedvéért az elején olyan függvényről beszéltünk, ami az  $[a, b]$ -n pozitív értékeket vesz fel. Ekkor a fenti definíció valóban a függvény grafikonja és az  $x$ -tengely között elhelyezkedő alakzat területét adja meg az  $[a, b]$ -n. Ha azonban a függvény negatív értékeket is felvehet, akkor a téglalapokkal történő közelítésben  $f(\xi_i)$  is lehet negatív, így az  $f(\xi_i) \Delta x_i$  szorzat az  $i$ -edik téglalap területét előjelesen adja meg. Ha  $f(\xi_i) > 0$ , a közelítésben a téglalap az  $x$ -tengely felett helyezkedik el. Ekkor  $f(\xi_i) \Delta x_i$  pozitív, tehát valóban a téglalap területét kapjuk. De ha  $f(\xi_i) < 0$ , a téglalap az  $x$ -tengely alatt helyezkedik el. Ekkor  $f(\xi_i) \Delta x_i$  negatív, s a téglalap területének  $-1$ -szeresével egyenlő. Ebből következően, az integrál a függvény grafikonja és az  $x$ -tengely között elhelyezkedő alakzat területét előjelesen adja meg. Ha a függvény pozitív, azaz grafikonja az  $x$ -tengely felett halad, akkor valóban területet kapunk, de ha a függvény negatív, akkor a terület  $-1$ -szeresét kapjuk. Ezért kapjuk azt, hogy ha egy függvény előjele megváltozik az  $[a, b]$  belsejében, és a pozitív illetve negatív részen egyenlő nagyságú a

terület a függvény grafikonja és az  $x$ -tengely között, akkor nulla a függvény integrálja az  $[a, b]$  intervallumon. Erre példa mondjuk az  $f(x) = \cos x$  függvény a  $[0, \pi]$ -n.



Amint az ábrán látható, a pirossal illetve kékkel jelölt alakzatok szimmetria miatt egyenlő területűek, de míg a piros az  $x$ -tengely felett, a kék az  $x$ -tengely alatt helyezkedik el. Az integrálás így a piros alakzat területét, a kék alakzat területének pedig  $-1$ -szeresét adja. Így a függvény integrálja a teljes  $[0, \pi]$  intervallumon ezek összeg, azaz nulla lesz.

A Riemann-integrál hosszadalmas definíciója után felvetődik az a kérdés, hogy milyen függvények integrálhatóak. Ezzel kapcsolatban két tételt mondunk ki bizonyítás nélkül.

**Tétel:** Ha az  $f(x)$  függvény integrálható az  $[a, b]$  intervallumon, akkor  $f(x)$  ezen az intervallumon korlátos. A korlátosság tehát szükséges feltétele az integrálhatóságnak. (Nem minden  $[a, b]$ -n korlátos függvény integrálható  $[a, b]$ -n.)

**Tétel:** Ha az  $f(x)$  függvény folytonos az  $[a, b]$  intervallumon, akkor integrálható is  $[a, b]$ -n. A folytonosság tehát elégséges feltétele az integrálhatóságnak. (Nem minden  $[a, b]$ -n integrálható függvény folytonos  $[a, b]$ -n.)

A határozott integrálra vonatkozóan sok tétel bizonyítható. Ezeket szokták a határozott integrál tulajdonságainak nevezni. Vannak köztük olyanok, melyek hasonlóak, mint a határozatlan integrál tulajdonságai.

**Tétel:** Ha  $f(x)$  és  $g(x)$  integrálhatóak az  $[a, b]$ -n,  $k$  pedig tetszőleges valós szám, akkor a  $k \cdot f(x)$ ,  $f(x) + g(x)$  és  $f(x) - g(x)$  függvények is integrálhatóak  $[a, b]$ -n, és

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Tehát amint a határozatlan integrálnál, úgy a határozott integrálnál is konstans szorzó kiemelhető az integrálból, valamint összeget és különbséget tagonként integrálhatunk. A különbségre vonatkozó állítás a másik kettőből már egyszerűen következik.

A határozott integrálnak vannak olyan tulajdonságai is, amelyekben az integrálási intervallumnak fontos szerepe van. A határozatlan integrálnál ilyen tulajdonságok nyilván nem voltak.

**Tétel:** Ha  $f(x)$  integrálható  $a$ -tól  $b$ -ig, akkor integrálható  $b$ -től  $a$ -ig is, és

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx.$$

Azaz ha felcseréljük az integrálási határokat, az integrál  $-1$ -szeresét kapjuk.

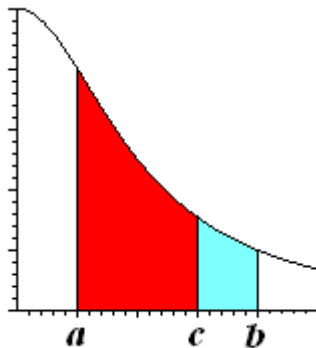
**Tétel:** Ha  $f(x)$  integrálható az  $[a, b]$ -n, akkor integrálható  $[a, b]$  bármely részintervallumán is.

**Tétel:** Ha  $f(x)$  integrálható az  $[a, b]$ -n, és  $a < c < b$ , akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Ezt fogalmazhatjuk úgy is, hogy az integrálás az  $[a, b]$ -n részletekben is végrehajtható.

Pozitív értékű függvény esetén szemléletesen arról van szó, hogy a függvény grafikonja és az  $x$ -tengely közti terület az  $[a, b]$ -n úgy is meghatározható, hogy vesszük a területet az  $[a, c]$ -n, és hozzáadjuk a területet  $[c, b]$ -n. (Az  $[a, b]$  intervallumon a terület a piros és kék alakzat területének összege.)



**Tétel:** Ha  $f(x)$  integrálható az  $[a, c]$  és  $[c, b]$  intervallumokon, akkor integrálható az  $[a, b]$  intervallumon is, és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Tétel:** Ha  $f(x)$  integrálható az  $[a, b]$ -n, és  $f(x) \geq 0$  minden  $x \in [a, b]$  esetén, akkor

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Ha nem negatív függvényt integrálunk, akkor az integrál sem negatív.

**Tétel:** Ha  $f(x)$  és  $g(x)$  integrálhatóak az  $[a, b]$ -n, valamint  $f(x) \geq g(x)$  minden  $x \in [a, b]$  esetén, akkor

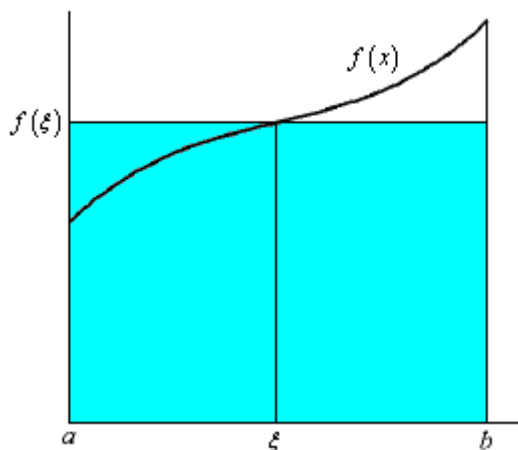
$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Más megfogalmazásban azt mondhatjuk, hogy a nem kisebb értékű függvény integrálja sem kisebb.

**Tétel:** (Az integrálszámítás középértéktétele) Ha  $f(x)$  folytonos az  $[a, b]$ -n, akkor létezik legalább egy  $\xi \in [a, b]$ , melyre igaz, hogy

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$

Pozitív értékű függvény esetén szemléletes arról van szó, hogy az  $f(x)$  függvény grafikonját tudjuk metszeni olyan vízszintes egyenessel, ami alatt az  $[a, b]$ -n pontosan akkora területű téglalap van, mint a függvény és az  $x$ -tengely közti alakzat területe az  $[a, b]$ -n. Az ábrán kékkel jelölt téglalap területe  $f(\xi) \cdot (b - a)$ , mely megegyezik a függvény grafikonja és az  $x$ -tengely közti területtel.



**Tétel:** (Newton-Leibniz-formula) Ha  $f(x)$  integrálható az  $[a, b]$ -n, és  $F(x)$  egy tetszőleges primitív függvénye  $f(x)$ -nek, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

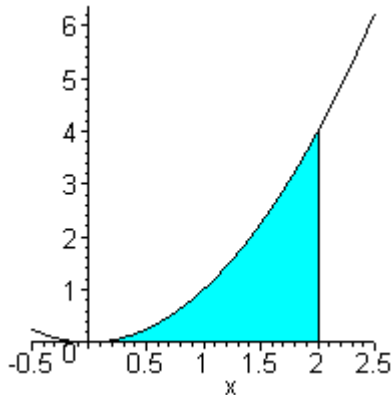
Az  $F(b) - F(a)$  különbség rövidebb írására gyakran használatos az  $[F(x)]_a^b$  jelölés.

Ezt a tételt gyakran nevezik az integrálszámítás alaptételének is, mert a határozott integrál és a primitív függvény közötti kapcsolatot mondja ki. Ezzel lehetővé teszi számunkra a határozott integrál pontos kiszámolását olyan esetekben, amikor a definíció alapján ezt nem tudnánk elvégezni. Márpedig a definíció alapján csak nagyon kevés esetben számolható ki pontosan a határozott integrál, s általában akkor is nagyon nehézkes.

**Kidolgozott feladatok:**

**1. feladat:** Határozzuk meg az  $f(x) = x^2$  függvény grafikonja és az  $x$ -tengely közötti alakzat területét a  $[0, 2]$  intervallumon.

**Megoldás:** Készítsünk egy ábrát az alakzatról.



Amint látható, egy olyan háromszöghöz hasonló alakzat területe a kérdés, amit felülről az  $f(x) = x^2$  függvény grafikonja, azaz egy parabola határol. Mivel a függvény a  $[0, 2]$  intervallumon nem vesz fel negatív értéket, így a területet megkapjuk, ha a függvényt integráljuk ezen az intervallumon.

$$T = \int_0^2 x^2 dx$$

Meg kell határoznunk  $f(x)$  egy primitív függvényét, így először határozatlanul integrálunk. Hatványt integrálunk, tehát eggyel növeljük a kitevőt, és osztunk az új kitevővel.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

Mivel csak egy primitív függvényre van szükségünk, így  $c$ -t tetszőlegesen megválaszthatjuk. Legegyszerűbb a  $c = 0$  választás. Így kapjuk, hogy  $f(x) = x^2$  egy primitív függvénye

$$F(x) = \frac{x^3}{3}.$$

Ezután helyettesítünk a Newton-Leibniz-formulába.

$$T = \int_0^2 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

A kért terület tehát  $\frac{8}{3}$  egységnyi.

A későbbiekben az ehhez hasonló feladatok megoldását rövidebben írjuk majd. A primitív függvényt nem határozzuk meg külön, hanem a határozott integrál után egyből írjuk a primitív függvényt  $[ ]$ -ben, feltüntetve a zárójel után az integrálási határokat. Így a megoldás lényegében csak az utolsó sorból áll majd. Ha a primitív függvény meghatározása nem ilyen egyszerű mint most, akkor célszerű lehet külön elvégezni a határozatlan integrálást, és utána visszatérni a határozott integrálhoz.

**2. feladat:** Határozzuk meg az  $\int_1^4 x\sqrt{x} dx$  határozott integrált!

**Megoldás:** A megoldás során először primitív függvényt kell keresnünk, amihez alakítsuk át az integrandust úgy, hogy egyetlen hatványt kapjunk.

$$\int_1^4 x\sqrt{x} dx = \int_1^4 x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int_1^4 x^{1+\frac{1}{2}} dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} dx$$

Adjuk meg a primitív függvényt, hivatkozva a hatványok alapintegráljára, azaz növeljük eggyel a kitevőt, és osztunk az új kitevővel. A primitív függvényt tegyük a [ ]-be, és tüntessük fel mögötte az integrálási határokat. A primitív függvényt írjuk minél egyszerűbb alakban.

$$\int_1^4 x\sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \left[ \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^4 = \left[ \frac{2}{5} \sqrt{x^5} \right]_1^4$$

Helyettesítsük be a primitív függvénybe a felső integrálási határt, majd vonjuk ki belőle az alsó határ helyettesítési értékét, és végezzük el a műveleteket.

$$\int_1^4 x\sqrt{x} dx = \left[ \frac{2}{5} \sqrt{x^5} \right]_1^4 = \frac{2}{5} \sqrt{4^5} - \frac{2}{5} \sqrt{1^5} = \frac{2}{5} \cdot 32 - \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{62}{5} = 12.4$$

**3. feladat:**  $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

**Megoldás:** Járjunk el úgy mint az előző feladatban, azaz írjuk hatványként az integrálandó függvényt.

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}} dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt, s hozzuk minél egyszerűbb alakra.

$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_1^8 x^{-\frac{1}{3}} dx = \left[ \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_1^8 = \left[ \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right]_1^8$$

Helyettesítsük be az integrálási határokat, és vegyük a két helyettesítési érték különbségét. A felső határ helyettesítési értékéből vonjuk az alsó határ helyettesítési értékét. A műveleteket ezután végezzük el.

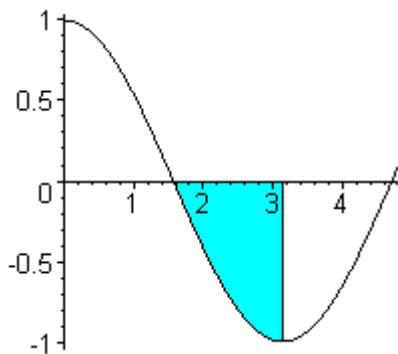
$$\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \left[ \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right]_1^8 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{8^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{1^2} = \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{9}{2} = 4.5$$

Ha a primitív függvényben szerepel valamilyen konstans szorzó, mint jelen esetben a  $\frac{3}{2}$ , akkor azt határok behelyettesítésekor rögtön kiemelhetjük, így nem kell kétszer leírunk.

**4. feladat:** Határozzuk meg az  $f(x) = \cos x$  függvény grafikonja és az  $x$ -tengely közötti alakzat területét a  $\left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$  intervallumon.

**Megoldás:** Készítsünk ábrát a függvényről és a kérdéses alakzatról.





Amint látható, a függvény a megadott intervallumon negatív értékeket és a 0-t veszi fel, így az alakzat területe a függvény integráljának  $-1$ -szerese lesz. Persze ezt úgy is mondhatnánk, hogy az integrál abszolút értéke lesz a terület.

$$T = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx \right| = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

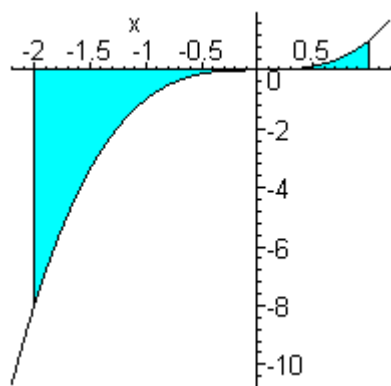
Helyettesítsük a felső integrálási határt, majd vonjuk ki belőle az alsó határ helyettesítési értékét, és végezzük el a műveleteket.

$$T = - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = - \left( \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = - (0 - 1) = 1$$

A kért terület tehát pontosan 1 egységnyi.

**5. feladat:** Határozzuk meg az  $f(x) = x^3$  függvény grafikonja és az  $x$ -tengely közötti alakzat területét a  $[-2, 1]$  intervallumon.

**Megoldás:** Most is egy ábrával célszerű kezdenünk a megoldást.



Amint látható, a függvénynek az  $x = 0$ -nál zérushelye van, s a  $[-2, 0)$  intervallumon negatív, a  $(0, 1]$  pedig pozitív. A területet így két részletben kell számolnunk. Integráljuk egyrészt a

függvényt a  $[-2, 0]$  intervallumon, és ennek az integrálnak vesszük az abszolút értékét, mert itt a függvény negatív vagy 0. Ezzel megkapjuk a függvény és az  $x$ -tengely közti területet  $[-2, 0]$  intervallumon. Valamint vesszük a függvény integrálját a  $[0, 1]$  intervallumon, ami megegyezik itt a függvény és az  $x$ -tengely közti területtel, mert a függvény itt pozitív vagy 0. A teljes területet pedig a két terület összegeként kapjuk.

$$T = \left| \int_{-2}^0 x^3 dx \right| + \int_0^1 x^3 dx = - \int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = - \int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx = - \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 + \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

Mindkét esetben helyettesítsük az integrálási határokat, és felső határ helyettesítési értékéből vonjuk ki az alsó határ helyettesítési értékét. A számolásokat ezután végezzük el.

$$T = - \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^0 + \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = - \left( \frac{0^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} \right) + \left( \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) = -(0 - 4) + \left( \frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{17}{4} = 4.25$$

A kért terület tehát 4.25 egység.

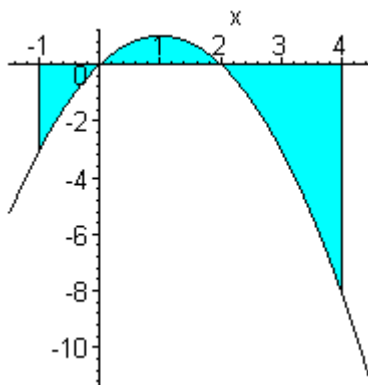
**6. feladat:** Határozzuk meg az  $f(x) = 2x - x^2$  függvény grafikonja és az  $x$ -tengely közötti alakzat területét a  $[-1, 4]$  intervallumon.

**Megoldás:** Most is célszerű ábrázolni a függvény adott intervallumba eső részét. Mivel másodfokú függvényt kell ábrázolnunk, célszerű meghatározni a zérushelyeket. Emeljük ki  $x$ -et, mert így azt kell vizsgálnunk, hogy egy szorzat mikor egyenlő nullával.

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{vagy} \\ 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

A zérushelyek tehát  $x_1 = 0$  és  $x_2 = 2$ . Ezek ismeretében már könnyen ábrázolható a parabola.

Mivel  $x^2$  együtthatója negatív, ezért konkáv parabolát kell rajzolnunk.



A kérdéses alakzat most három részből áll, mivel a függvény két helyen is metszi az  $x$ -tengelyt az adott intervallumon belül. Az első rész a  $[-1, 0]$  intervallumhoz tartozó rész, a második a  $[0, 2]$  intervallumhoz tartozó rész, s a harmadik a  $[2, 4]$  intervallumhoz tartozó

rész. Mivel az első és a harmadik részen a függvény nem pozitív, így a terület meghatározásához ezeken a részekben a függvény integráljának abszolút értékét kell venni.

$$T = \left| \int_{-1}^0 2x - x^2 dx \right| + \int_0^2 2x - x^2 dx + \left| \int_2^4 2x - x^2 dx \right| = -\int_{-1}^0 2x - x^2 dx + \int_0^2 2x - x^2 dx - \int_2^4 2x - x^2 dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = -\int_{-1}^0 2x - x^2 dx + \int_0^2 2x - x^2 dx - \int_2^4 2x - x^2 dx = -\left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 - \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_2^4$$

Helyettesítsük mindhárom esetben az integrálási határokat a Newton-Leibniz-formulának megfelelően, majd hajtsuk végre a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= -\left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 - \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \\ &= -\left( \left( 0^2 - \frac{0^3}{3} \right) - \left( (-1)^2 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) + \left( \left( 2^2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left( 0^2 - \frac{0^3}{3} \right) \right) - \left( \left( 4^2 - \frac{4^3}{3} \right) - \left( 2^2 - \frac{2^3}{3} \right) \right) = \\ &= -\left( 0 - \left( 1 + \frac{1}{3} \right) \right) + \left( \left( 4 - \frac{8}{3} \right) - 0 \right) - \left( \left( 16 - \frac{64}{3} \right) - \left( 4 - \frac{8}{3} \right) \right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \left( -\frac{16}{3} - \frac{4}{3} \right) = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

Amint látható, minél több helyen metszi a függvény grafikonja az adott intervallumon belül a  $x$ -tengelyt, annál több részben kell számolnunk a területet. Mindig figyeljünk oda arra, hogy mely részintervallumokon halad a függvény grafikonja a  $x$ -tengely alatt. Ezeken a részekben az integrál abszolút értékét kell vennünk, azaz szorozni kell az integrált  $-1$ -gyel.

**7. feladat:** Az euró árfolyama (forintban) az elmúlt hónapban az

$$f(t) = 0,0003t^3 - 0,0136t^2 + 0,016t + 308,733$$

függvény szerint alakult. Mennyi volt az euró átlagárfolyama az elmúlt hónapban?

**Megoldás:** Az árfolyam ingadozását ismerjük az idő függvényében. Az átlagot megkapjuk, ha a  $f$ -nek vesszük a határozott integrálját az adott időintervallumon, majd a kapott értéket osztjuk az intervallum hosszával. Számoljuk ki először a határozott integrált.

$$\begin{aligned} &\int_0^{30} 0,0003t^3 - 0,0136t^2 + 0,016t + 308,733dt = \\ &\left[ 0,000075t^4 - 0,004533t^3 + 0,008t^2 + 308,733t \right]_0^{30} = 9207,54 \end{aligned}$$

A kapott értéket osszuk el az intervallum hosszával:

$$\frac{1}{30} \int_0^{30} 0,0003t^3 - 0,0136t^2 + 0,016t + 308,733dt = 306,918\text{ Ft}$$

**Ellenőrző kérdések:**

**1. kérdés:** Határozzuk meg az  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  függvény grafikonja és az  $x$ -tengely közötti alakzat területét a  $[0, 8]$  intervallumon.

Válasz: 12

2. kérdés:  $\int_1^{16} x^4 \sqrt{x} dx$

Válasz:  $\frac{2044}{9}$

3. kérdés:  $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

Válasz: 4

4. kérdés: Határozzuk meg az  $f(x) = \sin x$  függvény grafikonja és az  $x$ -tengely közötti alakzat területét a  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$  intervallumon.

Válasz:  $\frac{1}{2}$

5. kérdés: Határozzuk meg az  $f(x) = 4 - x^2$  függvény grafikonja és az  $x$ -tengely közötti alakzat területét a  $[0, 3]$  intervallumon.

Válasz:  $\frac{23}{3}$

6. kérdés: Határozzuk meg az  $f(x) = x^2 + 3x$  függvény grafikonja és az  $x$ -tengely közötti alakzat területét a  $[-5, 1]$  intervallumon.

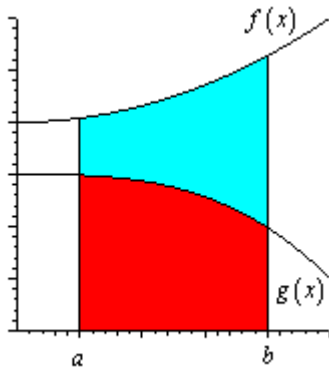
Válasz: 8

**Elméleti összefoglaló:** A határozott integrál nem csak olyan alakzatok területének meghatározását teszi lehetővé, melyek egy függvény grafikonja és az  $x$ -tengely között helyezkednek el, hanem más görbékkel határolt alakzatokét is. Ha például a folytonos  $f(x)$  és  $g(x)$  függvények grafikonjai nem metszik egymást az  $[a, b]$  intervallum belsejében, akkor a függvények grafikonjai, valamint az  $x = a$  és  $x = b$  egyenesek által határolt síkrész területe, vagy máképp fogalmazva a függvények grafikonjai közti terület az  $[a, b]$  intervallumon a következő:

$$T = \left| \int_a^b f(x) - g(x) dx \right|.$$

Ha tudjuk, hogy az  $[a, b]$ -n  $f(x) \geq g(x)$ , akkor az abszolút érték elhagyható, hiszen  $f(x) - g(x)$  nem negatív értékű függvény az  $[a, b]$ -n. Az állítás helyességét az egyszerűség

kedvéért  $f(x)$  és  $g(x)$   $[a,b]$ -n pozitív függvények esetén az alábbi ábra segítségével láthatjuk be.



Ezen látható, hogy az  $\int_a^b f(x) dx$  megadja a pirossal és kékkel jelölt alakzatok területének

összegét, az  $\int_a^b g(x) dx$  pedig csak a piros alakzat területét. A kékkel jelölt síkrész területe így

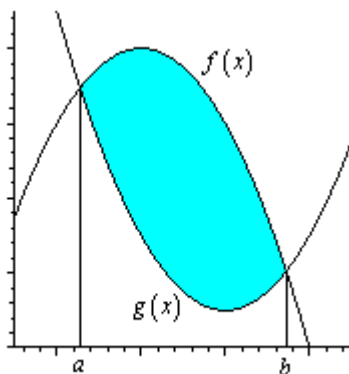
a kettő különbsége, tehát:  $T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$ . A határozott integrál tulajdonságai

között szerepelt, hogy azonos intervallumon vett integrálok különbsége megegyezik a függvények különbségének integráljával, azaz:

$$T = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

Két függvény grafikonja közti területet tehát úgy kapjuk, hogy a nem kisebb függvényből kivonjuk a nem nagyobbat, s különbséget integráljuk.

Lényegében ugyanígy járhatunk el, ha két függvény grafikonja által közrezárt síkrész területe a kérdés. Az ilyen alakzat a grafikonok metszéspontjai között helyezkedik el, amint az alábbi ábrán látható.



Ilyenkor először meg kell oldanunk az  $f(x) = g(x)$  egyenletet. Ezzel kapjuk meg a metszéspontok helyét, azaz  $a$ -t és  $b$ -t. Ezek után az  $[a,b]$ -n nem kisebb függvényből kivonjuk a nem nagyobbat, s különbséget integráljuk  $[a,b]$ -n.

**Kidolgozott feladatok:**

**15. feladat:** Mekkora az  $f(x) = 4x - x^2 + 1$  és  $g(x) = \frac{1}{x}$  függvények grafikonjai közötti terület az  $[1, 4]$  intervallumon.

**Megoldás:** Készítsünk egy ábrát a két függvényről a megadott intervallumon. Ha kiszámoljuk a két függvény értékét az intervallum végpontjaiban, akkor a görbék jelleg alapján könnyű elkészíteni az ábrát.

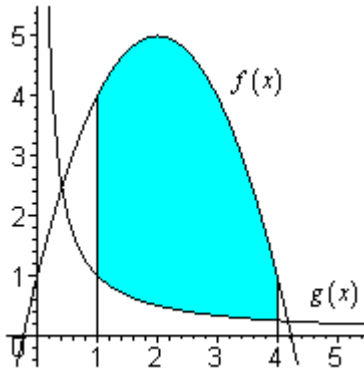
$$f(1) = 4 \cdot 1 - 1^2 + 1 = 4$$

$$f(4) = 4 \cdot 4 - 4^2 + 1 = 1$$

$$g(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$g(4) = \frac{1}{4}$$

Az  $f(x)$  grafikonja egy konkáv parabola,  $g(x)$  grafikonja pedig hiperbola. Illesszünk ilyen görbéket a meghatározott pontokra.



Amint látható, a megadott intervallumon belül nem metszi egymást a két függvény. Így egyszerűen vennünk kell a két függvény különbségét, s azt kell integrálnunk a megadott intervallumon. Mivel tudjuk, hogy az adott intervallumban  $f(x) > g(x)$ , így ha az  $f(x) - g(x)$  különbséget vesszük, akkor nincs szükség abszolút értékre.

$$T = \int_1^4 \left(4x - x^2 + 1\right) - \frac{1}{x} dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = \int_1^4 \left(4x - x^2 + 1\right) - \frac{1}{x} dx = \left[ 2x^2 - \frac{x^3}{3} + x - \ln x \right]_1^4$$

Helyettesítsük be az integrálási határokat, és vegyük a helyettesítési értékek különbségét, és végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= \left[ 2x^2 - \frac{x^3}{3} + x - \ln x \right]_1^4 = \left( 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} + 4 - \ln 4 \right) - \left( 2 \cdot 1^2 - \frac{1^3}{3} + 1 - \ln 1 \right) = \\ &= \left( 32 - \frac{64}{3} + 4 - \ln 4 \right) - \left( 2 - \frac{1}{3} + 1 - 0 \right) = 12 - \ln 4 \approx 10.61 \end{aligned}$$

A kérdéses terület tehát közelítőleg 10.61 egység.

**17. feladat:** Mekkora területű síkrészt zárnak közre az  $f(x) = x^2 - 1$  és  $g(x) = 1 - x$  függvények grafikonjai?

Megoldás: Mivel két görbe által közrezárt síkrész területe a kérdés, ezért meg kell határoznunk a metszéspontjaikat. Oldjuk meg tehát az  $f(x) = g(x)$  egyenletet.

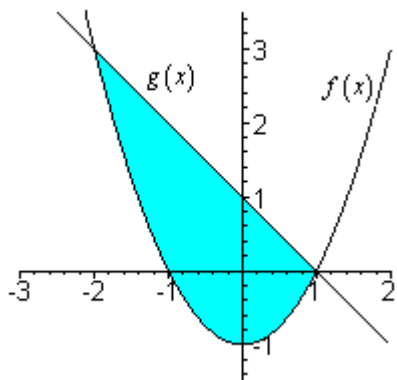
$$x^2 - 1 = 1 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

A kért területet ezután úgy kaphatjuk, hogy a két függvény különbségét integráljuk a két metszéspont között, azaz a  $[-2, 1]$  intervallumon, s vesszük az integrál abszolút értékét. Ha azonban el tudjuk dönteni, melyik függvény nagyobb az intervallum belsejében, és a nagyobb értékű függvényből vonjuk ki a kisebb értékűt, akkor nincs szükség az abszolút értékre. Ha készítünk egy ábrát, akkor arról ezt le tudjuk majd olvasni. Az intervallum végpontjaiban a két függvény most ugyanazon értékeket veszi fel. Mivel  $g(x)$  az egyszerűbb, így ebbe célszerű helyettesíteni.

$$f(-2) = g(-2) = 1 - (-2) = 3$$

$$f(1) = g(1) = 1 - 1 = 0$$

Az  $f(x)$  másodfokú függvény, grafikonja konvex parabola,  $g(x)$  elsőfokú, grafikonja egyenes. Ezek után már könnyű egy jó ábrát készíteni.



A  $[-2, 1]$  intervallum belsejében láthatóan  $g(x) > f(x)$ , ezért a  $g(x) - f(x)$  függvényt integráljuk, s így nem lesz szükség abszolút értékre.

$$T = \int_{-2}^1 (1 - x) - (x^2 - 1) dx = \int_{-2}^1 2 - x - x^2 dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = \int_{-2}^1 2 - x - x^2 dx = \left[ 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1$$

Helyettesítsük a határokat, és vegyük a helyettesítési értékek különbségét, és végezzük el a műveleteket.

$$\begin{aligned} T &= \left[ 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 = \left( 2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) - \left( 2 \cdot (-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3} \right) = \\ &= \left( 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left( -4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = 4.5 \end{aligned}$$

A két grafikon által közrezárt terület tehát 4.5 egység.

### Ellenőrző kérdések:

**1. kérdés:** Mekkora az  $f(x) = \frac{4}{x}$  és  $g(x) = 5 - x$  függvények grafikonjai közti alakzat területe a  $[1, 3]$  intervallumon?

Válasz:  $6 - 4 \cdot \ln 3$

**2. kérdés:** Mekkora területű síkrészt zárnak közre az  $f(x) = x^2$  és  $g(x) = 2 - x$  függvények grafikonjai?

Válasz:  $\frac{9}{2}$

**3. kérdés:** Mekkora területű síkrészt zárnak közre az  $f(x) = x^2$  és  $g(x) = 3x$  függvények grafikonjai?

Válasz: 4.5

### További kidolgozott feladatok:

**1. feladat:**  $\int \sqrt{x}(8x - 5\sqrt[3]{x}) dx$

**Megoldás:** Az integrandusunk most egy szorzat. Amint az korábban szerepelt, ilyen esetben nincs általánosan alkalmazható integrálási szabály. Át kellene ezért alakítanunk úgy a függvényt, hogy már ne szerepeljen szorzás. Amint a korábbiakban, írjuk át most is a gyököket törtkitevős hatvánnyá, majd végezzük el a szorzást, azaz bontsuk fel a zárójelet.

$$\int \sqrt{x}(8x - 5\sqrt[3]{x}) dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left( 8x - 5x^{\frac{1}{3}} \right) dx = \int 8x^{\frac{1}{2}} x - 5x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} dx$$

Az integrandus mindkét tagjában azonos alapú hatványok szorzata áll, melyeket egyetlen hatványként is írhatunk. A kitevők ekkor összeadódnak.

$$\int 8x^{\frac{1}{2}} x - 5x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} dx = \int 8x^{\frac{1}{2}+1} - 5x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} dx = \int 8x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{5}{6}} dx$$

Sikerült elérnünk, hogy már nincs függvények szorzása, hanem csak különbsége. Ekkor tagonként integrálhatunk. Az egyes tagokból a konstans szorzókat kiemelhetjük.

$$\int 8x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{5}{6}} dx = \int 8x^{\frac{3}{2}} dx - \int 5x^{\frac{5}{6}} dx = 8 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 5 \int x^{\frac{5}{6}} dx$$

A két hatványt immár külön-külön integráljuk.

$$8 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 5 \int x^{\frac{5}{6}} dx = 8 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 5 \frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + c = \frac{16}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{30}{11} x^{\frac{11}{6}} + c = \frac{16}{5} \sqrt{x^5} - \frac{30}{11} \sqrt[6]{x^{11}} + c$$



Mivel törtkitevős hatványokat integráltunk, az eredmény most is írható hatványként és gyökös alakban is.

**2. feladat:**  $\int \frac{4x - 9\sqrt{x} + 6}{x^2} dx$

**Megoldás:** Az integrálandó függvény most egy tört. Sajnos a törtekre sincsen minden esetben használható integrálási szabály. A függvényt ezért ismét átalakítjuk az integrálás előtt. Első lépésben a gyököt írjuk hatványként.

$$\int \frac{4x - 9\sqrt{x} + 6}{x^2} dx = \int \frac{4x - 9x^{\frac{1}{2}} + 6}{x^2} dx$$

Mivel a tört számlálójában összeg illetve különbség áll, a törtet több törtre bonthatjuk úgy, hogy az egyes tagokat külön-külön osztjuk a nevezővel.

$$\int \frac{4x - 9x^{\frac{1}{2}} + 6}{x^2} dx = \int \frac{4x}{x^2} dx - \int \frac{9x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + \int \frac{6}{x^2} dx$$

A konstans szorzókat ezután kiemelhetjük az egyes integrálokból.

$$\int \frac{4x}{x^2} dx - \int \frac{9x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + \int \frac{6}{x^2} dx = 4 \int \frac{x}{x^2} dx - 9 \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + 6 \int \frac{1}{x^2} dx$$

Az első két tagban azonos alapú hatványok hányadosa áll, amiket egyetlen hatvánnyá alakíthatunk. Ekkor a kitevők különbségét kell vennünk. A harmadik tagban egy hatvány reciproka szerepel, amit negatív kitevős hatványként írhatunk.

$$\begin{aligned} 4 \int \frac{x}{x^2} dx - 9 \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx + 6 \int \frac{1}{x^2} dx &= 4 \int x^{1-2} dx - 9 \int x^{\frac{1}{2}-2} dx + 6 \int x^{-2} dx = \\ &= 4 \int x^{-1} dx - 9 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{-2} dx \end{aligned}$$

Már csak egy-egy hatványt kell integrálnunk. Vigyázzunk azonban, mert az első tagban éppen  $x^{-1}$  áll, aminek integrálása különbözik a többi hatvány integrálásától. Éppen ezért, ez ne is írjuk hatványként, hanem inkább  $\frac{1}{x}$  alakban.

$$4 \int \frac{1}{x} dx - 9 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{-2} dx$$

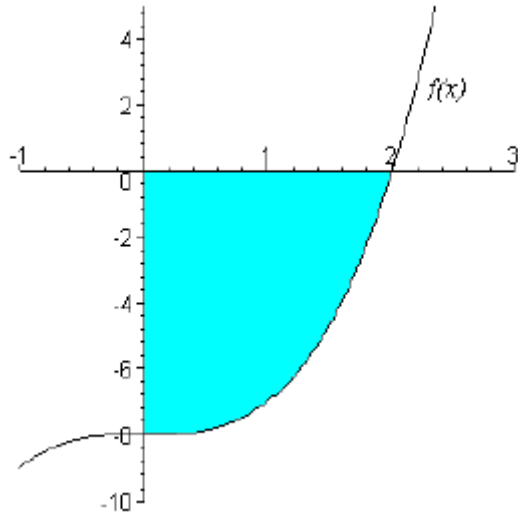
Most hajtsuk végre az integrálásokat.

$$\begin{aligned} 4 \int \frac{1}{x} dx - 9 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 6 \int x^{-2} dx &= 4 \ln|x| - 9 \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 6 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \\ &= 4 \ln|x| - 9 \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 6 \frac{x^{-1}}{-1} + c = 4 \ln|x| + 18x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-1} + c = 4 \ln|x| + \frac{18}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x} + c \end{aligned}$$

Mint általában az ilyen feladatoknál, az eredmény most is több alakban adható meg.

**3. feladat:** Határozzuk meg azon véges síkrész területét, melyet a koordinátarendszer két tengelye és az  $f(x) = x^3 - 8$  függvény grafikonja határol.

**Megoldás:** Készítsünk egy ábrát a függvényről, hogy láthassuk, hogyan is helyezkedik el a kérdéses alakzat a koordinátarendszerben. Az ábrázolás könnyű, hiszen az  $x^3$  grafikonját kell 8-cal lefelé eltolnunk az  $y$ -tengely mentén.



Amint látható, a negyedik síknegyedben van olyan síkrész, ami a feladat feltételeinek megfelel. Nyilván szükségünk van arra, hogy meghatározzuk, hol metszi a függvény grafikonja az  $x$ -tengelyt. Az ábráról sejthető, hogy  $x=2$  a zérushely, s ez a függvénybe helyettesítéssel könnyen ellenőrizhető is. Természetesen az  $x^3 - 8 = 0$  egyenletet is megoldhatjuk, s ezzel is igazolhatjuk, hogy 2-nél van a metszéspont. Így egyértelmű, hogy az alakzat a  $[0, 2]$  intervallumon található. Mivel itt a függvény negatív értékeket vesz fel, így a területet a függvény ezen intervallumon vett integráljának  $-1$ -szerese adja.

$$T = -\int_0^2 x^3 - 8 \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényt.

$$T = -\left[ \frac{x^4}{4} - 8x \right]_0^2$$

Helyettesítsünk a Newton-Leibniz-szabályba, és hajtsuk végre a műveleteket.

$$T = -\left( \left( \frac{2^4}{4} - 8 \cdot 2 \right) - \left( \frac{0^4}{4} - 8 \cdot 0 \right) \right) = -((4 - 16) - 0) = 12$$

**4. feladat:** Mekkora területű véges síkrészt zárnak közre az  $f(x) = x^3 + x$  és  $g(x) = 5x$  függvények grafikonjai?

**Megoldás:** Mivel két függvénygrafikonja által közrezárt síkrész területe a kérdés, így először meg kell határoznunk, hol metszik egymást a grafikonok. Oldjuk meg az  $f(x) = g(x)$  egyenletet.

$$x^3 + x = 5x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0$$

Ha az első tényező nulla, akkor az  $x = 0$  megoldást kapjuk.

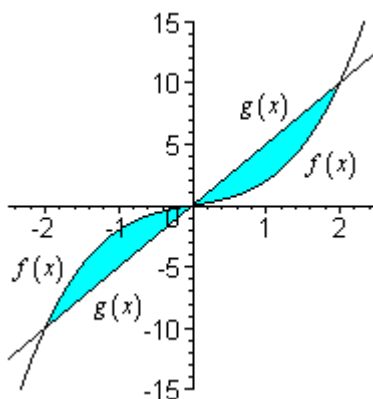
Ha a második tényező nulla, akkor  $x^2 = 4$ , amiből vagy  $x = 2$  vagy  $x = -2$ .

A két függvény grafikonja tehát 3 helyen is metszi egymást. Ez azt jelenti, hogy a két grafikon által közrezárt alakzat két részből áll, mert van közrezárt alakzat az első két metszéspont és a második két metszéspont között is. Ezt jól láthatjuk, ha ábrázoljuk a két függvényt. Az ábrázoláshoz célszerű meghatározni a függvények értékét a metszéspontokban. Ezekben a helyeken a két függvény azonos értéket vesz fel. Mivel  $g(x)$  az egyszerűbb függvény, így célszerű abba helyettesítve számolni.

$$f(-2) = g(-2) = 5 \cdot (-2) = -10$$

$$f(0) = g(0) = 5 \cdot 0 = 0$$

$$f(2) = g(2) = 5 \cdot 2 = 10$$



A kérdéses területe két integrállal határozhatjuk meg. Mivel a  $[-2, 0]$  intervallum belsejében  $f(x) > g(x)$ , ezért ezen az intervallumon integráljuk az  $f(x) - g(x)$  függvényt, s mert a  $[0, 2]$  intervallumon  $g(x) > f(x)$ , ezért ezen az intervallumon integráljuk az  $g(x) - f(x)$  függvényt. A terület a két integrál összege lesz.

$$T = \int_{-2}^0 (x^3 + x) - 5x \, dx + \int_0^2 5x - (x^3 + x) \, dx = \int_{-2}^0 x^3 - 4x \, dx + \int_0^2 4x - x^3 \, dx$$

Határozzuk meg a primitív függvényeket.

$$T = \int_{-2}^0 x^3 - 4x \, dx + \int_0^2 4x - x^3 \, dx = \left[ \frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[ 2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2$$

Helyettesítsük az integrálási határokat a megszokott módon, és végezzük el a műveleteket.

$$T = \left( \left( \frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right) - \left( \frac{(-2)^4}{4} - 2 \cdot (-2)^2 \right) \right) + \left( \left( 2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} \right) - \left( 2 \cdot 0^2 - \frac{0^4}{4} \right) \right) =$$

$$= (0 - (4 - 8)) + ((8 - 4) - 0) = 4 + 4 = 8$$

A közrezárt alakzat területe tehát 8 egység.

A feladatot egy integrál kiszámolásával is megoldhatjuk, ha kihasználjuk azt, hogy a közrezárt alakzat két része szimmetrikus az origóra. Ekkor elég az egyik integrált kiszámolnunk, és annak dupláját venni. Szimmetrikus alakzatok esetén így csökkenthetjük a számolás mennyiségét.

**Ellenőrző kérdések:**

**1. kérdés:**  $\int (x^2 + 3)^2(4 - x) dx$

Válasz:  $-\frac{x^6}{6} + 4\frac{x^5}{5} - 6\frac{x^4}{4} + 24\frac{x^3}{3} - 9\frac{x^2}{2} + 36x + c$

**2. kérdés:**  $\int \frac{(4x+1)(5-x)}{\sqrt[3]{x}} dx$

Válasz:  $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^8} + \frac{57}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

**3. kérdés:** Mekkora annak a véges síkrésznek a területe, melyet a koordinátarendszer két tengelye és az  $f(x) = x^3 + 1$  függvény grafikonja határol?

Válasz:  $\frac{3}{4}$

**4. kérdés:** Mekkora területű véges síkrészt zárnak közre az  $f(x) = x^3 - 4x$  és  $g(x) = -3x$  függvények grafikonjai?

Válasz:  $\frac{1}{2}$