Lineáris algebra

1. B Legyen $\underline{a}(-3;2;4), \underline{b}(-2;1;-2), \underline{c}(3;-4;5), \underline{d}(8;-5;7)$.

   (a) $2\underline{a}-4\underline{c}+6\underline{d}$ [(30; −10; 30)]

   (b) $\underline{c}+3\underline{b}-7\underline{a}$ [(18; −15; −29)]

   (c) $\|2\underline{d}-3\underline{c}+\underline{b}\|$ $\left[\|(5;3;-3)\| = \sqrt{5^2+3^2+(-3)^2} = 6,56\right]$

   (d) $\|4\underline{a}+8\underline{b}-7\underline{c}\|$ $\left[\|(-49;44;-35)\| = \sqrt{(-49)^2+44^2+(-35)^2} = 74,58\right]$

2. B Legyen $\underline{a}(1,7;2,3;-4,4), \underline{b}(3,1;-1,7;5), \underline{c}(-2,2;4;-3,5), \underline{d}(8,1;-2,8;-1,7)$.

   (a) $-3\underline{b}+5\underline{c}-\underline{a}$ [(−22; 22, 8; −28, 1)]

   (b) $6\underline{c}+3\underline{d}-2\underline{b}$ [(4, 9; 19; −36, 1)]

   (c) $\|\underline{d}+2\underline{a}-5\underline{b}\|$ $\left[\|(-4;10,3;-35,5)\| = \sqrt{(-4)^2+10^2+3^2+(-35)^2+5^2} = 37,18\right]$

   (d) $\|2\underline{b}-\underline{c}-3\underline{a}\|$ $[\|(3,3;-14,3;26,7)\| = 30,47]$

3. B Legyen $\underline{a}(5;6;-8), \underline{b}(-2;3;-1), \underline{c}(-3;4;-2), \underline{d}(1;2;-2)$.

   (a) $\underline{a}\,\underline{d} = \langle \underline{a}, \underline{d}\rangle$ [33]

   (b) $\underline{b}\,(4\underline{c}) = \langle \underline{b}, 4\underline{c}\rangle$ [80]

   (c) $3\underline{a}\,(\underline{d}+\underline{b}) = \langle 3\underline{a}, \underline{d}+\underline{b}\rangle$ [147]

   (d) $(2\underline{d}-\underline{c}+\underline{a})(2\underline{a}+4\underline{b}) = \langle 2\underline{d}-\underline{c}+\underline{a}, 2\underline{a}+4\underline{b}\rangle$ [364]

4. Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -8 & 7 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -2 & 12 & -9 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

   (a) B $3\mathbf{B}-2\mathbf{C}^T$ $\left[\begin{pmatrix} 2 & -17 \\ 29 & -36 \\ -9 & 36 \end{pmatrix}\right]$

   (b) B $4\mathbf{A}-6\mathbf{B}$ [nem lehet]

   (c) B $\mathbf{AB}$ $\left[\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -55 & 88 \\ 33 & -51 \end{pmatrix}\right]$

   (d) B $\mathbf{BC}$ $\left[\begin{pmatrix} 34 & -112 & 75 \\ 33 & -83 & 51 \\ -17 & 79 & -57 \end{pmatrix}\right]$

(e) B $\mathbf{A^2}$ $\left[\begin{pmatrix} 13 & 15 & -9 \\ 17 & 101 & -88 \\ -11 & -61 & 53 \end{pmatrix}\right]$

(f) B $\mathbf{AC}$ [nem lehet]

(g) B $\mathbf{D^2} - \mathbf{D}$ $\left[\begin{pmatrix} 26 & -24 \\ -30 & 32 \end{pmatrix}\right]$

(h) B $2\mathbf{B}^T - 3\mathbf{C}$ $\left[\begin{pmatrix} -7 & 31 & -11 \\ -8 & -44 & 39 \end{pmatrix}\right]$

(i) B $(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T)^2$ $\left[\begin{pmatrix} 97 & -90 \\ -90 & 117 \end{pmatrix}\right]$

(i) B $det(\mathbf{D})$ $[-14]$

(j) B $det(\mathbf{A})$ $[-12]$

5. Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) B $\mathbf{CD}$ $\left[\begin{pmatrix} -8 & 32 & -12 \\ 10 & -40 & 15 \\ -14 & 56 & -21 \end{pmatrix}\right]$

(b) B $\mathbf{DC}$ $\left[\begin{pmatrix} -69 \end{pmatrix}\right]$

(c) B $(2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}^T)^T$ $\left[\begin{pmatrix} -11 & 8 & -3 \\ -11 & 8 & 10 \\ -22 & -13 & 15 \end{pmatrix}\right]$

(d) B $\mathbf{A}^T\mathbf{C}$ $\left[\begin{pmatrix} 39 \\ 23 \\ 23 \end{pmatrix}\right]$

(e) B $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{D}$ [nem lehet]

(f) B $(2\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{D}^T$ $\left[\begin{pmatrix} -39 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}\right]$

(g) B $\mathbf{E}^2 - 4\mathbf{F}^T$ $\left[\begin{pmatrix} 32 & -20 \\ -6 & -24 \end{pmatrix}\right]$

(h) B $(\mathbf{E}^T - \mathbf{F})^2$ $\left[\begin{pmatrix} 87 & -10 \\ -15 & 22 \end{pmatrix}\right]$

(i) $\mathbf{B}^2\mathbf{D}^T + \mathbf{C}$ $\left[\begin{pmatrix} -36 \\ 176 \\ -292 \end{pmatrix}\right]$

(j) B $det(\mathbf{E}^T + 2\mathbf{F})$ $[-42]$

(k) $det(2\mathbf{E} - \mathbf{F}^2)$ $[439]$

(l) $det(\mathbf{A}^T + 2\mathbf{B})$ $[-5715]$

6. B Legyen $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. Határozza meg azt az $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre $2\mathbf{G} + \mathbf{X} = 5\mathbf{H}$! $\left[\begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 35 & -18 \\ 39 & 1 \end{pmatrix}\right]$

7. B Legyen $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -4 & 14 & -8 \\ 11 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -9 & 33 & 7 \\ 24 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. Határozza meg azt az $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre $3\mathbf{N} + \mathbf{X} = -2\mathbf{M}$! $\left[\begin{pmatrix} 35 & -127 & -5 \\ -94 & 7 & 8 \end{pmatrix}\right]$

8. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 2 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 10$ egyenletet! $[-2; 2]$

9. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{vmatrix} = 3x - 2$ egyenletet! $[-4; 1]$

10. B Hogy kell megválasztani az x számot, hogy a $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ determináns értéke 0 legyen? $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$

11. B Hogy kell megválasztani az x számot, hogy a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix}$ determináns értéke 0 legyen? $[2; 6]$

12. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2x$ egyenletet! $[6]$

13. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3x$ egyenletet! $[-1; 3]$

14. V Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát!

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ [655]

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ [748]

15. B Bizonyítsa be, hogy a $\underline{c}_1(1;-2)$ és $\underline{c}_2(4;3)$ vektorok lineárisan függetlenek!
[csak az $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ triviális megoldás létezik, tehát lineárisan függetlenek]

16. B Döntse el, hogy a $\underline{v}_1(1;2;-3), \underline{v}_2(-2;2;5)$ és $\underline{v}_3(8;-2;-21)$ vektorok lineárisan függetlenek-e!
[$\alpha_1 = -2t, \alpha_2 = 3t, \alpha_3 = t$,azaz létezik a triviálistól eltérő megoldás is, így a vektorok lineárisan összefüggőek]

17. B Döntse el, hogy a $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek-e!
[csak az $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ triviális megoldás létezik, tehát lineárisan függetlenek]

18. B Előállítható-e a $\underline{c}$ vektor az $\underline{x}, \underline{y}$ vektorok lineáris kombinációjaként?
$\underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 23 \end{pmatrix}$ $\left[-2\underline{x} + 3\underline{y} = \underline{c}\right]$

19. B Előállítható-e az $\underline{x}(-7;5)$ vektor az $\underline{c}(3;-2), \underline{d}(6;-4)$ vektorok lineáris kombinációjaként?
[*nem*]

20. V Előállítható-e a $\underline{d}$ vektor az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként?
$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \underline{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ $[2\underline{a} - \underline{b} - 5\underline{c} = \underline{d}]$

21. V Előállítható-e a $\underline{d}$ vektor az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként?
$\underline{a} = (1;2;-3), \underline{b} = (-4;2;5), \underline{c} = (1;-1;7), \underline{d} = (-7;15;-23).$ $[4\underline{a} + 2\underline{b} - 3\underline{c} = \underline{d}]$

22. B Gauss-eliminációt használva, egy egyenletrendszer megoldása során az alábbi mátrixot kaptuk. (Az ismeretlenek $x_1; x_2; x_3$) Olvassa le a megoldás(oka)t!
$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -9 & -8 \\ 0 & -2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 30 \end{array}\right)$ $[x_1 = 18; x_2 = -8; x_3 = 6;]$

23. B Gauss-eliminációt használva, egy egyenletrendszer megoldása során az alábbi mátrixot kaptuk. (Az ismeretlenek $x_1; x_2; x_3$) Olvassa le a megoldás(oka)t!

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$[x_1 = -6 + 11t; x_2 = 2t; x_3 = t; t \in \mathbf{R}]$

24. B Gauss-eliminációt használva, egy egyenletrendszer megoldása során az alábbi mátrixot kaptuk. (Az ismeretlenek $x_1; x_2; x_3$) Olvassa le a megoldás(oka)t!

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

[nincs megoldás]

25. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y + z &= 2 \\ -x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

$\left[x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = 2\right]$

26. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x - y - z &= -1 \\ 3x + y - z &= 3 \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}$$

$\left[x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t, z = t, t \in \mathbf{R}\right]$

27. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

$[x = 2, y = 1, z = 0]$

28. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 7x - 2y + 3z &= 8 \\ x - y + z &= 1 \\ 4x + 6y - 4z &= 3 \end{aligned}$$

[az egyenletrendszernek nincs megoldása]

29. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 4 \\ -3x + 2y - z &= 6 \\ -6x + 5y + 5z &= 36 \end{aligned}$$

$[x = 14 - 5t, y = 24 - 7t, z = t, t \in \mathbf{R}]$

30. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x + y &= 3 \\ -x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

$\left[x = \frac{7}{9}, y = \frac{13}{9}, z = \frac{5}{3}\right]$

31. V Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x + y - 2z + 4v &= 4 \\ -x - 4y + z + 2v &= -2 \\ 2x - 3y + z - v &= -1 \\ 4x - y + z + v &= 5 \end{aligned}$$

$[x = 1, y = 1, z = 1, v = 1]$

32. V Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x-y-3z+4v &= 2\\ 2x+y+z-5v &= -7\\ x+y+z+2v &= 6\\ 3x-4y-2z+v &= 7 \end{aligned}$$

$[x=1, y=-2, z=3, v=2]$

33. V Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3+5x_4 &= -1\\ 3x_1+2x_3-x_4 &= 2\\ -2x_1+3x_2+x_3 &= 3\\ -x_1-x_2-5x_3-11x_4 &= 1 \end{aligned}$$

[az egyenletrendszernek nincs megoldása]

34. V Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 3x_1-x_2+3x_3+4x_4 &= -20\\ 2x_1-2x_3+3x_4 &= -2\\ -2x_1+x_2+2x_3+5x_4 &= -11\\ 4x_1+3x_2-3x_4 &= 13 \end{aligned}$$

$[x_1=-0,5; x_2=3; x_3=-2,5; x_4=-2]$

35. V Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-x_4 &= -3\\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4 &= -1\\ 2x_1+x_2-2x_3+3x_4 &= 4\\ -x_1+x_3+2x_4 &= -2 \end{aligned}$$

$[x_1=-3+15t,5; x_2=-7t; x_3=-5+13t; x_4=t; t\in\mathbf{R}]$

36. V Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1+4x_2-5x_3+3x_4 &= 19\\ -2x_1+6x_2-x_3+5x_4 &= 9,5\\ 3x_1+4x_2-3x_3 &= 21\\ 2x_1-4x_3+3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$[x_1=0,5; x_2=3; x_3=-2,5; x_4=-2]$

37. Döntse el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak!

(a) B,V $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $[det(\mathbf{A})=-2\neq 0$, létezik a mátrix inverze$]$

(b) B,V $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2\\ 8 & 0 & 5\\ 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $[det(\mathbf{B})=0$, nem létezik a mátrix inverze$]$

38. B,V Miyen x értékek esetén nincs inverze az $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} x & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak? $\left[x=\frac{7}{8}\right]$

39. B,V Miyen x értékek esetén van inverze az $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & x\\ 2 & 0 & 0\\ 7 & 4 & 20 \end{pmatrix}$ mátrixnak? $[x\neq 5]$

40. Igazolja, hogy a mátrixnak létezik inverze és határozza meg az inverz mátrixot!

(a) B $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $[det(\mathbf{A}) = 1 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}]$

(b) B $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $[det(\mathbf{B}) = 3 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}]$

(c) V $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$[det(\mathbf{C}) = 1 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}]$

(d) V $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$[det(\mathbf{D}) = -6 \neq 0$,létezik a mátrix inverze; $\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}]$

(e) V $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 6 & -8 & 15 \\ 10 & -15 & 34 \end{pmatrix}$

$[det(\mathbf{E}) = 2 \neq 0$,létezik az inverz; $\mathbf{E}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{47}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ -27 & 1 & -6 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}]$

(f) V $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$[det(\mathbf{F}) = 2 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}]$

(g) V $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

$[det(\mathbf{G}) = -36 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}]$