Differenciálszámítás

Simonné Szabó Klára

2014. október 31.

Határozza meg a következő hozzárendeléssel adott függvények deriváltfüggvényeit!

1. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 14x - 4}$$

Megoldás:

$$f'(x) = 5 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 3x^2 - 14 - 0 = 20x^3 + 9x^3 - 14$$

2. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = 7\sqrt[5]{x} + \sqrt{x^3} - \sqrt{14}}$$

Megoldás:

$$f(x) = 7x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{14}$$

$$f'(x) = 7 \cdot \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 0 = \frac{7}{5}x^{-\frac{4}{5}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{7}{5\sqrt[5]{x^4}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

3. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = \frac{11}{x} - \frac{\sqrt{3}}{x^4} + \frac{7}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[7]{x^4}}}$$

Megoldás:

$$f(x) = 11x^{-1} - \sqrt{3}x^{-4} + 7x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{4}{7}}$$

$$f'(x) = -11x^{-2} + 4\sqrt{3}x^{-5} - \frac{7}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{8}{7}x^{-\frac{11}{7}} = -\frac{11}{x^2} + \frac{4\sqrt{3}}{x^5} + \frac{7}{2\sqrt{x^3}} - \frac{8}{7\sqrt[7]{x^{11}}}$$

4. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = (x^2 + \sqrt[5]{x^3})(\sqrt{x} - \frac{5}{x})}$$

Megoldás:

$$f(x) = x^2\sqrt{x} - x^2\frac{5}{x} + \sqrt[5]{x^3}\sqrt{x} - \sqrt[5]{x^3}\frac{5}{x} = x^{\frac{3}{2}} - 5x + x^{\frac{11}{10}} - 5x^{-\frac{2}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 5 + \frac{11}{10}x^{\frac{1}{10}} + 5\frac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 5 + \frac{11}{10}\sqrt[10]{x} + \frac{2}{\sqrt[5]{x^7}}$$

5. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = \frac{x^4 + \sqrt[4]{x^5} - 3}{\sqrt{x}}}$$

Megoldás:

$$f(x) = \frac{x^4}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{3}{4}} - 3x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

6. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = \frac{\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}}}{x^2}}$$

Megoldás:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x^3 \cdot x\sqrt[5]{x}}}}{x^2} = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{20} \cdot x}}}}{x^2} = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{21}}}}}{x^2} = \frac{\sqrt[30]{x^{21}}}{x^2} = x^{-\frac{39}{30}} = x^{-\frac{13}{10}}$$

$$f'(x) = -\frac{13}{10}x^{-\frac{23}{10}} = -\frac{13}{10\sqrt[10]{x^{23}}}$$

7. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = 5e^x - 4^x - \ln x - \log_2 x + e^2 - \ln 3}$$

Megoldás:

$$f'(x) = 5e^x - 4^x \ln 4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x\ln 2} + 0 - 0$$

8. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = (3\sin x + \sqrt{x})(\log_5(x) - \operatorname{tg} x)}$$

Megoldás:

$$f'(x) = (3\sin x + \sqrt{x})'(\log_5(x) - \operatorname{tg} x) + (3\sin x + \sqrt{x})(\log_5(x) - \operatorname{tg} x)' =$$

$$= (3\cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}})(\log_5(x) - \operatorname{tg} x) + (3\sin x + \sqrt{x})\left(\frac{1}{x\ln 5} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

9. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = \frac{\sin x}{4e^x + 2x}}$$

Megoldás:

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'(4e^x + 2x) - \sin x(4e^x + 2x)'}{(4e^x + 2)^2} = \frac{\cos x(4e^x + 2x) - \sin x(4e^x + 2)}{(4e^x + 2)^2}$$

10. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2 \ln x}{7 - 2x}}$$

Megoldás:

$$f'(x) = \frac{(x^2\ln x)'(7 - 2x) - x^2\ln x(7 - 2x)'}{(7 - 2x)^2} =$$

$$= \frac{(2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x})(7 - 2x) - x^2\ln x(-2)}{(7 - 2x)^2} = \frac{(2x\ln x + x)(7 - 2x) + 2x^2\ln x}{(7 - 2x)^2}$$

11. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = \sqrt{3x-2} - e^{2-x}}$$

Megoldás:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x-2}} \cdot 3 - e^{2-x} \cdot (-1) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} + e^{2-x}$$

12. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$$

Megoldás:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)' = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x-(x+1)}{x^2} = \frac{-1}{x(x+1)}$$

13. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = \cos(4-x)(\ln 5x + \sqrt{6x+1})}$$

Megoldás:

$$f'(x) = \cos(4-x)'(\ln 5x + \sqrt{6x+1}) + \cos(4-x)(\ln 5x + \sqrt{6x+1})'$$

$$f'(x) = -\sin(4-x)(-1)(\ln 5x + \sqrt{6x+1}) + \cos(4-x)\left(\frac{1}{5x} \cdot 5 + \frac{1}{2\sqrt{6x+1}} \cdot 6\right) =$$

$$= \sin(4-x)(\ln 5x + \sqrt{6x+1}) + \cos(4-x)\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{\sqrt{6x+1}}\right)$$

14. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = (4e^x + 2x)^{10}}$$

Megoldás:

$$f'(x) = 10(4e^x + 2x)^9(4e^x + 2)$$

15. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4x^2+1}}}$$

Megoldás:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4x^2+1}} = \left(\frac{x}{4x^2+1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{4x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{4x^2+1-x\cdot 8x}{(4x^2+1)^2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{4x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1-4x^2}{(4x^2+1)^2}$$

16. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = \mathrm{tg}\,\left(\frac{x-3}{5}\right)}$$

Megoldás:

$$f(x) = \mathrm{tg}\,\left(\frac{1}{5} \cdot x - \frac{3}{5}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x-3}{5}\right)} \cdot \frac{1}{5}$$

17. **Feladat:**

$$\boxed{f(x) = e^{\sqrt{x}\sin x}}$$

Megoldás:

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}\sin x}(\sqrt{x}\sin x)' = e^{\sqrt{x}\sin x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x\right)$$

18. **Feladat:** Írja fel a következő hozzárendeléssel adott függvény x_0 pontjához tartozó érintőjének az egyenletét, ha

$$\boxed{f:]\sqrt{3}, \infty[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = \ln(x^2 - 3) + 6 \text{ és } x_0 = 2}$$

Megoldás: Az f függvény $x_0 = 2$ pontjához tartozó érintőjének egyenlete:

$$g(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-3} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2-3}$$

$$f'(2) = \frac{2^2}{2^2-3} = 4 \qquad \text{és} \qquad f(2) = \ln(2^2-3) + 6 = 6$$

Az érintő egyenlet:

$$g(x) = 4(x-2) + 6$$

19. **Feladat:** Írja fel a következő hozzárendeléssel adott függvény $x_0 = 1$ pontjához tartozó érintőjének az egyenletét, ha

$$\boxed{f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = xe^{x-1} + 4}$$

Megoldás:

$$g(x) = 2(x-1) + 5$$

20. **Feladat:** Számítsa ki az alábbi határértékeket

(a)

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 + x}{e^x + x} =}$$

Megoldás: A határérték $\frac{\infty}{\infty}$ típusú, használjunk L'Hospital szabályt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+x}{e^x+x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{8x+1}{e^x+1} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{8}{e^x} = \frac{8}{\infty} = 0$$

(b)

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(5x+3)}{10-x} =}$$

Megoldás: A határérték $\frac{\infty}{-\infty}$ típusú, használjunk L'Hospital szabályt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(5x+3)}{10-x} = \frac{\infty}{-\infty} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{5x+3}}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

(c)

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2e^{-x}-2}=}$$

Megoldás: A határérték $\frac{0}{0}$ típusú, használjunk L'Hospital szabályt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2e^{-x}-2}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{-2e^{-x}}=\frac{2}{-2}=-1$$

(d)

$$\boxed{\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x+4}-4}{2x-8}=}$$

Megoldás: A határérték $\frac{0}{0}$ típusú, használjunk L'Hospital szabályt:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x+4}-4}{2x-8}=\frac{0}{0}\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 4}\frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{2}=\frac{3}{16}$$

21. **Feladat:** Írja fel a következő hozzárendeléssel adott f függvény x_0 pontjához tartozó másodfokú Taylor polinomját, ha

(a)

$$\boxed{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\setminus\{-1\},\quad f(x)=\frac{2}{x+1}\quad \text{és}\quad x_0=0}$$

Megoldás: Az f függvény $x_0=0$ pontjához tartozó másodfokú Taylor polinomja:

$$T_2(x)=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}x+\frac{f"(2)}{2!}x^2$$
$$f'(x)=(2(x+1)^{-1})'=-2(x+1)^{-2}=\frac{-2}{(x+1)^2}$$
$$f"(x)=(-2(x+1)^{-2})'=4(x+1)^{-3}=\frac{4}{(x+1)^3}$$
$$f'(0)=\frac{-2}{1}=-2\qquad f"(0)=4\qquad f(0)=2$$

A másodfokú Taylor polinom:

$$T_2(x)=2-2x+2x^2$$

(b)

$$\boxed{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x)=x^4+2x^2+5x+2\quad \text{és}\quad x_0=-1}$$

Megoldás:

$$T_2(x)=-3(x+1)+8(x+1)^2$$

(c)

$$\boxed{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x)=x\sin(3x)\quad \text{és}\quad x_0=0}$$

Megoldás:

$$T_2(x)=3x^2$$

(d)

$$\boxed{f: \left]-\frac{1}{3};\infty\right[\to \mathbf{R}, \quad f(x)=\sqrt{3x+1} \quad \text{és} \quad x_0=1}$$

Megoldás:

$$T_2(x) = 2+\frac{3}{4}(x-1)-\frac{3}{64}(x-1)^2$$

22. **Feladat:** Határozza meg a következő hozzárendeléssel adott függvény lokális szélsőérték helyeit!

$$\boxed{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad f(x)=-3x^3+12x+5}$$

Megoldás: Deriváljuk f-et.

$$f'(x) = -9x^2+12$$

Határozzuk meg f' zérushelyeit.

$$-9x^2+12=0 \qquad \to \qquad x^2=\frac{4}{3} \qquad \to \qquad x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Készítsünk táblázatot.

	$x<-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}<x<\frac{2}{\sqrt{3}}$	$x=\frac{2}{\sqrt{3}}$	$x>\frac{2}{\sqrt{3}}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		l. min. hely		l. max. hely	

Lokális maximumhely: $x_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lokális minimumhely: $x_2=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

23. **Feladat:** Határozza meg a következő hozzárendeléssel adott függvény inflexiós pontját!

$$\boxed{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad f(x)=x(x-1)^2}$$

Megoldás: Deriváljuk kétszer f-et.

$$f(x)=x(x-1)^2=x(x^2-2x+1)-=x^3-2x^2+x$$
$$f'(x)=3x^2-4x+1 \qquad f''(x)=6x-4$$

Határozzuk meg f'' zérushelyét.

$$6x-4=0 \qquad \text{ha} \qquad x=\frac{2}{3}$$

Készítsük el a táblázatot.

	$x<\frac{2}{3}$	$x=\frac{2}{3}$	$x>\frac{2}{3}$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	konvex	inflexiós pont	konkáv

A függvénynek inflexiós pontja van az $x=\frac{2}{3}$ pontban.

24. **Feladat:** Hol növekvő a következő hozzárendeléssel adott függvény?

$$\boxed{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad f(x)=e^{x^3+2x^2}}$$

Megoldás: Deriváljuk f-t.

$$f'(x)=e^{x^3+2x^2}(3x^2+4x)$$

$$f'(x)=0,\qquad \text{ha}\qquad 3x^2+4x=x(3x+4)=0\qquad\to\qquad x_1=0\qquad x_2=-\frac{4}{3}$$

	$x<-\frac{4}{3}$	$x=-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}<x<0$	$x=0$	$x>0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	mon. nő		mon.csökk.		mon. nő

Az f függvény szigorúan monoton növekvő a $]-\infty;-\frac{4}{3}[$ és a $]0;\infty[$ intervallumon.

25. **Feladat:** Hol nő, hol csökken és hol van lokális szélsőértéke f függvénynek, ha feltételezzük, hogy az f függvény és deriváltfüggvényének értelmezési tartománya megegyezik és

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2(x+2)^3}{x-1}}$$

Megoldás: $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\backslash\{1\}$. Az $f'(x)=0$, ha $x^2(x+2)^3=0$, azaz, ha $x_1=0$ vagy $x_2=-2$ pontokban.

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	nincs ért.	$+$
$f(x)$	mon. nő	l.max.	mon. csökk.	l.min.	mon. csökk.	nincs ért.	mon. nő

26. **Feladat:** Hol konvex, hol konkáv és hol van inflexiós pontja f függvénynek, ha feltételezzük, hogy az f függvény és második deriváltfüggvényének értelmezési tartománya megegyezik és

$$\boxed{f''(x)=\frac{x(x-4)e^x}{(x+3)^2}}$$

Megoldás: $D_f=D_{f''}=\mathbf{R}\backslash\{-3\}$.

Az $f''(x)=0$, ha $x(x-4)e^x=0$, azaz, ha $x_1=0$ vagy $x_2=4$ pontokban.

	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<0$	$x=0$	$0<x<4$	$x=4$	$x>4$
$f''(x)$	$+$	nincs ért.	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	nincs ért.	konvex	inf. pont	konkáv	inf. pont	konvex

27. **Feladat:** Hol nő, hol csökken és hol van lokális szélsőértéke f függvénynek, ha feltételezzük, hogy az f függvény és deriváltfüggvényének értelmezési tartománya megegyezik és

$$\boxed{f'(x)=\frac{(x-3)^3(x+1)^4}{x^2}e^{2x+3}}$$

Megoldás: $D_f=D_{f'}=\mathbf{R}\backslash\{0\}$. Az $f'(x)=0$, ha $(x-3)^3(x+1)^4=0$, azaz, ha $x_1=3$ vagy $x_2=-1$ pontokban.

	$x<-1$	$x=-1$	$-2<x<0$	$x=0$	$0<x<3$	$x=3$	$x>3$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	mon. csökk.	nincs sz.é	mon. csökk.	nincs ért.	mon. csökk.	l.min.	mon. nő

28. **Feladat:** Hol konvex, hol konkáv és hol van inflexiós pontja f függvénynek, ha feltételezzük, hogy az f függvény és második deriváltfüggvényének értelmezési tartománya megegyezik és

$$\boxed{f''(x) = \frac{x\ln x}{(x-3)^2}}$$

Megoldás: $D_f = D_{f"} = \mathbf{R}^+\backslash\{3\}$.

Az $f"(x) = 0$, ha $x\ln x = 0$, azaz, ha $x = 1$ pontban.

	$0<x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$	$x>3$
$f"(x)$	$-$	0	$+$	nincs ért.	$+$
$f(x)$	konkáv	inf. pont	konvex	nincs ért.	konvex

29. **Vizsgafeladat** Deriválja az alábbi függvényeket!

(a)

$$\boxed{f(x) = \mathrm{tg}(7x^2+2x)\ln^7(x)}$$

Megoldás:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(7x^2+2x)}(14x+2)\ln^7(x) + \mathrm{tg}(7x^2+2x)7\cdot\ln^6(x)\frac{1}{x}$$

(b)

$$\boxed{f(x) = \sqrt[3]{4x+\sin\ln\left(\frac{x^2}{6}\right)}}$$

Megoldás:

$$f(x) = \left(4x+\sin\ln\left(\frac{x^2}{6}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(4x+\sin\ln\left(\frac{x^2}{6}\right)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(4+\cos\ln\left(\frac{x^2}{6}\right)\frac{6}{x^2}\frac{x}{3}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(4x+\sin\ln\left(\frac{x^2}{6}\right)\right)^2}}\cdot\left(4+\cos\ln\left(\frac{x^2}{6}\right)\frac{2}{x}\right)$$

(c)

$$\boxed{f(x) = \frac{\mathrm{ctg}\sqrt{x}-7x}{3xe^{4x}+3\cos x}}$$

Megoldás:

$$f'(x) = \frac{(-\frac{1}{\sin^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-7)(3xe^{4x}+3\cos x)-(\mathrm{ctg}\sqrt{x}-7x)(3e^{4x}+12xe^{4x}-3\sin x)}{(3xe^{4x}+3\cos x)^2}$$

30. **Vizsgafeladat** Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken és hol van lokális szélsőértéke az alábbi függvényeknek?

(a)

$$\boxed{f(x) = 4xe^{-x^2}}$$

Megoldás: $D_f = \mathbf{R}$.

$$f'(x) = 4e^{-x^2} + 4xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(4 - 8x^2)$$

Az $f'(x) = 0$, ha $4 - 8x^2 = 0$, innen $x^2 = \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad x_{1;2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

	$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	mon. csökk.	l.min. hely	mon. nő.	l.max. hely	mon. csökk.

(b)

$$\boxed{f(x) = \frac{2 - x^2}{(x-1)^2}}$$

Megoldás: $D_f = \mathbf{R}\backslash\{1\}$.

$$f'(x) = \frac{-2x(x-1)^2 - (2-x^2)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2x(x-1) - (2-x^2)2}{(x-1)^3} = \frac{2x-4}{(x-1)^3}$$

Az $f'(x) = 0$, ha $2x - 4 = 0$, innen $x = 2$.

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$f'(x)$	$+$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	mon. nő.	nincs ért.	mon. csökk.	l.min. hely	mon. nő.

(c)

$$\boxed{f(x) = \frac{6x}{x^2+1}}$$

Megoldás: $D_f = \mathbf{R}$.

$$f'(x) = \frac{6(x^2+1) - 6x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6 - 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

Az $f'(x) = 0$, ha $6 - 6x^2 = 0$, innen $x = \pm 1$.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	mon. csökk.	l.min.hely	mon. nő.	l.max. hely	mon. csökk.

(d)

$$\boxed{f(x) = \ln(x^2+1)^2}$$

Megoldás: $D_f = \mathbf{R}\backslash\{1\}$.

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x = \frac{4x}{(x^2+1)}$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)}$$

Az $f'(x) = 0$, ha $4x = 0$, innen $x = 0$.

	$x<0$	$x=0$	$0<x$
$f^{'}(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	mon. csökk.	l.min. hely	mon. nő

(e)

$$\boxed{f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}}$$

Megoldás: $D_f=\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

$$f'(x)=2xe^{\frac{1}{x}}+x^2e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2xe^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$$

Az $f'(x)=0$, ha $2x-1=0$, innen $x=\frac{1}{2}$.

	$x<0$	$x=0$	$0<x<0,5$	$x=0,5$	$0,5<x$
$f^{'}(x)$	$-$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$f(x)$	mon. csökk.	nincs ért.	mon. csökk.	l.min. hely	mon. nő.

31. **Vizsgafeladat** Hol van értelmezve, hol konvex, hol konkáv és hol van inflexiós pontja az alábbi függvényeknek?

(a)

$$\boxed{f(x)=e^{x^3}}$$

Megoldás: $D_f=\mathbf{R}$.

$$f'(x)=e^{x^3}\cdot 3x^2 \qquad f"(x)=e^{x^3}\cdot 9x^4+e^{x^3}\cdot 6x=e^{x^3}(9x^4+6x)$$

Az $f"(x)=0$, ha

$$9x^4+6x=x(9x^3+6)=0 \qquad \to \qquad x_1=0 \quad \text{és} \quad x_2=\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}\approx -0,87$$

.

	$x<\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$	$x=\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$	$\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}<x<0$	$x=0$	$0<x$
$f^{'}(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	inf. pont	konkáv	inf. pont	konvex

(b)

$$\boxed{f(x)=4x^2+\frac{2}{x}}$$

Megoldás: $D_f=\mathbf{R}\backslash\{0\}$.

$$f'(x)=8x-\frac{2}{x^2} \qquad f"(x)=8+\frac{4}{x^3}$$

Az $f"(x)=0$, ha

$$8=-\frac{4}{x^3} \qquad \to \qquad x^3=-\frac{1}{2} \qquad \to \qquad x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}\approx -0,79$$

	$x<\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$	$x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}<x<0$	$x=0$	$0<x$
$f^{"}(x)$	$+$	0	$-$	nincs ért.	$+$
$f(x)$	konvex	inf. pont	konkáv	nincs ért.	konvex

(c)

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}}$$

Megoldás: $D_f = \mathbf{R}$.

$$f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-(x^2-2x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-(x-1)^2}{e^x}$$

$$f"(x) = \frac{-2(x-1)e^x + (x-1)^2e^x}{e^{2x}} = \frac{-2(x-1)+(x-1)^2}{e^x}$$

Az $f"(x) = 0$, ha a számláló nullával egyenlő, azaz

$$-2(x-1)+(x-1)^2 = (x-1)(-2+x-1) = 0$$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényzője nullával egyenlő. Tehát

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 3$$

	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$	$3<x$
$f"(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	inf. pont	konkáv	inf. pont	konvex

(d)

$$\boxed{f(x) = x^2 + 2x - x\ln x}$$

Megoldás: $D_f = \mathbf{R}^+$.

$$f'(x) = 2x + 2 - (\ln x + x\frac{1}{x}) = 2x + 2 - \ln x - 1 \qquad f"(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

Az $f"(x) = 0$, ha

$$2 = \frac{1}{x} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{1}{2}$$

	$0<x<0,5$	$x=0,5$	$0,5<x$
$f"(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	inf. pont	konkáv

(e)

$$\boxed{f(x) = \ln(x^2+2x+2)}$$

Megoldás: Mivel $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 \geq 1$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén, így $D_f = \mathbf{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}(2x+2) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

$$f"(x) = \frac{2(x^2+2x+2)-(2x+2)^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2}$$

Az $f"(x) = 0$, ha

$$-2x^2 - 4x = -2x(x+2) = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = -2$$

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<0$	$x=0$	$0<x$
$f"(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkáv	inf. pont	konvex	inf. pont	konkáv

(f)

$$\boxed{f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}}$$

Megoldás:
$D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = 2xe^{\frac{1}{x}} + x^2 e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$$
$$f''(x) = 2e^{\frac{1}{x}} + (2x-1)e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(2 - \frac{2x-1}{x^2}\right)$$

Az $f''(x) = 0$, ha $2 = \frac{2x-1}{x^2}$, de ennek az egyenletnek nincs megoldása, így f-nek nincs inflexiós pontja.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$f''(x)$	$+$	nincs ért.	$+$
$f(x)$	konvex	nincs ért.	konvex

32. **Vizsgafeladat** Határozza meg az alábbi függvények adott pontjához tartozó érintőjének egyenletét!

(a)

$$\boxed{f : [-1; \infty[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x - 3}{\sqrt{x+1}} \quad \text{és} \quad x_0 = 0}$$

Megoldás: Az f függvény $x_0 = 0$ pontjához tartozó érintőjének egyenlete:

$$g(x) = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$f'(x) = \left(\frac{\sin x - 3}{\sqrt{x+1}}\right)' = \frac{\cos x\sqrt{x+1} - (\sin x - 3)\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$
$$f'(0) = \frac{1 - (-3)\frac{1}{2}}{1} = \frac{5}{2} \qquad \text{és} \qquad f(0) = \frac{-3}{1} = -3$$

Az érintő egyenlet:

$$g(x) = \frac{5}{2}x - 3$$

(b)

$$\boxed{f(x) = \frac{\sqrt{3x+3}}{x} \quad \text{és} \quad x_0 = 2}$$

Megoldás:

$$g(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(x-2)$$

(c)

$$\boxed{f(x) = (2x-1)\sin 3x + 5 \quad \text{és} \quad x_0 = 0}$$

Megoldás:

$$g(x) = -3x + 5$$

33. **Vizsgafeladat** Határozza meg az alábbi függvények adott egyenessel párhuzamos érintőinek egyenleteit!

(a)

$$\boxed{f(x) = \ln(x^2+6) \quad \text{és} \quad 5y - 2x = 10}$$

Megoldás:

$$y = \frac{2}{5}x - 2 \qquad \rightarrow \qquad m = \frac{2}{5}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+6}$$

$$f'(x_0) = \frac{2x_0}{x_0^2+6} = \frac{2}{5}$$

$$x_0^2 - 5x_0 + 6 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_{1;2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Ha $x = 2$, akkor az érintő egyenlete:

$$g(x) = \frac{2}{5}(x-2) + f(2) = \frac{2}{5}(x-2) + \ln 10$$

Ha $x = 3$, akkor az érintő egyenlete:

$$g(x) = \frac{2}{5}(x-3) + f(3) = \frac{2}{5}(x-2) + \ln 15$$

(b)

$$\boxed{f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R},\ f(x) = 3x + 5\ln x \quad \text{és} \quad 4x - y = 3}$$

Megoldás: $D_f = \mathbf{R}^+$

$$y = 4x - 3 \qquad \rightarrow \qquad m = 4$$

$$f'(x) = 3 + \frac{5}{x} \qquad \rightarrow \qquad m = 4$$

$$f'(x_0) = 3 + \frac{5}{x_0} = 4 \qquad \rightarrow \qquad x_0 = 5$$

Az érintő egyenlete:

$$g(x) = 4(x-5) + f(5) = 4(x-5) + 15 + 5\ln 5$$

(c)

$$\boxed{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \quad \text{és} \quad y = 9x}$$

Megoldás:

$$y = 9x \qquad \rightarrow \qquad m = 9$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \qquad \rightarrow \qquad x_{1;2} = \frac{6 \pm 12}{6}$$

Ha $x_0 = 3$, akkor az érintő egyenlete:

$$g(x) = 9(x-3) + f(3) = 9(x-3) + 1$$

Ha $x_0 = -1$, akkor az érintő egyenlete:

$$g(x) = 9(x+1) + f(-1) = 9(x+1) - 3$$

(d)

$$\boxed{f(x) = \frac{2x+4}{(x-6)^2} + 7x \quad \text{és} \quad m = 7}$$

Megoldás:

$$f'(x) = \frac{2(x-6)^2 - (2x+4)2(x-6)}{(x-6)^4} + 7 = \frac{-2x-20}{(x-6)^3} + 7$$

$$f'(x_0) = \frac{-2x_0-20}{(x_0-6)^3} + 7 = 7 \qquad \rightarrow \qquad \frac{-2x_0-20}{(x_0-6)^3} = 0$$

$$-2x_0 - 20 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x_0 = -10$$

Az érintő egyenlete:

$$g(x) = 7(x+10) + f(-10) = 7(x+10) - \frac{1121}{16}$$

34. **Vizsgafeladat:** Írja fel a következő hozzárendeléssel adott f függvény x_0 pontjához tartozó harmadfokú Taylor polinomját, ha

(a)

$$\boxed{f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2} \quad \text{és} \quad x_0 = 0}$$

Megoldás:

$$T_2(x) = 2x - 4x^2 + 6x^3$$

(b)

$$\boxed{f(x) = \ln(2-x) - \sin(x-1) + 5 \quad \text{és} \quad x_0 = 1}$$

Megoldás:

$$T_2(x) = 5 - 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3$$

(c)

$$\boxed{f(x) = (5x+2)\cos(-x) \quad \text{és} \quad x_0 = 0}$$

Megoldás:

$$T_2(x) = 2 + 5x - x^2 - \frac{5x^3}{2}$$

(d)

$$\boxed{f(x) = x\sqrt{x-2} \quad \text{és} \quad x_0 = 3}$$

Megoldás:

$$T_2(x) = 3 + \frac{5}{2}(x-3) + \frac{1}{8}(x-3)^2 + \frac{1}{16}(x-3)^3$$

35. **Vizsgafeladat:** Számítsa ki az alábbi határértékeket!

(a)

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(5x^2+7)} = \cdots = 1}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(5x^2+7)}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\mathrm{L'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{10x}{5x^2+7}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{10x}\cdot\frac{5x^2+7}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{5}\cdot\frac{5+\frac{7}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{5}\cdot 5=1$$

(b)

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+8x}-\cos 3x}{\sin 2x}=\cdots=2}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+8x}-\cos 3x}{\sin 2x}=\frac{0}{0}\overset{\mathrm{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{8}{2\sqrt{1+8x}}+3\sin 3x}{2\cos 2x}=\frac{4}{2}=2$$

(c)

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{x}{5})-10x-1}{2e^{4x}-2e^{-x}}=\cdots=-1}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\frac{x}{5})-10x-1}{2e^{4x}-2e^{-x}}=\frac{0}{0}\overset{\mathrm{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\frac{x}{5})\frac{1}{5}-10}{8e^{4x}+2e^{-x}}=\frac{-10}{10}=-1$$

(d)

$$\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7x+2}-2x}{\cos(2-x)-\frac{x}{2}}=\cdots=\frac{9}{4}}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{7x+2}-2x}{\cos(2-x)-\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}\overset{\mathrm{L'H}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\frac{7}{2\sqrt{7x+2}}-2}{-\sin(2-x)(-1)-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{9}{8}}{-\frac{1}{2}}=\frac{9}{4}$$

36. **Vizsgafeladat** Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi hozzárendeléssel adott függvényekkel!

$$f(x)=x^3-x^4$$

$$f(x)=x^2\ln x$$

$$f(x)=e^{3x}(x^2+5x)$$

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-1}$$