Gradiens vektor, iránymenti derivált

1. B Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ függvény gradiensét a $(-1,2)$ pontban!
   Megoldás: $\nabla f(-1,2) = grad\ f(-1,2) = (0,3)$

2. B Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = 2x + x^3y - y$ függvény gradiensét a $(2,-2)$ pontban!
   Megoldás: $\nabla f(2,-2) = grad\ f(2,-2) = (-22,7)$

3. B Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = \sin(3xy^2)$ függvény gradiensét a $(2,1)$ pontban!
   Megoldás: $\nabla f(2,1) = grad\ f(2,1) = (2,88; 11,52)$

4. B Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = \cos(xy + x^2)$ függvény gradiensét a $(3,1)$ pontban!
   Megoldás: $\nabla f(3,1) = grad\ f(3,1) = (3,76; 1,61)$

5. B, V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = 2\sqrt[3]{x}y + \dfrac{3y}{x} + 4$ kétváltozós függvény gradiensét a $(8,1)$ pontban!
   Megoldás: $\nabla f(8,1) = grad\ f(8,1) = \left(\frac{23}{192}; \frac{35}{8}\right)$

6. B, V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = y \cdot e^{x+2y}$ kétváltozós függvény gradiensét a $(2,-1)$ pontban!
   Megoldás: $\nabla f(2,-1) = grad\ f(2,-1) = (-1;-1)$

7. B, V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = x \cdot \ln(x+y)$ függvény gradiensét a $(3;-2)$ pontban!
   Megoldás: $\nabla f(3,-2) = grad\ f(3,-2) = (3,3)$

8. B, V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = x^3 \cdot (xy^2 - 1)^4$ kétváltozós függvény gradiensét a $(2,-1)$ pontban!
   Megoldás: $\nabla f(2,-1) = grad\ f(2,-1) = (44;-128)$

9. B,V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = y^2 \cdot \sqrt{x^2 + y}$ kétváltozós függvény gradiensét a $(2,-3)$ pontban!
   Megoldás: $\nabla f(2,-3) = grad\ f(2,-3) = \left(18; -\frac{3}{2}\right)$

10. V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = (-2x + 3y - 3) \cdot \ln(3x + 2y - 18)$ kétváltozós függvény gradiensét a $(3,5)$ pontban!
    Megoldás: $\nabla f(3,5) = grad\ f(3,5) = (18,12)$

11. V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = (-3x - 2y - 3) \cdot \sqrt{-10x - 10y + 121}$ kétváltozós függvény gradiensét a $(7,5)$ pontban!
    Megoldás: $\nabla f(7,5) = grad\ f(7,5) = (167,168)$

12. V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = (5x+2y-4)\cdot\sqrt[3]{-15x+15y-29}$ kétváltozós függvény gradiensét a $(3,5)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(3,5) = grad\ f(3,5) = (-100, 107)$

13. V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = (3x-3y-5)\cdot \mathrm{e}^{2x+3y-21}$ kétváltozós függvény gradiensét a $(6,3)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(6,3) = grad\ f(6,3) = (11, 9)$

14. B,V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = \dfrac{xy^4}{2x^3+y^2}$ kétváltozós függvény gradiensét a $(-1,1)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(-1,1) = grad\ f(-1,1) = (5;6)$

15. V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = \dfrac{2x^3-4y}{x^2+3y^3}$ kétváltozós függvény gradiensét a $(-1,1)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f(-1,1) = grad\ f(-1,1) = \left(\frac{3}{4};\frac{19}{8}\right)$

16. V Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = \sin(xy)+\cos(xy)$ kétváltozós függvény gradiensét a $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ pontban!
Megoldás: $\nabla f\left(\frac{\pi}{2},1\right) = grad\ f\left(\frac{\pi}{2},1\right) = \left(-1;-\frac{\pi}{2}\right)$

17. V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ függvény gradiensét a $(3;4)$ pontban!
Megoldás:
$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$
$f_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}; f_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$
$\bigtriangledown f(3,4) = grad\ f(3,4) = \left(\frac{3}{25};\frac{4}{25}\right)$

18. B Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = 2xy^2 - y$ függvény $\underline{u}(1;2)$ irányú iránymenti deriváltját a $(1;-1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(1,-1) = -\frac{8}{\sqrt{5}}$

19. B Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = (x^3y)^2$ függvény $\underline{u} = (-1,1)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1,-1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(1,-1) = -\frac{8}{\sqrt{2}}$

20. B Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = (x^2y^4)^3$ függvény $\underline{u} = (3,-2)$ irányú iránymenti deriváltját az $(-1,1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(1,-1) = -\frac{42}{\sqrt{13}}$

21. B Határozza meg az $f : R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = xe^y - ye^x$ függvény $\underline{u} = (-5,2)$ irányú iránymenti deriváltját az $(0,0)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(0;0) = -\frac{7}{\sqrt{29}}$

22. V Határozza meg az $f: R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = x^2e^{3y} - ye^{2x} + 1$ függvény $\underline{u} = (2,-2)$ irányú iránymenti deriváltját az $(0,0)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(0;0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

23. V Határozza meg az $f: R^2 \to R: f(x,y) = (x+2y)^3$ függvény $\underline{u}(2;1)$ irányú iránymenti deriváltját a $P(1;1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(1,1) = \frac{108}{\sqrt{5}}$

24. V Határozza meg az $f: R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = \left(2x^2 + y^5\right)^3$ függvény $\underline{u} = (2,-3)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1,-1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(2,-3) = -\frac{21}{\sqrt{13}}$

25. V Határozza meg az $f: R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = \dfrac{2x-3y}{4y-3x}$ függvény $\underline{u} = (-3,4)$ irányú iránymenti deriváltját az $(2,1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(2,1) = \frac{11}{20}$

26. V Határozza meg az $f: R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = \dfrac{3x-2y^2}{x^2+y}$ függvény $\underline{u} = (3,1)$ irányú iránymenti deriváltját az $(-1,0)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(-1,0) = -\frac{6}{\sqrt{10}}$

27. V Határozza meg az $f: R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = \sqrt{4x+3y^2}$ függvény $\underline{u} = (1,-1)$ irányú iránymenti deriváltját az $(1,1)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(1,1) = -\frac{1}{\sqrt{14}}$

28. V Határozza meg az $f: R^{\mathbf{2}} \to R, f(x,y) = \sqrt{6x^2-8y^3+41}$ függvény $\underline{u} = (-3,4)$ irányú iránymenti deriváltját az $(-2,2)$ pontban!
Megoldás: $f_{\underline{u}}(-2,2) = -\frac{156}{5}$