

## Integrálás téglalaptartomány felett

1. **B** Számolja ki az alábbi kettős integrált!

$$\int_{-1}^2 \left( \int_0^1 (x + y + 2) dx \right) dy$$

**Megoldás:** 9

2. **B** Számolja ki az alábbi kettős integrált!

$$\int_{-1}^1 \left( \int_0^2 (x^2 - 3y - 1) dx \right) dy$$

**Megoldás:**  $\frac{4}{3}$

3. **B** Számolja ki az alábbi kettős integrált!

$$\int_{-1}^3 \left( \int_1^2 xy(x - y) dy \right) dx$$

**Megoldás:**  $\frac{14}{3}$

4. **B, V** Számolja ki az alábbi kettős integrált!

$$\int_2^5 \left( \int_1^3 x^2 y (xy^2 - 2) dy \right) dx$$

**Megoldás:** 2733

5. **B, V** Számolja ki az alábbi kettős integrált!

$$\int_{-1}^2 \left( \int_{-2}^1 (2x + y)^2 dy \right) dx$$

**Megoldás:** 36

6. **B** Számolja ki az  $f(x, y) = xy^2$  függvény kettős integrálját a  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; -3 \leq y \leq 2\}$  tartományon!

**Megoldás:**  $\frac{35}{6}$

7. **B** Számolja ki az  $f(x, y) = x^3y$  függvény kettős integrálját a  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 3; 1 \leq y \leq 2\}$  tartományon!

**Megoldás:** 30

8. **B** Számolja ki az  $f(x, y) = 2x - 3y$  függvény kettős integrálját a  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0; -1 \leq y \leq 3\}$  tartományon!

**Megoldás:** -40

9. **B** Számolja ki az  $f(x, y) = 5x - 2y^2$  függvény kettős integrálját a  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2; -2 \leq y \leq 3\}$  tartományon!

**Megoldás:**  $-\frac{65}{2}$

10. **B, V** Számolja ki az  $f(x, y) = x - 3y + 5$  függvény kettős integrálját a  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0; 1 \leq y \leq 2\}$  tartományon!

**Megoldás:** -1

11. **B, V** Határozza meg az  $f(x, y) = xy(x^2y^2 - 1)$  függvény kettős integrálját a  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2\}$  tartományon!

**Megoldás:**

$$\int_0^2 \left( \int_1^3 (x^3y^3 - xy) dx \right) dy = \int_1^3 \left( \int_0^2 (x^3y^3 - xy) dy \right) dx$$

$$\int_0^2 (x^3y^3 - xy) dy = \left[ x^3 \cdot \frac{y^4}{4} - x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \left[ \frac{1}{4}x^3y^4 - \frac{1}{2}xy^2 \right]_0^2 = 4x^3 - 2x$$

$$\int_1^3 \left( \int_0^2 (x^3y^3 - xy) dy \right) dx = \int_1^3 (4x^3 - 2x) dx = \left[ x^4 - x^2 \right]_1^3 = 72$$

12. **V** Számolja ki az  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = e^{2x-y}$  függvény kettős integrálját a  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \ln 3; 0 \leq y \leq \ln 4\}$  tartományon!

**Megoldás:** 3

13. **V** Számolja ki az  $f(x, y) = e^{2y-3x}$  függvény kettős integrálját a  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \ln 2; 0 \leq y \leq \ln 3\}$  tartományon!

**Megoldás:**  $\frac{7}{6}$

14. **V** Határozza meg az  $f(x, y) = (4x - y)^5$  függvény kettős integrálját a  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 2\}$  tartományon!

**Megoldás:** -1189

15. **V** Határozza meg az  $f(x, y) = (2x + 4y)^3$  függvény kettős integrálját a  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 3\}$  tartományon!

**Megoldás:** 3192

16. **V** Határozza meg az  $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^4}$  függvény kettős integrálját a  $\{(x, y) \in R^2 : 3 \leq x \leq 7; -2 \leq y \leq -1\}$  tartományon!

**Megoldás:**

$$\begin{aligned} \int_3^7 \left( \int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+y)^4} dy \right) dx &= \int_{-2}^{-1} \left( \int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4} dx \right) dy \\ \int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4} dx &= \int_3^7 (x+y)^{-4} dx = \left[ -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x+y)^3} \right]_3^7 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(7+y)^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3+y)^3} \\ \int_{-2}^{-1} \left( \int_3^7 \frac{1}{(x+y)^4} dx \right) dy &= \int_{-2}^{-1} \left( -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(7+y)^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3+y)^3} \right) dy = \\ \int_{-2}^{-1} \left( -\frac{1}{3} \cdot (7+y)^{-3} + \frac{1}{3} \cdot (3+y)^{-3} \right) dy &= \left[ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(7+y)^2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(3+y)^2} \right]_{-2}^{-1} = \frac{83}{675} \end{aligned}$$

17. **V** Számolja ki az  $f(x, y) = x \cos(xy)$  függvény kettős integrálját a  $\{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; 0 \leq y \leq \pi\}$  tartományon!

**Megoldás:**

Az  $x$  szerinti integrál elvégzése nagyon nehéz és hosszadalmas lenne, míg az  $y$  szerinti integrál gond nélkül elvégezhető.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} x \cos(xy) dy &= [\sin(xy)]_0^{\pi} = \sin(\pi x) \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\pi} x \cos(xy) dy \right) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi x) dx = \left[ -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

18. **V** Számolja ki az  $f(x, y) = y \sin(xy)$  függvény kettős integrálját a  $\{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; 0 \leq y \leq \pi\}$  tartományon!

**Megoldás:**

Az  $y$  szerinti integrál elvégzése nagyon nehéz és hosszadalmas lenne, míg az  $x$  szerinti integrál gond nélkül elvégezhető.

$$\int_0^{\pi} \left( \int_0^{\frac{1}{2}} y \sin(xy) dx \right) dy = 1,1416$$