Integrálás téglalaptartomány felett

Tanulási cél: A kétszeres integrálok kiszámolásának begyakorlása.

Elméleti összefoglaló

definíció rész

Definíció: Legyen $[a;b]$ és $[c;d]$ két intervallum. Az $[a;b]\times[c;d]$ téglalapon

a következő halmazt értjük:

$$T=[a;b]\times[c;d] = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b, c\le y\le d\}.$$

normál rész

A téglalap tehát a koordinátatengelyekkel párhuzamos téglalapot jelent.

Ha megvan a téglalap fogalma, akkor definiálni tudjuk egy függvény téglalap tartományon vett határozott integrálját, amit szokás *kettős integrál*nak nevezni. Az egyszerűség kedvéért folytonos függvényekkel fogunk foglalkozni.

Tétel: Legyen $f(x,y)$ egy folytonos függvény a $T=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b, c\le y\le d\}$ téglalaptartományon, akkor az $f(x,y)$ kettős integrálja a T tartomány felett visszavezethető egyváltozós függvények határozott integráljának kiszámítására és

$$\iint_T f(x,y)dx\,dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

A tétel azt mondja ki, hogy téglalap tartományon egy f függvény integrálja úgy határozható meg, ha az f függvényt először csak x függvényeként tekintjük (y konstans) és f -t integráljuk x szerint a hozzátartozó határok között. Majd a kapott függvényt integráljuk y szerint. A tétel azt is kimondja, hogy az integrálás sorrendje felcserélhető.

Kidolgozott feladatok

1. feladat: Számolja ki az alábbi kettős integrált!

$$\int_{-1}^{2}\left(\int_0^1 (x+y+2)dx\right)dy$$

Megoldás: A felírt integrálokban a zárójelen belüli integrált belső, a zárójelen kívülit pedig külső integrálnak hívjuk. A számolása során mindig a belső integrált határozzuk meg előbb.

Jelen esetben az x szerinti integrállal kell kezdeni. Az x szerinti integrálásnál y -t konstansnak vesszük, és a határokat pedig x helyére írjuk be.

$$\int_0^1 (x+y+2)dx = \left[\frac{x^2}{2}+yx+2x\right]_0^1 = \left(\frac{1^2}{2}+y\cdot 1+2\cdot 1\right)-\left(\frac{0^2}{2}+y\cdot 0+2\cdot 0\right)=\frac{5}{2}+y$$

Majd következik a második integrál, ahol az y változó szerint integrálunk.

$$\int_{-1}^2 \left(\frac{5}{2}+y\right)dy = \left[\frac{5}{2}y+\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^2 = \left(\frac{5}{2}\cdot 2+\frac{2^2}{2}\right)-\left(\frac{5}{2}\cdot(-1)+\frac{(-1)^2}{2}\right)=9$$

2. feladat: Számítsa ki a következő kettős integrált!

$$\int_1^3 \left(\int_0^2 xy(x^2y^2-1)\,dy\right)dx$$

Megoldás: Először is érdemes felbontani a zárójelet az integrandusban, mert ebben az alakban nehézkes lenne integrálni:

$$\int_1^3 \left(\int_0^2 xy(x^2y^2-1)\,dy\right)dx = \int_1^3 \left(\int_0^2 (x^3y^3-xy)\,dy\right)dx$$

Végezzük el a belső integrálást y szerint. Most az x változót konstansnak tekintjük, és a határokat pedig y helyére írjuk be.

$$\int_0^2 (x^3y^3-xy)\,dy = \left[x^3\frac{y^4}{4}-x\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \left(x^3\cdot\frac{2^4}{4}-x\cdot\frac{2^2}{2}\right)-(x^3\cdot\frac{0^4}{4}-x\cdot\frac{0^2}{2})=4x^3-2x$$

Most következik az x szerinti integrálás.

$$\int_1^3 \left(4x^3-2x\right)dx = \left[x^4-x^2\right]_1^3 = \left(3^4-3^2\right)-(1^4-1^2)=72$$

3. feladat: Számolja ki az alábbi függvény kettős integrálját a $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1; 0\le y\le 2\right\}$ tartományon!

$$f(x,y)=xy$$

Megoldás: Használjuk fel, hogy a kettős integrálás téglalaptartományon kétféleképpen is felírható:

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 (xy)\,dx\right)dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (xy)\,dy\right)dx.$$

Végezzük el a számolást mindkét alakkal.

1. megoldás: $\int_0^2 \left(\int_0^1 (xy)\,dx\right)dy$

Jelen esetben az x szerinti integrállal kell kezdeni:

$$\int_0^1 (xy)dx = \left[\frac{x^2}{2}y\right]_0^1 = \frac{1^2}{2}y - \frac{0}{2}y = \frac{y}{2}.$$

Az x szerinti integrálásnál y -t konstansnak tekintettük, és a határokat pedig csak x helyére írtuk be.

Majd következik a második integrál:

$$\int_0^2 \frac{y}{2}dy = \left[\frac{y^2}{4}\right]_0^2 = \frac{2^2}{4} - 0 = 1.$$

Végezzük el a számolást a másik sorrendben is!

2. megoldás: $\int_0^1\left(\int_0^2 (xy)\,dy\right)dx = \int_0^1\left[x\frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx = \int_0^1\left(x\cdot\frac{2^2}{2} - x\cdot\frac{0}{2}\right)dx = \int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1^2 - 0 = 1$

Ez is ugyan azt a végeredményt adja, ahogy vártuk.

3. megoldás: Ha téglalap alakú tartományon az integrandus szorzat, vagyis $f(x)g(y)$ alakú, akkor alkalmazható a következő integrálási szabály:

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x)g(y)\,dx\right)dy = \int_a^b g(y)dy \cdot \int_c^d f(x)dx$$

Alkalmazzuk a tételt erre az esetre és számoljuk ki az integrált harmadszor is:

$$\int_0^2\left(\int_0^1 (xy)\,dx\right)dy = \left(\int_0^2 y\,dy\right)\cdot\left(\int_0^1 x\,dx\right) = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

4. feladat: Számolja ki az alábbi függvény kettős integrálját a $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2\le x\le 0; 1\le y\le 2\right\}$ tartományon!

$$f(x,y) = 2x - 3y$$

Megoldás: Mivel a határok fixek, a tartomány téglalap alakú.

Ezért

$$\int_{-2}^0\left(\int_1^2 (2x-3y)\,dy\right)dx = \int_1^2\left(\int_{-2}^0 (2x-3y)\,dx\right)dy$$

Végezzük el a számolást a következő alakban:

$$\int_{-2}^0\left(\int_1^2 (2x-3y)\,dy\right)dx = \int_{-2}^0\left[2xy - \frac{3}{2}y^2\right]_1^2 dx =$$

$$\int_{-2}^{0}\left[(4x-6)-\left(2x-\frac{3}{2}\right)\right]dx=\int_{-2}^{0}\left(2x-\frac{9}{2}\right)dx=$$

$$\left[x^2-\frac{9}{2}x\right]_{-2}^{0}=0-\left(4+\frac{9}{2}\cdot 2\right)=-13$$

5. feladat: Számolja ki az alábbi függvény kettős integrálját a $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le \ln 3;0\le y\le \ln 4\right\}$ tartományon!

$$f(x,y)=e^{2x-y}$$

Megoldás: Mivel a határok fixek, a tartomány téglalap alakú.

Ezért

$$\int_0^{\ln 4}\left(\int_0^{\ln 3}e^{2x-y}\,dx\right)dy=\int_0^{\ln 3}\left(\int_0^{\ln 4}e^{2x-y}\,dy\right)dx$$

Végezzük el a számolást a következő alakban:

$$\int_0^{\ln 4}\left(\int_0^{\ln 3}e^{2x-y}\,dx\right)dy=\int_0^{\ln 4}\left[\frac{1}{2}\cdot e^{2x-y}\right]_0^{\ln 3}dy=\int_0^{\ln 4}\left(\frac{1}{2}\cdot e^{2\ln 3-y}-\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot 0-y}\right)dy$$

Mivel $e^{2\cdot\ln 3-y}=e^{2\cdot\ln 3}\cdot e^{-y}=\left(e^{\ln 3}\right)^2\cdot e^{-y}=3^2e^{-y}=9e^{-y}$, ezért

$$\int_0^{\ln 4}\left(\frac{9}{2}\cdot e^{-y}-\frac{1}{2}\cdot e^{-y}\right)dy=\int_0^{\ln 4}4e^{-y}dy=\left[4\cdot\frac{1}{-1}\cdot e^{-y}\right]_0^{\ln 4}=\left[-4\cdot e^{-y}\right]_0^{\ln 4}=$$

$$-4\cdot e^{-\ln 4}+4e^0=-4\cdot\left(e^{\ln 4}\right)^{-1}+4\cdot 1=-4\cdot\frac{1}{4}+4=3$$

6. feladat: Számolja ki az alábbi függvény kettős integrálját a $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le 1;1\le y\le 2\right\}$ tartományon!

$$f(x,y)=(2x+3y)^4$$

Megoldás: Mivel a határok fixek, a tartomány téglalap alakú.

Ezért

$$\int_1^2\left(\int_0^1(2x+3y)^4\,dx\right)dy=\int_0^1\left(\int_1^2(2x+3y)^4\,dy\right)dx$$

Végezzük el a számolást a következő alakban:

$$\int_1^2\left(\int_0^1 (2x+3y)^4\,dx\right)dy=\int_1^2\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3y)^5}{5}\right]_0^1 dy=\int_1^2\left[\frac{1}{10}\cdot(2x+3y)^5\right]_0^1 dy=$$

$$\int_1^2\left(\frac{1}{10}\cdot(2+3y)^5-\frac{1}{10}\cdot(0+3y)^5\right)dy=\int_1^2\left(\frac{1}{10}(2+3y)^5-\frac{243}{10}y^5\right)dy=$$

$$\left[\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{(2+3y)^6}{6}-\frac{243}{10}\cdot\frac{y^6}{6}\right]_1^2=\left[\frac{1}{180}(2+3y)^6-\frac{123}{60}y^6\right]_1^2=1114,4$$

7. feladat: Számolja ki az alábbi függvény kettős integrálját a $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le\frac{1}{2};0\le y\le\pi\right\}$ tartományon!

$$f(x,y)=x\cos(xy)$$

Megoldás: Ezt a kettős integrált ismét kétféleképpen lehet felírni kétszeres integrálként, hiszen most is téglalap alakú tartományon integrálunk.

Vagy

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi} x\cos(xy)dy\right)dx,$$

vagy

$$\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos(xy)\,dx\right)dy$$

alakban írhatjuk fel ezt a kettős integrált. Azonban kis vizsgálódás után észrevehetjük, hogy a két sorrendben nem azonos nehézségű integrálokat kell elvégezni. A második felírás esetén az x szerinti integrál elvégzése nagyon nehéz és hosszadalmas lenne, míg az első felírási módban az y szerinti integrál gond nélkül elvégezhető. Szélsőséges esetben elképzelhető, hogy egy kétszeres integrálnak nem létezik zárt alakban megadható primitív függvénye az integrálás adott sorrendje mellett, de a sorrendet felcserélve az integrálás elvégezhető.

Induljuk ki emiatt az első felírásból:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\pi} x\cos(xy)dy\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[x\cdot\frac{1}{x}\cdot\sin(xy)\right]_0^{\pi}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\sin(xy)\right]_0^{\pi}dx=$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sin(x\cdot\pi)-\sin(x\cdot 0)\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sin(x\pi)\,dx,$$

hiszen $\sin(x\cdot 0)=0$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin\left(x\pi\right) = \left[-\cos\left(x\pi\right)\cdot\frac{1}{\pi}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\pi\right)\cdot\frac{1}{\pi} + \cos\left(0\cdot\pi\right)\cdot\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

hiszen $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$