ESEMÉNYALGEBRA, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS AXIÓMÁI

1. Háromszor egymás után feldobunk egy szabályos pénzérmét. Azt figyeljük, hogy mennyi fejet dobunk. Az alábbi események közül melyik adható meg az eseménytér részhalmazaként?
[eseménytér: $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$]

   (a) B A: nem dobunk háromszor fejet [$A = \{0, 1, 2\} \subset \Omega$]

   (b) B B: pontosan két dobás fej [$B = \{2\} \subset \Omega$]

   (c) B C: legalább egy fejet dobunk [$C = \{1, 2, 3\} \subset \Omega$]

   (d) B D: az első két dobás fej, a harmadik írás
   [Az események sorrendje is számít. Az eseménytér megadásánál viszont a sorrendet nem vettük figyelembe, így ez az esemény nem fejezhető ki Ω részhalmazaként.]

2. Egy szabályos dobókockával egyszer dobunk. [eseménytér: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$]
A: páratlan számot dobunk [$A = \{1, 3, 5\}$]
B: háromnál kisebb számot dobunk [$B = \{1, 2\}$]
C: háromnál nagyobb számot dobunk [$C = \{4, 5, 6\}$]
Fogalmazza meg és határozza meg az alábbi eseményeket:

   (a) B $\overline{A}$ [nem dobunk páratlan számot, $\overline{A} = \{2, 4, 6\}$]

   (b) B $\overline{C}$ [nem dobunk háromnál nagyobb számot, $\overline{C} = \{1, 2, 3\}$]

   (c) B $A + B$
   [páratlan számot dobunk vagy háromnál kisebb számot dobunk, $A + B = \{1, 2, 3, 5\}$]

   (d) B $A \cdot B$ [páratlan számot dobunk és háromnál kisebb számot dobunk, $A \cdot B = \{1\}$]

   (e) B $A - B$
   [páratlan számot dobunk, de nem dobunk háromnál kisebb számot, $A - B = \{3, 5\}$]

   (f) B $B - A$
   [háromnál kisebb számot dobunk, de nem dobunk páratlan számot, $B - A = \{2\}$]

   (g) B $B + C$
   [háromnál kisebb számot dobunk vagy háromnál nagyobb számot dobunk, $B+C = \{1, 2, 4, 5, 6\}$]

   (h) B $B \cdot C$
   [háromnál kisebb számot dobunk és háromnál nagyobb számot dobunk $\to$ lehetetlen esemény, $B \cdot C = \emptyset$]

3. Egy áruházban három személyszállító lift van. Vegyük a következő eseményeket:
A_1: az 1. lift működik
A_2: a 2. lift működik
A_3: a 3. lift működik
Fejezze ki az A_1, A_2, A_3 eseményekkel, hogy

   (a) B pontosan az egyik lift működik [$A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$]

   (b) B csak a 2. lift működik [$\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$]

(c) B egyik lift sem működik $[\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}]$

(d) B pontosan kettő lift működik $[A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3]$

(e) B mind a három lift működik $[A_1 \cdot A_2 \cdot A_3]$

4. Egy műhelyben három gép dolgozik. A, B, C események jelentsék rendre, hogy az első, második, harmadik gép egy éven belül elromlik. Fejezze ki az A, B, C eseményekkel, hogy egy éven belül

   (a) B csak az első gép romlik el $[A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}]$

   (b) B mindhárom gép elromlik $[A \cdot B \cdot C]$

   (c) B csak az egyik gép romlik el $[A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C]$

   (d) B legalább egy gép elromlik
   $[A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C]$

   (e) B egyik gép sem romlik el $[\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}]$

   (f) B legfeljebb egy gép romlik el $[\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C]$

5. Igazolja, hogy tetszőleges A, B eseményekre fennáll, hogy

   (a) B,V $A - B = \overline{B} - \overline{A}$
   $[A - B = A \cdot \overline{B}$
   $\overline{B} - \overline{A} = \overline{B} \cdot \overline{\overline{A}} = \overline{B} \cdot A = A \cdot \overline{B}]$

   (b) V $(A - A \cdot B) + B = A + B$
   $[(A - A \cdot B) + B = A \cdot \overline{A \cdot B} + B = A \cdot (\overline{A} + \overline{B}) + B = A \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{B} + B = A \cdot \overline{B} + B = (A + B) \cdot (\overline{B} + B) = (A + B) \cdot \Omega = A + B]$

   (c) V $(A + B) - A \cdot B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$
   $[(A + B) - A \cdot B = (A + B) \cdot \overline{A \cdot B} = (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B}) = A \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A} + B \cdot \overline{B} = A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A} = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B]$

6. Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C, D eseményekre fennáll, hogy

   (a) B,V $(A - B) \cdot (A - C) = A \cdot (\overline{B + C})$
   $[(A - B) \cdot (A - C) = A \cdot \overline{B} \cdot A \cdot \overline{C} = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
   $A \cdot (\overline{B + C}) = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}]$

   (b) B,V $(A - C) \cdot (B - C) = A \cdot B - C$
   $[(A - C) \cdot (B - C) = A \cdot \overline{C} \cdot B \cdot \overline{C} = A \cdot B \cdot \overline{C}$
   $A \cdot B - C = A \cdot B \cdot \overline{C}]$

   (c) B,V $\overline{A \cdot B + C \cdot D} = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot (\overline{C} + \overline{D})$
   $[\overline{A \cdot B + C \cdot D} = \overline{A \cdot B} \cdot \overline{C \cdot D}$
   $(\overline{A} + \overline{B}) \cdot (\overline{C} + \overline{D}) = \overline{A \cdot B} \cdot \overline{C \cdot D}]$

   (d) V $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
   $[(A - B) - C = A \cdot \overline{B} - C = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
   $(A - C) - (B - C) = A \cdot \overline{C} - B \cdot \overline{C} = A \cdot \overline{C} \cdot \overline{B \cdot \overline{C}} = A \cdot \overline{C} \cdot (\overline{B} + \overline{\overline{C}}) = A \cdot \overline{C} \cdot (\overline{B} + C) = A \cdot \overline{C} \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{C} \cdot C = A \cdot \overline{C} \cdot \overline{B} = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}]$

(e) B,V $A - B \cdot C = (A - B) + (A - C)$
$[A - B \cdot C = A \cdot \overline{B \cdot C} = A \cdot (\overline{B} + \overline{C}) = A \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{C})$
$(A - B) + (A - C) = A \cdot \overline{B} + A \cdot \overline{C}]$

(f) V $A - (A - B) = B - (B - A)$
$[A-(A-B) = A-A\cdot\overline{B} = A\cdot\overline{A\cdot\overline{B}} = A\cdot(\overline{A}+\overline{\overline{B}}) = A\cdot(\overline{A}+B) = A\cdot\overline{A}+A\cdot B = A\cdot B$
$B - (B - A) = B - B \cdot \overline{A} = B \cdot \overline{B \cdot \overline{A}} = B \cdot (\overline{B} + \overline{\overline{A}}) = B \cdot (\overline{B} + A) = B \cdot \overline{B} + B \cdot A =$
$B \cdot A = A \cdot B]$

7. Legyen az A esemény valószínűsége $0,6$, a B esemény valószínűsége $0,3$ és az együttes bekövetkezés valószínűsége pedig $0,1$. Határozza meg az alábbi valószínűségeket!

(a) B,V $P(\overline{A})$ $[0,4]$

(b) B,V $P(\overline{B})$ $[0,7]$

(c) B,V $P(A + B)$ $[0,8]$

(d) B,V $P(A - B)$ $[0,5]$

(e) B,V $P(B - A)$ $[0,2]$

(f) B,V $P(\overline{A} + \overline{B})$ $[0,9]$

(g) B,V $P(A + \overline{B})$ $[0,8]$

(h) B,V $P(B \cdot \overline{A})$ $[0,2]$

8. Legyenek A és B olyan események, melyekre teljesül, hogy B maga után vonja A-t
$(B \subset A)$, $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,3$. Határozza meg az alábbi valószínűségeket!

(a) B,V $P(A \cdot B)$ $[0,3]$

(b) B,V $P(A + B)$ $[0,7]$

(c) B,V $P(A - B)$ $[0,4]$

(d) B,V $P(B - A)$ $[0]$

(e) B,V $P(\overline{A} \cdot B)$ $[0]$

(f) B,V $P(A - \overline{B})$ $[0,3]$

9. Legyenek A és B olyan események, melyekre $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ és az együttes bekövetkezés valószínűsége pedig $P(A \cdot B) = 0,3$. Határozza meg az alábbi valószínűségeket!

(a) B,V $P(\overline{A})$ $[0,4]$

(b) B,V $P(A + B)$ $[0,8]$

(c) B,V $P(A - B)$ $[0,3]$

(d) B,V $P(B - A)$ $[0,2]$

(e) B,V $P(\overline{A} + \overline{B})$ $[0,7]$

(f) B,V $P(\overline{A} + B)$ $[0,7]$

(g) B,V $P(A \cdot \overline{B})$ $[0,3]$

(h) B,V $P(\overline{A}-\overline{B})$ $[0,2]$

10. Legyenek A és B olyan események, melyekre teljesül, hogy B maga után vonja A-t ($B \subset A$), $P(A)=0,7$, $P(B)=0,4$. Határozza meg az alábbi valószínűségeket!

(a) B,V $P(A \cdot B)$ $[0,4]$

(b) B,V $P(A+B)$ $[0,7]$

(c) B,V $P(A-B)$ $[0,3]$

(d) B,V $P(B-A)$ $[0]$

(e) B,V $P(\overline{A} \cdot B)$ $[0]$

(f) B,V $P(\overline{A+B})$ $[0,3$

(g) B,V $P(A-\overline{B})$ $[0,4]$

(h) B,V $P(\overline{B}-A)$ $[0,3]$

11. Legyenek A és B olyan események, melyekre $P(A)=0,3$, $P(B)=0,5$ és az együttes bekövetkezés valószínűsége pedig $P(A \cdot B)=0,1$. Határozza meg az alábbi valószínűségeket!

(a) B,V $P(\overline{A})$ $[0,7]$

(b) B,V $P(\overline{A \cdot B})$ $[0,9]$

(c) B,V $P(\overline{A+B})$ $[0,3]$

(d) B,V $P(A+B)$ $[0,7]$

(e) B,V $P(B-A)$ $[0,4]$

(f) B,V $P(\overline{A}+\overline{B})$ $[0,9]$

(g) B,V $P(\overline{A}+B)$ $[0,8]$

(h) B,V $P(\overline{A}-\overline{B})$ $[0,4]$

(i) B,V $P(\overline{A}-B)$ $[0,3]$

12. Legyenek A és B olyan események, melyekre teljesül, hogy A maga után vonja B-t ($A \subset B$), $P(A)=0,2$, $P(B)=0,6$. Határozza meg az alábbi valószínűségeket!

(a) B,V $P(A+B)$ $[0,6]$

(b) B,V $P(A-B)$ $[0]$

(c) B,V $P(A+\overline{B})$ $[0,6]$

(d) B,V $P(\overline{A}+B)$ $[1]$

(e) B,V $P(\overline{B}-\overline{A})$ $[0]$

(f) B,V $P(A-\overline{B})$ $[0,2]$

(g) B,V $P(\overline{A+\overline{B}})$ $[0,4]$

(h) B,V $P(A \cdot \overline{B})$ $[0]$

(i) B,V $P(\overline{\overline{A} \cdot B})$ $[0,6]$

(j) B,V $P(\overline{A-\overline{B}})$ $[0,8]$

13. B,V Legyen $P(A)=0,3$, $P(A \cdot B)=0,2$ és $P(\overline{B} \cdot \overline{A})=0,4$. Számolja ki $P(B)$-t! $[0,5]$