KONVEXITÁS

1. B Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = R$. Hol konkáv az $f(x)$ függvény, ha második deriváltja $f''(x) = (x+6)^5(4x-12)^8(x+2)$?
   Megoldás

   $f''(x)$ zérushelyei:$-6; -2; 3$

D_f	$]-\infty; -6[$	$x=-6$	$]-6; -2[$	$x=-2$	$]-2; 3[$	$x=3$	$]3; \infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	konvex	infl.pont	konkáv	infl.pont	konvex	nincs infl.pont	konvex

   A függvény konkáv a $]-6; -2[$ intervallumon.

2. B Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = R$. Hol konvex az $f(x)$ függvény, ha második deriváltja $f''(x) = (2x+3)^2(7-x)^3 e^{-3x}$?
   Megoldás

   $f''(x)$ zérushelyei:$-\frac{3}{2}; 7$

D_f	$]-\infty; -\frac{3}{2}[$	$x=-\frac{3}{2}$	$]-\frac{3}{2}; 7[$	$x=7$	$]7; \infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	konvex	nincs infl.pont	konvex	infl.pont	konkáv

   A függvény konvex a $]-\infty; 7[$ intervallumon.

3. B Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = R \setminus \{-\frac{1}{2}\}$. Hol konvex az $f(x)$ függvény, ha második deriváltja $f''(x) = \dfrac{(10-x)}{(4x+2)^6}$?
   Megoldás

   $f''(x)$ zérushelyei:10

D_f	$]-\infty; -\frac{1}{2}[$	$x=-\frac{1}{2}$	$]-\frac{1}{2}; 10[$	$x=10$	$]10; \infty[$
$f''(x)$	$+$	nincs ért.	$+$	0	$-$
$f(x)$	konvex	nincs ért.	konvex	infl.pont	konkáv

   A függvény konvex a $]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; 10[$ intervallumon.

4. B Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f = R$. Hol van inflexiós pontja(pontjai) az $f(x)$ függvénynek, ha második deriváltja $f''(x) = (x-7)^6 \cdot (e^x - 1)$?
   Megoldás

   $f''(x)$ zérushelyei:$0; 7$

$D(f)$	$]-\infty;0[$	$x=0$	$]0;7[$	$x=7$	$]7;\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	infl. pont	konvex	nincs infl.pont	konvex

A függvénynek az $x=0$ pontban van inflexiós pontja.

5. B Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya $D_f=R$. Hol van inflexiós pontja(pontjai) az $f(x)$ függvénynek, ha második deriváltja $f''(x)=(3-2x)^5\cdot(e^x-1)$?
Megoldás

A függvénynek az $x=0$ és $x=1,5$ pontokban van inflexiós pontja.

6. B, V Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg a függvény inflexiós pontját (pontjait)!

$$f(x)=x^5-30x^3+2$$

Megoldás

$D_f=R$
A függvénynek az $x=-3$, $x=0$ és $x=3$ pontokban van inflexiós pontja.

7. B,V Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg a függvény inflexiós pontját (pontjait)! Hol konvex és hol konkáv a függvény?

$$f(x)=4x^3+x\ln x$$

Megoldás

$D_f=]0;\infty[$
Nincs inflexiós pontja a függvénynek.
A függvény a $]0;\infty[$ intervallumon konvex.

8. B,V Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg a függvény inflexiós pontját (pontjait)! Hol konvex és hol konkáv a függvény?

$$f(x)=\frac{3}{2}x^3+x-x\ln x$$

Megoldás

$D_f=]0;\infty[$
A függvénynek az $x=\frac{1}{3}$ pontban van inflexiós pontja.
A függvény konkáv a $\left]0;\frac{1}{3}\right[$ intevallumon és konvex az $\left]\frac{1}{3};\infty\right[$ intevallumon.

9. B,V Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg a függvény inflexiós pontját (pontjait)! Hol konvex és hol konkáv a függvény?

$$f(x)=\ln(x^2+2x+5)$$

Megoldás

$D_f = R$
A függvénynek az $x = -3$ és $x = 1$ pontokban van inflexiós pontja.
A függvény konkáv a $]-\infty; -3[\cup]1; \infty[$ intevallumon és konvex az $]-3; 1[$ intevallumon.

10. B,V Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Határozza meg a függvény inflexiós pontjának (pontjainak) függvényértékét!

$$f(x) = e^x(x-1)$$

Megoldás

$D_f = R, -\frac{2}{e}$

11. B Hol konkáv az $f(x) = 2 - \sin(\pi x)$, $D(f) = (0; 2)$ függvény?
Megoldás

A függvény az $(1; 2)$ intervallumon konkáv.

12. B Hol konvex az $f(x) = 1 + \cos(\pi x)$, $D(f) = (0; 2)$ függvény?
Megoldás

A függvény az $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ intervallumon konvex.

13. V Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz (pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = e^{x^3}$$

Megoldás

$D_f = R$
$f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2$
$f''(x) = e^{x^3} \cdot 9x^4 + e^{x^3} \cdot 6x = e^{x^3}(9x^4 + 6x)$
$f''(x)$ zérushelyei:0; $\sqrt[3]{-\frac{2}{3}} \approx -0,87$

D_f	$]-\infty; \sqrt[3]{-\frac{2}{3}}[$	$\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$	$]\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}; 0[$	0	$]0; \infty[$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	konvex	infl. pont	konkáv	infl. pont	konvex

$f(0) = 1$; $f\left(\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$

14. Hol konkáv a függvény?

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 5)$$

Megoldás

15. V Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz(pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = 4x^2 + \frac{2}{x}$$

Megoldás

$D_f = R \setminus \{0\}$
$f'(x) = 8x - \frac{2}{x^2}$
$f''(x) = 8 + \frac{4}{x^3}$
$f''(x)$ zérushelyei: $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \approx -0,79$

D_f	$]-\infty; \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}[$	$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$	$]\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}; 0[$	0	$]0; \infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	nincs ért.	$+$
$f(x)$	konvex	infl. pont	konkáv	nincs ért.	konvex

$f\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}\right) = 0$

16. V Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz(pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$$

Megoldás

$D_f = R$
$f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-x^2+2x-1)}{e^{2x}} = \frac{-x^2+2x-1}{e^x}$
$f''(x) = \frac{(-2x+2)e^x - (-x^2+2x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-2x+2+x^2-2x+1)}{e^{2x}} = \frac{x^2-4x+3}{e^x}$
$f''(x)$ zérushelyei:$1; 3$

D_f	$]-\infty; 1[$	1	$]1; 3[$	3	$]3; \infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	infl. pont	konkáv	infl. pont	konvex

$f(1) = \frac{2}{\mathrm{e}}; f(3) = \frac{10}{\mathrm{e}^3}$

17. V Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz(pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = x^2 + 2x - x\ln x$$

Megoldás

$D_f =]0; \infty[$
$f'(x) = 2x + 2 - (\ln x + x\frac{1}{x}) = 2x + 2 - \ln x - 1$
$f''(x) = 2 - \frac{1}{x}$
$f''(x)$ zérushelyei:$\frac{1}{2}$

D_f	$]0;\frac{1}{2}[$	$\frac{1}{2}$	$]\frac{1}{2};\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	infl. pont	konvex

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,597$

18. V Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz(pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$$

Megoldás

$D_f = R$
$f'(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}(2x+2) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$
$f''(x) = \frac{2(x^2+2x+2)-(2x+2)^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2}$
$f''(x)$ zérushelyei: $-2; 0$

D_f	$]-\infty;-2[$	-2	$]-2;0[$	0	$]0;\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkáv	infl. pont	konvex	infl. pont	konkáv

$f(-2) = \ln 2 = 0,693; f(0) = \ln 2$

19. V Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz(pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

Megoldás

$D_f = R \setminus \{0\}$
$f'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} + x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot (-1)\, x^{-2} = 2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$
$f''(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{x}} + (2x-1) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(2 - \frac{2x-1}{x^2}\right)$
Az $f''(x) = 0$, ha $2 - \frac{2x-1}{x^2} = 0$, de ennek az egyenletnek nincs megoldása, így az $f(x)$ függvénynek nincs inflexiós pontja.

D_f	$]-\infty;0[$	$x = 0$	$]0;\infty[$
$f''(x)$	$+$	nincs ért.	$+$
$f(x)$	konvex	nincs ért.	konvex

20. V Adja meg a függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás szempontjából a függvényt! Számolja ki az inflexiós ponthoz(pontokhoz) tartozó függvényértéket!

$$f(x) = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 - 5x + 6)$$

Megoldás

$D_f = R$
$f'(x) = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 - 5x + 6) + \mathrm{e}^x \cdot (2x - 5) = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 - 3x + 1)$
$f''(x) = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 - 3x + 1) + \mathrm{e}^x \cdot (2x - 3) = \mathrm{e}^x \cdot (x^2 - x - 2)$
$f''(x)$ zérushelyei: $-1; 2$

D_f	$]-\infty;-1[$	$x=-1$	$]-1;2[$	$x=2$	$]2;\infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	infl.pont	konkáv	infl.pont	konvex

$f(-1) = \frac{12}{e}; f(2) = 0$