Komplex számok

2014. szeptember 4.

1. **Feladat:** Legyen $z_1 = 2 - 3i$ és $z_2 = 4i - 1$.
   Határozza meg az alábbi kifejezés értékét!
   $$\overline{(3z_1 - 2z_2)}$$
   Megoldás:
   $$\overline{(3z_1 - 2z_2)} = \overline{(3(2-3i) - 2(4i-1))} =$$
   $$\overline{(6 - 9i - 8i + 2)} = \overline{8 - 17i} = 8 + 17i$$
2. **Feladat:** Legyen $z_1 = 2 - 3i$ és $z_2 = 4i - 1$. Határozza meg az alábbi kifejezés értékét!
   $$|\overline{\overline{z_1} + 3z_2}|,$$
   Megoldás:
   $$|\overline{\overline{z_1} + 3z_2}| = |\overline{\overline{2-3i} + 3(4i-1)}| =$$
   $$|\overline{2 + 3i + 12i - 3}| = |-1 - 15i| = \sqrt{(-1)^2 + (-15)^2} = 226$$
3. **Feladat:** Legyen $z_1 = 2 - 3i$ és $z_2 = 4i - 1$.
   Határozza meg az alábbi kifejezés értékét!
   $$\left|z_1^2 + \overline{z_2}\right|$$
   Megoldás:
   $$\left|(2-3i)^2 + \overline{(4i-1)}\right| = |-5 - 12i - 1 - 4i| =$$
   $$|-6 - 16i| = \sqrt{(-6)^2 + (-16)^2} = 292$$
4. **Feladat:** Legyen $z_1 = 2 - 3i$ és $z_2 = 4i - 1$.
   Határozza meg az alábbi kifejezés értékét!
   $$(z_1 + 2)(z_2 - i)$$
   Megoldás:
   $$(z_1 + 2)(z_2 - i) = (2 - 3i + 2)(4i - 1 - i) = (4 - 3i)(3i - 1) = 5 + 15i$$

5. **Feladat:** Legyen $z_1 = 2 - 3i$ és $z_2 = 4i - 1$.

Határozza meg az alábbi kifejezés értékét!

$$z_1^2 \cdot \overline{z_2},$$

Megoldás:

$$z_1^2 \cdot \overline{z_2} = (2 - 3i)^2 \cdot \overline{4i - 1} =$$

$$(-5 - 12i)(-1 - 4i) = -43 + 32i$$

6. **Feladat:** Legyen $z_1 = -8 - 6i$ és $z_2 = 3 - 5i$.

Határozza meg az alábbi kifejezés értékét!

$$\frac{z_1^2}{3 + \overline{z_2}}$$

Megoldás:

$$\frac{z_1^2}{3 + \overline{z_2}} = \frac{(-8 - 6i)^2}{3 + \overline{3 - 5i}} = \frac{(-8 - 6i)^2}{6 + 5i} = \frac{28 + 96i}{6 + 5i}$$

$$\frac{28 + 96i}{6 + 5i} \cdot \frac{6 - 5i}{6 - 5i} = \frac{648 + 436i}{36 + 25} = \frac{648}{61} + \frac{436}{61}i$$

7. **Feladat:** Írja fel a következő komplex számokot trigonometrikus alakban !

$$z_1 = \frac{4}{3 + 3i} =$$

Megoldás: Végezzük el algebrai alakban a kijelölt műveletet.

$$z_1 = \frac{4}{3 + 3i} = \frac{4}{3 + 3i} \cdot \frac{3 - 3i}{3 - 3i} = \frac{4(3 - 3i)}{18} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i =$$

A komplex szám valós része pozitív, a képzetes része negatív, így a keresett szög a negyedik negyedbe esik. Másrészt $\mathrm{tg}\beta = -1$. Tehát

$$\beta = 45^\circ \qquad \rightarrow \qquad \alpha = 315^\circ$$

Számoljuk ki az abszolútértéket:

$$r = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Írjuk fel a trigonometrikus alakot.

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\cos 315^\circ + \sin 315^\circ\right)$$

8. **Feladat:** Írja fel a következő komplex számokot trigonometrikus alakban !

$$z_2 = 8i(\sqrt{3} - i)$$

Megoldás: Végezzük el a kijelölt műveleteket algebrai alakban.

$$z_2 = 8i(\sqrt{3} - i) = 8\sqrt{3}i + 8$$

A valós és képzetes rész pozitív, egy első negyedbe eső komplex számot szeretnénk felírni trigonometrikus alakban. Másrészt $\text{tg}\beta = \frac{|b|}{|a|} = \sqrt{3}$. Tehát

$$\beta = \alpha = 60^\circ$$

Számoljuk ki az abszolútértéket.

$$r = \sqrt{\left(8\sqrt{3}\right)^2 + 8^2} = 16$$

A keresett trigonometrikus alak:

$$8i(\sqrt{3} - i) = 8\sqrt{3}i + 8 = 16\,(\cos 60^\circ + \sin 60^\circ)$$

9. **Feladat:** Írja fel a következő komplex számokot trigonometrikus alakban !

$$z = (-4 - 4\sqrt{3}i)^{20}$$

Megoldás: Írjuk fel $-4 - 4\sqrt{3}\,i$-t trigonometrikus alakban. A valós és képzetes rész negatív, azaz egy harmadik negyedbe eső komplex számot szeretnénk felírni trigonometrikus alakban. Másrészt $\text{tg}\beta = \frac{|b|}{|a|} = 1$. Tehát

$$\beta = 45^\circ \qquad \rightarrow \qquad \alpha = 225^\circ$$

Számoljuk ki az abszolútértéket.

$$r = \sqrt{(-4)^2 + \left(-4\sqrt{3}\right)^2} = 8$$

A keresett trigonometrikus alak:

$$-4 - 4\sqrt{3}i = 8\,(\cos 225^\circ + \sin 225^\circ)$$

Végezzük el a hatványozás műveletét.

$$\left(-4 - 4\sqrt{3}i\right)^{20} = (8\,(\cos 225^\circ + \sin 225^\circ))^{20} =$$

$$8^{20}\,(\cos 20 \cdot 225^\circ + \sin 20 \cdot 225^\circ) = 8^{20}\,(\cos 180^\circ + \sin 180^\circ) = -8^{20}$$

Felhasználva, hogy

$$20 \cdot 225^\circ = 4500^\circ = 4500^\circ - 12 \cdot 360^\circ = 180^\circ$$

10. **Feladat:** Legyen

$$z_1 = 3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) \quad \text{és} \quad z_2 = \sqrt{2}(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ).$$

Határozza meg az alábbi kifejezés értékét!

$$\frac{2}{z_2}$$

Megoldás:

$$\frac{2}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)} = \frac{2(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)} =$$

$$\sqrt{2}(\cos(-110^\circ) + i \sin(-110^\circ)) = \sqrt{2}(\cos 250^\circ + i \sin 250^\circ)$$

Felhasználva, hogy

$$-110^\circ = -110^\circ + 360^\circ = 250^\circ$$

11. **Feladat:** Legyen

$$z_1 = 3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) \quad \text{és} \quad z_2 = \sqrt{2}(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ).$$

Határozza meg az alábbi kifejezés értékét!

$$z_1^{50} \cdot z_2$$

Megoldás: Végezzük el először a hatványozás műveletét.

$$(3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ))^{50} = 3^{50}(\cos 50 \cdot 40^\circ + i \sin 50 \cdot 40^\circ)$$

$$3^{50}(\cos 2000^\circ + i \sin 2000^\circ) = 3^{50}(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)$$

Felhasználva, hogy

$$2000^\circ = 2000^\circ - 5 \cdot 360^\circ = 200^\circ$$

Végezzük el a szorzás műveletét.

$$z_1^{50} \cdot z_2 = 3^{50}(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)\sqrt{2}(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ) =$$

$$3^{50}\sqrt{2}(\cos 310^\circ + i \sin 310^\circ)$$

12. **Feladat:** Legyen

$$z_1 = 3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) \qquad \text{és} \qquad z_2 = \sqrt{2}(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ).$$

Határozza meg az alábbi kifejezés értékét!

$$\sqrt[5]{\frac{z_1}{z_2}}$$

Megoldás: Végezzük el először az osztás műveletét.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ)}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}}(\cos(-70^\circ) + i \sin(-70^\circ)) = \frac{3}{\sqrt{2}}(\cos 290^\circ + i \sin 290^\circ) =$$

Felhasználva, hogy

$$-70^\circ = -70^\circ + 360^\circ = 290^\circ$$

Végezzük el a gyökvonás műveletét.

$$\sqrt[5]{\frac{z_1}{z_2}} = \sqrt[5]{\frac{3}{\sqrt{2}}(\cos 290^\circ + i \sin 290^\circ)} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{3}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{290^\circ + k \cdot 360^\circ}{5} + i \sin\frac{290^\circ + k \cdot 360^\circ}{5}\right) =$$

$$\sqrt[5]{\frac{3}{\sqrt{2}}}\,(\cos(54^\circ + k \cdot 72^\circ) + i \sin(54^\circ + k \cdot 72^\circ)) \qquad \text{ahol} \qquad k = 0; 1; 2; 3; 4$$

13. **Feladat:** Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán !

(a)

$$(6-i)^2 z + 9 + 2i^3 = \frac{-34i}{5-3i}$$

Megoldás Végezzük el a kijelölt műveleteket.

$$(6-i)^2 = 35 - 12i$$

$$\frac{-34i}{5-3i} = \frac{-34i}{5-3i} \cdot \frac{5+3i}{5+3i} = \frac{34(3-5i)}{25+9} = 3 - 5i$$

$$i^3 = i^2 i = -i$$

Oldjuk meg az egyenletet.

$$(6-i)^2 z + 9 + 2i^3 = \frac{-34i}{5-3i}$$

$$(35-12i)z + 9 - 2i = 3 - 5i$$

$$(35-12i)zi = -6-3i$$

$$z = \frac{-6-3i}{35-12i} = \frac{-6-3i}{35-12i} \cdot \frac{36+12i}{35+12i} = \frac{-180-180i}{1225+144} = \frac{-180-180i}{1369}$$

Tehát a végeredmény:

$$z = -\frac{180}{1369} - \frac{180}{1369} i$$

(b)

$$4z^2 + 4z + 17 = 0$$

Megoldás Használjunk gyökképletet.

$$z_{1;2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16 \cdot 17}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{-256}}{8} = \frac{-4 \pm 16i}{8}$$

Tehát a gyökök $x_1 = -\frac{1}{2} + 2i$ és $x_1 = -\frac{1}{2} - 2i$

(c)

$$z + \frac{6i}{z} = 0$$

Megoldás Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát z-vel.

$$z^2 + 6i = 0$$

Ez egy hiányos másodfokú egyenlete. Rendezzük az egyenletet z^2-re.

$$z^2 = -6i = 6(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ))$$

$$z_{1;2} = \sqrt{6}\left(\cos\frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{2} + i \sin\frac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{2}\right) =$$

$$z_{1;2} = \sqrt{6}\left(\cos(135^\circ + k \cdot 180^\circ) + i \sin(135^\circ + k \cdot 180^\circ)\right) \qquad \text{ahol} \qquad k = 0; 1$$

(d)

$$z^3 - i^5 = -1$$

Megoldás Rendezzük az egyenletet z^2-re. Használjuk fel, hogy $i^5 = i^4 i = i$

$$z^3 = -1 + i = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$z_{1;2;3} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{135^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin\frac{135^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}\right) =$$

$$z_{1;2} = \sqrt[6]{2}\left(\cos(45^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(45^\circ + k \cdot 120^\circ)\right) \qquad \text{ahol} \qquad k = 0; 1; 2$$

(e)

$$(40 - z + 3iz)\left(6 - \frac{z-4}{2iz+i}\right) = 0$$

Megoldás Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nullával egyenlő. Tehát oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

$$40 - z + 3iz = 0 \qquad \text{és} \qquad 6 - \frac{z-4}{2iz+i} = 0$$

$$40-z+3iz = 0 \qquad \to \qquad 40 = (1-3i)z \qquad \to \qquad z = \frac{40}{1-3i}$$

Végezzük el az osztást.

$$z = \frac{40}{1-3i} \cdot \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{40(1+3i)}{1+9} = 4 + 12i$$

Oldjuk meg a másik egyenletet is.

$$6 - \frac{z-4}{2iz+i} = 0 \qquad \to \qquad 6 = \frac{z-4}{2iz+i}$$

$$6(2iz+i) = z - 4$$

$$(12i - 1)z = -4 - 6i$$

$$z = \frac{-4-6i}{21i-1} \cdot \frac{-12i-1}{-21i-1} = \frac{-68+54i}{441+1} = -\frac{34}{221} + i\frac{27}{221}$$

Tehát két gyököt kaptunk:

$$z_1 = 4 + 12i \qquad \text{és} \qquad z_2 = -\frac{34}{221} + i\frac{27}{221}$$

(f)

$$\frac{1-5i}{5iz} + \frac{2+4i}{3z+i} = 0$$

Megoldás: Hozzunk közös nevezőre.

$$\frac{(1-5i)(3z+i) + 5iz(2+4z)}{5iz(3z+i)} = 0$$

Egy szorzat akkor nulla, ha számlálója nullával egyenlő. Oldjuk meg z alábbi egyenletet.

$$(1-5i)(3z+i) + 5iz(2+4i) = 0$$

$$3z + i - 5iz + 5 + 10iz + 20z = 0$$

$$(23 + 5i)z = -5 - i$$

$$z = \frac{-5-i}{23+5i} = \frac{-5-i}{23+5i} \cdot \frac{23-5i}{23-5i} = -\frac{60}{277} + \frac{1}{277}i = 0,2166 + 0,0036i$$

14. **Vizsgafeladat:** Végezze el a kijelölt műveletet!

(a)

$$\left(\frac{-9+13i}{4-3i}\right)^{10}$$

Megoldás: Végezzük el először az osztás műveletét algebrai alakban.

$$\frac{-9+13i}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i}=\frac{-75+25i}{16+9}=-3+i$$

Térjünk át trigonometrikus alakra. Az abszolútérték:

$$r=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$$

Mivel valós rész negatív, a képzetes pedig pozitív, a komplex szám a második negyedben van. Így $\alpha=180^\circ-\beta$.

$$\text{tg}\beta=\frac{|b|}{|a|}=\frac{-3}{1}=-3$$

$$\beta=18,45^\circ \qquad \rightarrow \qquad \alpha=161,55^\circ$$

$$-3+i=\sqrt{10}(\cos 161,55^\circ+i\sin 161,55^\circ)=$$

Végezzük el a hatványozás műveletét.

$$\left(\sqrt{10}(\cos 161,55^\circ+i\sin 161,55^\circ)=\right)^{10}=(\sqrt{10})^{10}(\cos 10\cdot 161,55^\circ+i\sin 10\cdot 161,55^\circ)=$$

$$10^5(\cos 1615,5^\circ+i\sin 1615,5^\circ)=10^5(\cos 175,5^\circ+i\sin 175,5^\circ)$$

Felhasználva, hogy

$$1615,5^\circ-4\cdot 360^\circ=175,5^\circ$$

(b)

$$\sqrt[4]{\frac{16}{2-2i}(-1-i)^3}$$

Megoldás:

$$\frac{16}{2-2i}(-1-i)^3=\frac{16}{2-2i}(-1-i)^2(-1-i)=\frac{16}{2-2i}(-2i)(-1-i)=$$

$$\frac{16}{2(1-i)}(-2i)(-1-i)=\frac{-16(-i+1)}{1-i}=-16=16\,(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$$

$$z_k=2(\cos(k\cdot 90^\circ)+i\sin(k\cdot 90^\circ)) \quad \text{ha k=0,1,;2;3}$$

$$z_0=2(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)=0$$

$$z_1=2(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)=2i$$

$$z_3=2(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=-2$$

$$z_3=2(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ)=-2i$$

(c)

$$2i\,(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ)\left(\sqrt{5} - i\sqrt{15}\right)^{10} =$$

Megoldás: Célszerű áttérni trigonometrikus alakra.

$$2i = 2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)$$

$$\sqrt{5} - i\sqrt{15} = \sqrt{20}(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$$

mivel

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3} \qquad \to \qquad \beta = 60^\circ \qquad \text{és} \qquad r = \sqrt{20}$$

Végezzük el a műveleteket.

$$2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)\,(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ)\left(\sqrt{20}(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)\right)^{10} =$$

$$2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)\,(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ)\,20^5(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) =$$
$$2\cdot 20^5(\cos 290^\circ + i\sin 290^\circ)$$

15. **Vizsgafeladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$(z^4 - i)(z^2 + 7) = 0$$

Megoldás: Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így az alábbi két egyenletet kell megoldani

$$z^4 - i = 0 \qquad \text{és} \qquad z^2 + 7 = 0$$

Az első egyenlet megoldása:

$$z^4 - i = 0$$

$$z^4 = -i = 1(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)$$

$$z_k = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{270^\circ + k\cdot 360^\circ}{4} + i\sin\frac{270^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}\right)$$

$$z_k = \cos(67,5^\circ + k\cdot 90^\circ) + i\sin(67,5^\circ + k\cdot 90^\circ) \quad \text{ha k=0,1,2,3}$$

A második egyenlet megoldása:

$$z^2 + 7 = 0 \qquad \to \qquad z^2 = -7$$

$$z = \pm\sqrt{7}\cdot i$$

Tehát az egyenlet megoldásai:

$$z_1 = \cos 67,5^\circ + i \sin 67,5^\circ$$

$$z_2 = \cos 157,5^\circ + i \sin 157,5^\circ$$
$$z_3 = \cos 247,5^\circ + i \sin 247,5^\circ$$
$$z_4 = \cos 337,5^\circ + i \sin 337,5^\circ$$
$$z_5 = \sqrt{7}i = \sqrt{7}(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$
$$z_6 = -\sqrt{7}i = \sqrt{7}(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$$

16. **Vizsgafeladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet!
$$(2 + \sqrt{3}i)z^5 + 2 - \sqrt{3}i = -3$$

Megoldás: Először rendezzük az egyenletet:

$$z^5 = \frac{-5 + i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}} = \frac{-5 + i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}} \cdot \frac{2 - i\sqrt{3}}{2 - i\sqrt{3}} = \frac{-7 + 7i\sqrt{3}}{4 + 3} = -1 + i\sqrt{3}$$

$$z^5 = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$
$$z_{1,2,3,4,5} = \sqrt[5]{2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)}$$
$$z_k = \sqrt[5]{2}\left(\cos \frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{5} + i \sin \frac{120^\circ + k \cdot 360^\circ}{5}\right)$$
$$z_k = \sqrt[5]{2}(\cos(24^\circ + k \cdot 72^\circ) + i \sin(24^\circ + k \cdot 72^\circ)) \quad \text{ha k=0,1,2,3,4}$$

17. **Vizsgafeladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet!
$$-iz^2 - 6z + 10i = 0$$

Megoldás: Használjunk a gyökképletet:

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(-i)(10i)}}{-2i} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{-2i} = \frac{6 \pm 2i}{-2i} = \frac{3 \pm i}{-i}$$

$$z_1 = \frac{3 + i}{-i} = \frac{3 + i}{-i} \cdot \frac{i}{i} = -1 + 3i$$
$$z_2 = \frac{3 - i}{-i} = \frac{3 - i}{-i} \cdot \frac{i}{i} = 1 + 3i$$

Tehát az egyenlet megoldásai

$$z_1 = -1 + 3i \qquad z_2 = -1 + 3i$$

18. **Vizsgafeladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$z^2 + 2iz = -1 - 2i - 2z$$

Megoldás: Rendezzük az egyenletet.

$$z^2 + (2i + 2)z + 1 + 2i = 0$$

Használjunk a gyökképletet:

$$z_{1,2} = \frac{-(2+2i) \pm \sqrt{-4+8i+4-4-8i}}{2} =$$

$$\frac{-2-2i \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2-2i \pm 2i}{2} = -1 - i \pm i$$

Tehát az egyenlet megoldásai

$$z_1 = -1 \qquad z_2 = -1 - 2i$$

19. **Vizsgafeladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$z^4 + 3iz^2 + 10 = 0$$

Megoldás: Ez egy negyedfokú egyenletet, amely visszavezethető másodfokúra $z^2 = x$ helyettesítésével.

$$z^4 + 3iz^2 + 10 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x^2 + 3ix + 10 = 0$$

Használjunk gyökképletet x meghatározásához:

$$x_{1,2} = \frac{-3i \pm \sqrt{-9-40}}{2} = \frac{-3i \pm \sqrt{-49}}{2} = \frac{-3i \pm 7i}{2}$$

Ha

$$x_1 = z^2 = 2i = 2(\cos 90° + i \sin 90°)$$

$$z_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{90° + k \cdot 360°}{2} + i \sin\frac{90° + k \cdot 360°}{2}\right)$$

$$z_k = \sqrt{2}(\cos(45° + k \cdot 180°) + i \sin(45° + k \cdot 180°)) \quad \text{ha k=0,1}$$

Ha

$$x_2 = z^2 = -5i = 5(\cos 270° + i \sin 270°)$$

$$z_l = \sqrt{5}\left(\cos\frac{270° + k \cdot 360°}{2} + i \sin\frac{270° + k \cdot 360°}{2}\right)$$

$$z_l = \sqrt{5}(\cos(135° + l \cdot 180°) + i \sin(135° + l \cdot 180°)) \quad \text{ha l=0,1}$$

20. **Vizsgafeladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$2z^6 + 4\sqrt{2}z^3 + 8 = 0$$

Megoldás: Vezessük vissza az egyenletet $z^3 = x$ helyettesítésével egy másodfokú egyenletre:

$$2z^6 + 4\sqrt{2}z^3 + 8 = 0 \qquad \to \qquad 2x^2 + 4\sqrt{2}ix + 8 = 0$$

Használjunk gyökképletet x meghatározásához:

$$x_{1,2} = \frac{-4\sqrt{2} \pm \sqrt{32-64}}{4} = \frac{-4\sqrt{2} \pm \sqrt{-32}}{4} = -\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$$

Ha

$$x_1 = z^3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{135^\circ + k\cdot 360^\circ}{3} + i\sin\frac{135^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right)$$

$$z_k = \sqrt[3]{2}(\cos(45^\circ + k\cdot 120^\circ) + i\sin(45^\circ + k\cdot 120^\circ) \quad \text{ha k=0,1,2}$$

Ha

$$x_2 = z^3 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$$

$$z_l = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{225^\circ + k\cdot 360^\circ}{3} + i\sin\frac{225^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right)$$

$$z_l = \sqrt[3]{2}(\cos(75^\circ + l\cdot 120^\circ) + i\sin(75^\circ + l\cdot 120^\circ) \quad \text{ha l=0,1,2}$$

Tehát az egyenlet gyökei:

$$z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos 165^\circ + i\sin 165^\circ)$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2}(\cos 285^\circ + i\sin 285^\circ)$$

$$z_4 = \sqrt[3]{2}(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ)$$

$$z_5 = \sqrt[3]{2}(\cos 195^\circ + i\sin 195^\circ)$$

$$z_6 = \sqrt[3]{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$$

21. **Vizsgafeladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$(2-3i)z^4 + 8\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) = -40 + 40i$$

Megoldás: Először rendezzük az egyenletet.

$$(2-3i)z^4 + 8\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) = -40+40i$$

Írjuk fel $8\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$ komplex számot algebrai alakban.

$$8\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ) = 8\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -8-8i$$

Behelyettesítve:

$$(2-3i)z^4 - 8 - 8i = -40+40i$$

$$z^4 = \frac{-32+48i}{2-3i}$$

Végezzük el az osztást:

$$z^4 = \frac{-32+48i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i} = \frac{-208}{4+9} = -16 = 16(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ)$$

Az egyenlet gyökei:

$$z_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{180^\circ + k\cdot 360^\circ}{4} + i\sin\frac{180^\circ + k\cdot 360^\circ}{4}\right)$$

$$z_k = 2(\cos(45^\circ + k\cdot 90^\circ) + i\sin(45^\circ + k\cdot 90^\circ)) \quad \text{ha k=0,1,3,4}$$

22. **Vizsgafeladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\left(z^2-4z+5\right)\left(z^4+81i\right)=0$$

Megoldás: Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényzője nulla. Így két egyenletet kell megoldanunk.

$$z^2-4z+5=0 \qquad \text{és} \qquad z^4+81i=0$$

Oldjuk meg a kapott egyenleteket.

$$z^2-4z+5=0 \qquad \to \qquad z_{1;2} = \frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2} = \frac{4\pm 2i}{2} = 2\pm i$$

$$z^4+81i=0 \qquad \to \qquad z=\sqrt[4]{-81i} = \sqrt[4]{81(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)}$$

$$z_k = \sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{270^\circ + k\cdot 360^\circ}{3} + i\sin\frac{270^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}\right)$$

$$z_k = 3(\cos(67,5^\circ + k\cdot 90^\circ) + i\sin(67,5^\circ + k\cdot 90^\circ)) \quad \text{ha k=0,1,2,3}$$

Tehát a következő 6 darab gyököt kaptuk:

$$z_1 = 2 + i$$

$$z_2 = 2 - i$$

$$z_3 = 9(\cos 67,5^\circ + i \sin 67,5^\circ)$$

$$z_4 = 9(\cos 157,5^\circ + i \sin 157,5^\circ)$$

$$z_5 = 9(\cos 247,5^\circ + i \sin 247,5^\circ)$$

$$z_6 = 9(\cos 337,5^\circ + i \sin 337,5^\circ)$$

23. **Vizsgafeladat:** Oldja meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$z^3 + \frac{729}{(i^2 z)^3} = 0$$

Megoldás: Rendezzük az egyenletet:

$$z^3 + \frac{729}{(i^2 z)^3} = 0 \qquad \rightarrow \qquad z^3 + \frac{729}{-z^3} = 0$$

$$z^3 = \frac{729}{z^3} \qquad \rightarrow \qquad z^6 = 729$$

$$z_k = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{726(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)}$$

$$z_k = \sqrt[6]{729}\left(\cos \frac{0^\circ + k \cdot 360^\circ}{6} + i \sin \frac{0^\circ + k \cdot 360^\circ}{6}\right)$$

$$z_k = 3(\cos(0^\circ + k \cdot 60^\circ) + i \sin(0^\circ + k \cdot 60^\circ)) \quad \text{ha k=0,1,2,3,4,5}$$

$$z_k = \left(\cos \frac{^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} + i \sin \frac{^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}\right)$$