Kétváltozós függvény lokális szélsőértékeinek meghatározása

1. B,V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \mathrm{e}^{4x}\sin(2y)$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!
   Megoldás:
   $f_x(x,y) = 4\mathrm{e}^{4x}\sin(2y)$; $f_y(x,y) = 2\mathrm{e}^{4x}\cos(2y)$
   $f_{xx}(x,y) = 16\mathrm{e}^{4x}\sin(2y)$; $f_{xy}(x,y) = 8\mathrm{e}^{4x}\cos(2y)$
   $f_{yx}(x,y) = 8\mathrm{e}^{4x}\cos(2y)$; $f_{yy}(x,y) = -4\mathrm{e}^{4x}\sin(2y)$

2. B,V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \sin(2x+3y)$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!
   Megoldás:
   $f_x(x,y) = 2\cos(2x+3y)$; $f_y(x,y) = 3\cos(2x+3y)$
   $f_{xx}(x,y) = -4\sin(2x+3y)$; $f_{xy}(x,y) = -6\sin(2x+3y)$
   $f_{yx}(x,y) = -6\sin(2x+3y)$; $f_{yy}(x,y) = -9\sin(2x+3y)$

3. B,V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-2y^3}$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!
   Megoldás:
   $f_x(x,y) = 2x\mathrm{e}^{x^2-2y^3}$; $f_y(x,y) = -6y^2\mathrm{e}^{x^2-2y^3}$
   $f_{xx}(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-2y^3}(2+4x^2)$; $f_{xy}(x,y) = -12xy^2\mathrm{e}^{x^2-2y^3}$
   $f_{yx}(x,y) = -12xy^2\mathrm{e}^{x^2-2y^3}$; $f_{yy}(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-2y^3}(-12y+36y^4)$

4. B,V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = \ln(2xy+3y^4)$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!
   Megoldás:
   $f_x(x,y) = \frac{2y}{2xy+3y^4}$; $f_y(x,y) = \frac{2x+12y^3}{2xy+3y^4}$
   $f_{xx}(x,y) = \frac{-4y^2}{(2xy+3y^4)^2}$; $f_{xy}(x,y) = \frac{-18y^4}{(2xy+3y^4)^2}$
   $f_{yx}(x,y) = \frac{-18y^4}{(2xy+3y^4)^2}$; $f_{yy}(x,y) = \frac{24xy^3-36y^6-4x^2}{(2xy+3y^4)^2}$

5. V Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x,y) = x^2\mathrm{e}^{xy^2}$ függvény elsőrendű és másodrendű parciális derivált függvényeit!
   Megoldás:
   $f_x(x,y) = 2x\mathrm{e}^{xy^2} + x^2y^2\mathrm{e}^{xy^2} = \mathrm{e}^{xy^2}(2x+x^2y^2)$; $f_y(x,y) = 2x^3y\cdot\mathrm{e}^{xy^2}$
   $f_{xx}(x,y) = (2+2xy^2)\mathrm{e}^{xy^2} + (2x+x^2y^2)\mathrm{e}^{xy^2}y^2 = \mathrm{e}^{xy^2}(4xy^2+x^2y^4+2)$
   $f_{xy}(x,y) = 2x^2y\mathrm{e}^{xy^2} + (2x+x^2y^2)\mathrm{e}^{xy^2}2xy = \mathrm{e}^{xy^2}(6x^2y+2x^3y^3)$
   $f_{yx}(x,y) = 6x^2y\mathrm{e}^{xy^2} + 2x^3y^3\mathrm{e}^{xy^2} = \mathrm{e}^{xy^2}(6x^2y+2x^3y^3)$
   $f_{yy}(x,y) = 2x^3\mathrm{e}^{xy^2} + 4x^4y^2\mathrm{e}^{xy^2} = \mathrm{e}^{xy^2}(2x^3+4x^4y^2)$

6. B,V Legyen $f : R^2 \to R : f(x,y) = x^3y^2 + xy^3 - 8x + y^2$. Számítsa ki $f_{xxy}(x,y)$ parciális deriváltat!
   Megoldás:
   $f_x(x,y) = 3x^2y^2 + y^3 - 8$; $f_{xx}(x,y) = 6xy^2$; $f_{xxy}(x,y) = 12xy$

7. B Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x, y) = y^3 \mathrm{e}^{x^2 y}$ kétváltozós függvény $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$ másodrendű parciális deriváltjait!
Megoldás:
$f_x(x, y) = 2xy^4 \mathrm{e}^{x^2 y}$
$f_{xx}(x, y) = 2y^4 \mathrm{e}^{x^2 y} + 4x^2 y^5 \mathrm{e}^{x^2 y}$; $f_{xy}(x, y) = 8xy^3 \mathrm{e}^{x^2 y} + 2x^3 y^4 \mathrm{e}^{x^2 y}$

8. B Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x, y) = y^3 e^{x^2 y}$ kétváltozós függvény $f_{yx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ másodrendű parciális deriváltjait!
Megoldás:
$f_y(x, y) = 3y^2 \mathrm{e}^{x^2 y} + y^3 \mathrm{e}^{x^2 y} x^2 = \mathrm{e}^{x^2 y}(3y^2 + x^2 y^3)$
$f_{yx}(x, y) = \mathrm{e}^{x^2 y} 2xy(3y^2 + x^2 y^3) + \mathrm{e}^{x^2 y} 2xy^3$; $f_{yy}(x, y) = \mathrm{e}^{x^2 y} x^2 (3y^2 + x^2 y^3) + \mathrm{e}^{x^2 y}(6y + 3x^2 y^2)$

9. B Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 3y + 1$ kétváltozós függvény stacionárius pontjait!
Megoldás:$(-1, 1)$

10. B Az $f : R^2 \to R : f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 3y + 1$ kétváltozós függvény stacionárius pontja $(-1, 1)$. Döntse el, hogy ez a pont lokális szélsőérték-e és ha igen, milyen jellegű!
Megoldás:lokális minimum hely

11. B Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 4x - 5y + 7$ kétváltozós függvény stacionárius pontjait!
Megoldás:$(-\frac{3}{7}, \frac{16}{7})$

12. B Az $f : R^2 \to R : f(x, y) = -2x^2 - xy + 4x - 3y^2 - 5y + 3$ kétváltozós függvény stacionárius pontja $\left(\frac{29}{23}, -\frac{24}{23}\right)$. Döntse el, hogy ez a pont lokális szélsőérték-e és ha igen, milyen jellegű!
Megoldás:lokális maximum hely

13. B Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x, y) = x^2 + xy + 2x + 3y - 1$ kétváltozós függvény lokális szélsőértékeit!
Megoldás:
Csak stacionárius pontja van $(-3, 4)$, ami nem lokális szélsőérték.

14. B Határozza meg az $f : R^2 \to R : f(x, y) = x^3 + y^2 - xy$ kétváltozós függvény lokális szélsőértékeit!
Megoldás:
Stacionárius pontok:$(0; 0)$, $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right)$
Lokális szélsőérték:$\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right)$

15. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 + 2xy + 6$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D_f = R^2$

$f_x(x, y) = 4x + 2y$; $f_y(x, y) = 2x + 8y$
stacionárius pontok:$(0; 0)$
$f_{xx}(x, y) = 4$; $f_{xy}(x, y) = 2$; $f_{yx}(x, y) = 2$; $f_{yy}(x, y) = 8$
$D(x, y) = 28$
$(0; 0)$-lokális minimum hely, $f(0; 0) = 6$

16. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = 3(x+2)^2 + 4(y-1)^2$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D_f = R^2$
$f_x(x, y) = 6x + 12$; $f_y(x, y) = 8y - 8$
stacionárius pontok:$(-2; 1)$
$f_{xx}(x, y) = 6$; $f_{xy}(x, y) = 0$; $f_{yx}(x, y) = 0$; $f_{yy}(x, y) = 8$
$D(x, y) = 48$
$(-2; 1)$-lokális minimum hely, $f(-2; 1) = 0$

17. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D_f = R^2$
$f_x(x, y) = y - 3x^2$; $f_y(x, y) = x - 2y$
stacionárius pontok:$(0; 0)$, $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right)$
$f_{xx}(x, y) = -6x$; $f_{xy}(x, y) = 1$; $f_{yx}(x, y) = 1$; $f_{yy}(x, y) = -2$
$D(x, y) = 12x - 1$
$(0; 0)$- nem szélsőérték hely
$\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right)$-lokális maximum hely, $f\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{432}$

18. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D(f) = R^2$
$f_x(x, y) = 3x^2 - 3y$; $f_y(x, y) = -3x - 3y^2$
stacionárius pontok:$(0; 0)$, $(-1; 1)$
$f_{xx}(x, y) = 6x$; $f_{xy}(x, y) = -3$; $f_{yx}(x, y) = -3$; $f_{yy}(x, y) = -6y$
$D(x, y) = -36xy - 9$
$(0; 0)$- nem szélsőérték hely
$(-1; 1)$-lokális maximum hely, $f(-1; 1) = 1$

19. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x, y) = x^3 - 8xy + y^3 - 7$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D(f) = R^2$
$f_x(x, y) = 3x^2 - 8y$; $f_y(x, y) = 3y^2 - 8x$
stacionárius pontok:$(0; 0)$, $\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$

$f_{xx}(x,y) = 6x$; $f_{xy}(x,y) = -8$; $f_{yx}(x,y) = -8$; $f_{yy}(x,y) = 6y$
$D(x,y) = 36xy - 64$
$(0;0)$- nem szélsőérték hely
$\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right)$-lokális minimum hely, $f\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3}\right) = -\frac{701}{27}$

20. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = 3x^2 - 30x + y^3 - 6xy - 15y + 8$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D_f = R^2$
$f_x(x,y) = 6x - 30 - 6y$; $f_y(x,y) = 3y^2 - 6x - 15$
stacionárius pontok:$(10;5), (2;-3)$
$f_{xx}(x,y) = 6$; $f_{xy}(x,y) = -6$; $f_{yx}(x,y) = -6$; $f_{yy}(x,y) = 6y$
$D(x,y) = 36y - 36$
$(10;5)$-lokális minimum hely, $f(10;5) = -242$
$(2;-3)$-nem szélsőérték hely

21. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
A függvény értelmezési tartománya az egész sík, kivéve a koordinátatengelyek pontjait, hiszen a nevező miatt sem x, sem y nem lehet nulla.
$f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy} = x^2 + y^2 + 2x^{-1}y^{-1}$
$f_x(x,y) = 2x - \frac{2}{x^2y}$; $f_y(x,y) = 2y - \frac{2}{xy^2}$
stacionárius pontok:$(-1;-1), (1;1)$
$f_{xx}(x,y) = 2 + \frac{4}{x^3y}$; $f_{xy}(x,y) = \frac{2}{x^2y^2}$; $f_{yx}(x,y) = \frac{2}{x^2y^2}$; $f_{yy}(x,y) = 2 + \frac{4}{xy^3}$
$D(x,y) = \left(2 + \frac{4}{x^3y}\right)\left(2 + \frac{4}{xy^3}\right) - \frac{2}{x^2y^2} \cdot \frac{2}{x^2y^2}$
$(-1;-1)$-lokális minimum hely, $f(-1;-1) = 4$
$(1;1)$-lokális minimum hely, $f(1;1) = 4$

22. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^2 + y^4 - 12x - 2y^2$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D_f = R^2$
$f_x(x,y) = 2x - 12$; $f_y(x,y) = 4y^3 - 4y$
stacionárius pontok:$(6;0), (6;1), (6;-1)$
$f_{xx}(x,y) = 2$; $f_{xy}(x,y) = 0$; $f_{yx}(x,y) = 0$; $f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4$
$D(x,y) = 24y^2 - 8$
$(6;0)$- nem szélsőérték hely
$(6;1)$- lokális minimum hely,$f(6,1) = -37$
$(6;-1)$- lokális minimum hely,$f(6,-1) = -37$

23. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = x^2y - xy - y^2$ kétváltozós függvénynek!

Megoldás:
$D_f = R^2$
$f_x(x,y) = 2xy - y; f_y(x,y) = x^2 - x - 2y$
Egyenletrendszer: $\begin{array}{l} 2xy - y = 0 \Rightarrow y(2x-1) = 0 \Rightarrow y = 0, x = \frac{1}{2} \\ x^2 - x - 2y = 0 \end{array}$

stacionárius pontok:$(0;0), (1;0), \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\right)$
$f_{xx}(x,y) = 2y; f_{xy}(x,y) = 2x-1; f_{yx}(x,y) = 2x-1; f_{yy}(x,y) = -2$
$D(x,y) = -4y - (2x-1)(2x-1)$
$(0;0)$- nem szélsőérték hely
$(1;0)$- nem szélsőérték hely
$\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\right)$- lokális maximum hely,$f\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{64}$

24. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 6x - 12y^2$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D_f = R^2$
$f_x(x,y) = 6x^2 + 6y^2 - 6; f_y(x,y) = 12xy - 24y = 0$
Egyenletrendszer: $\begin{array}{l} 6x^2 + 6y^2 - 6 = 0 \\ 12xy - 24y = 0 \Rightarrow 12y(x-2) = 0 \Rightarrow y = 0, x = 2 \end{array}$
$x = 2$ -visszahelyettesítve az első egyenletbe nincs megoldás a valós számok halmazán
stacionárius pontok:$(1;0), (-1;0)$,
$f_{xx}(x,y) = 12x; f_{xy}(x,y) = 12y; f_{yx}(x,y) = 12y; f_{yy}(x,y) = 12x - 24$
$D(x,y) = 12x(12x-24) - 144y^2$
$(1;0)$- nem szélsőérték hely
$(-1;0)$- lokális maximum hely,$f(-1;0) = 4$

25. V Határozza meg hol és milyen szélsőértéke van az $f(x,y) = -x^2 + 2y^3 - xy + 2x - 2y$ kétváltozós függvénynek!
Megoldás:
$D(f) = R^2$
$f_x(x,y) = -2x - y + 2; f_y(x,y) = 6y^2 - x - 2$
stacionárius pontok:$\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right), \left(\frac{11}{8}; -\frac{3}{4}\right)$
$f_{xx}(x,y) = -2; f_{xy}(x,y) = -1; f_{yx}(x,y) = -1; f_{yy}(x,y) = 12y$
$D(x,y) = -24y - 1$
$\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$- nem szélsőérték hely
$\left(\frac{11}{8}; -\frac{3}{4}\right)$-lokális maximum hely, $f\left(\frac{11}{8}; -\frac{3}{4}\right) = \frac{163}{64}$

26. V Határozza meg az $f(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$ kétváltozós függvény lokális szélsőértékeit!
Megoldás:
$D_f = R^2$
$f_x(x,y) = 8xe^y - 8x^3, f_y(x,y) = 4x^2e^y - 4e^{4y}$
stacionárius pontok: $(1,0), (-1,0)$.
$f_{xx}(x,y) = 8e^y - 24x^2, f_{xy}(x,y) = 8xe^y, f_{yx}(x,y) = 8xe^y, f_{yy}(x,y) = 4x^2e^y - 16e^{4y}$

$(1,0)$- lokális maximum hely, $f\,(1,0)=1$
$(-1,0)$- lokális maximum hely, $f\,(-1,0)=1$