Mátrixok, determinánsok

1. Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -8 & 7 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \\ -2 & 12 & -9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

   (a) B $3\mathbf{B} - 2\mathbf{C}^T$ $\left[\begin{pmatrix} 2 & -17 \\ 29 & -36 \\ -9 & 36 \end{pmatrix}\right]$

   (b) B $4\mathbf{A} - 6\mathbf{B}$ [nem lehet]

   (c) B $\mathbf{AB}$ $\left[\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -55 & 88 \\ 33 & -51 \end{pmatrix}\right]$

   (d) B $\mathbf{BC}$ $\left[\begin{pmatrix} 34 & -112 & 75 \\ 33 & -83 & 51 \\ -17 & 79 & -57 \end{pmatrix}\right]$

   (e) B $\mathbf{A^2}$ $\left[\begin{pmatrix} 13 & 15 & -9 \\ 17 & 101 & -88 \\ -11 & -61 & 53 \end{pmatrix}\right]$

   (f) B $\mathbf{AC}$ [nem lehet]

   (g) B $\mathbf{D^2} - \mathbf{D}$ $\left[\begin{pmatrix} 26 & -24 \\ -30 & 32 \end{pmatrix}\right]$

   (h) B $2\mathbf{B}^T - 3\mathbf{C}$ $\left[\begin{pmatrix} -7 & 31 & -11 \\ -8 & -44 & 39 \end{pmatrix}\right]$

   (i) B $(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T)^2$ $\left[\begin{pmatrix} 97 & -90 \\ -90 & 117 \end{pmatrix}\right]$

   (i) B $det(\mathbf{D})$ $[-14]$

   (j) B $det(\mathbf{A})$ $[-12]$

2. Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

   (a) B $\mathbf{CD}$ $\left[\begin{pmatrix} -8 & 32 & -12 \\ 10 & -40 & 15 \\ -14 & 56 & -21 \end{pmatrix}\right]$

(b) B $\mathbf{DC}$ $\left[\begin{pmatrix} -69 \end{pmatrix}\right]$

(c) B $(2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}^T)^T$ $\left[\begin{pmatrix} -11 & 8 & -3 \\ -11 & 8 & 10 \\ -22 & -13 & 15 \end{pmatrix}\right]$

(d) B $\mathbf{A}^T\mathbf{C}$ $\left[\begin{pmatrix} 39 \\ 23 \\ 23 \end{pmatrix}\right]$

(e) B $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{D}$ [nem lehet]

(f) B $(2\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{D}^T$ $\left[\begin{pmatrix} -39 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}\right]$

(g) B $\mathbf{E}^2 - 4\mathbf{F}^T$ $\left[\begin{pmatrix} 32 & -20 \\ -6 & -24 \end{pmatrix}\right]$

(h) B $(\mathbf{E}^T - \mathbf{F})^2$ $\left[\begin{pmatrix} 87 & -10 \\ -15 & 22 \end{pmatrix}\right]$

(i) $\mathbf{B}^2\mathbf{D}^T + \mathbf{C}$ $\left[\begin{pmatrix} -36 \\ 176 \\ -292 \end{pmatrix}\right]$

(j) B $det(\mathbf{E}^T + 2\mathbf{F})$ $[-42]$

(k) $det(2\mathbf{E} - \mathbf{F}^2)$ $[439]$

(l) $det(\mathbf{A}^T + 2\mathbf{B})$ $[-5715]$

3. B Legyen $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. Határozza meg azt az $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre $2\mathbf{G} + \mathbf{X} = 5\mathbf{H}$! $\left[\begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 35 & -18 \\ 39 & 1 \end{pmatrix}\right]$

4. B Legyen $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -4 & 14 & -8 \\ 11 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -9 & 33 & 7 \\ 24 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. Határozza meg azt az $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre $3\mathbf{N} + \mathbf{X} = -2\mathbf{M}$! $\left[\begin{pmatrix} 35 & -127 & -5 \\ -94 & 7 & 8 \end{pmatrix}\right]$

5. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 2 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 10$ egyenletet! $[-2; 2]$

6. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{vmatrix} = 3x - 2$ egyenletet! $[-4; 1]$

7. B Hogy kell megválasztani az x számot, hogy a $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ determináns értéke 0 legyen? $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$

8. B Hogy kell megválasztani az x számot, hogy a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 3 \\ x & 1 & 3 \end{vmatrix}$ determináns értéke 0 legyen? $[2; 6]$

9. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2x$ egyenletet! $[6]$

10. B Oldja meg a $\begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ -2 & 4 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3x$ egyenletet! $[-1; 3]$

11. V Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát!

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $[655]$

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ $[748]$

12. B Gauss-eliminációt használva, egy egyenletrendszer megoldása során az alábbi mátrixot kaptuk. (Az ismeretlenek $x_1; x_2; x_3$) Olvassa le a megoldás(oka)t!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -9 & -8 \\ 0 & -2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 30 \end{array}\right)$$ $[x_1 = 18; x_2 = -8; x_3 = 6;]$

13. B Gauss-eliminációt használva, egy egyenletrendszer megoldása során az alábbi mátrixot kaptuk. (Az ismeretlenek $x_1; x_2; x_3$) Olvassa le a megoldás(oka)t!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ $[x_1 = -6 + 11t; x_2 = 2t; x_3 = t; t \in \mathbf{R}]$

14. B Gauss-eliminációt használva, egy egyenletrendszer megoldása során az alábbi mátrixot kaptuk. (Az ismeretlenek $x_1; x_2; x_3$) Olvassa le a megoldás(oka)t!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$ [nincs megoldás]

15. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x+y+z &= 3\\ 2x-y+z &= 2\\ -x-y+z &= 1 \end{aligned}$$
$\left[x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}, z=2\right]$

16. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x-y-z &= -1\\ 3x+y-z &= 3\\ x+3y+z &= 5 \end{aligned}$$
$\left[x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t, y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t, z=t, t\in\mathbf{R}\right]$

17. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} 2x+3y+2z &= 7\\ x+y+z &= 3\\ 2x+2y+3z &= 6 \end{aligned}$$
$[x=2, y=1, z=0]$

18. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} 7x-2y+3z &= 8\\ x-y+z &= 1\\ 4x+6y-4z &= 3 \end{aligned}$$
[az egyenletrendszernek nincs megoldása]

19. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} 2x-y+3z &= 4\\ -3x+2y-z &= 6\\ -6x+5y+5z &= 36 \end{aligned}$$
$[x=14-5t, y=24-7t, z=t, t\in\mathbf{R}]$

20. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x+2y-z &= 2\\ 2x+y &= 3\\ -x+y+2z &= 4 \end{aligned}$$
$\left[x=\frac{7}{9}, y=\frac{13}{9}, z=\frac{5}{3}\right]$

21. V Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x+y-2z+4v &= 4\\ -x-4y+z+2v &= -2\\ 2x-3y+z-v &= -1\\ 4x-y+z+v &= 5 \end{aligned}$$
$[x=1, y=1, z=1, v=1]$

22. V Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x-y-3z+4v &= 2\\ 2x+y+z-5v &= -7\\ x+y+z+2v &= 6\\ 3x-4y-2z+v &= 7 \end{aligned}$$
$[x=1, y=-2, z=3, v=2]$

23. V Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3+5x_4 &= -1\\ 3x_1+2x_3-x_4 &= 2\\ -2x_1+3x_2+x_3 &= 3\\ -x_1-x_2-5x_3-11x_4 &= 1 \end{aligned}$$
[az egyenletrendszernek nincs megoldása]

24. V Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -20 \\ 2x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= -11 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 13 \end{aligned}$$

$[x_1 = -0,5; x_2 = 3; x_3 = -2,5; x_4 = -2]$

25. V Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= -2 \end{aligned}$$

$[x_1 = -3 + 15t,5; x_2 = -7t; x_3 = -5 + 13t; x_4 = t; t \in \mathbf{R}]$

26. V Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 19 \\ -2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 &= 9,5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 21 \\ 2x_1 - 4x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

$[x_1 = 0,5; x_2 = 3; x_3 = -2,5; x_4 = -2]$

27. Döntse el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak!

(a) B,V $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $[det(\mathbf{A}) = -2 \neq 0$, létezik a mátrix inverze$]$

(b) B,V $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & 5 \\ 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $[det(\mathbf{B}) = 0$, nem létezik a mátrix inverze$]$

28. B,V Miyen x értékek esetén nincs inverze az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak? $\left[x = \frac{7}{8}\right]$

29. B,V Miyen x értékek esetén van inverze az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 20 \end{pmatrix}$ mátrixnak? $[x \neq 5]$

30. Igazolja, hogy a mátrixnak létezik inverze és határozza meg az inverz mátrixot!

(a) B $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $[det(\mathbf{A}) = 1 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}]$

(b) B $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $[det(\mathbf{B}) = 3 \neq 0$, létezik a mátrix inverze; $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}]$

(c) *V* $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$[det(\mathbf{C}) = 1 \neq 0, \text{ létezik a mátrix inverze; } \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}]$$

(d) V $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$[det(\mathbf{D}) = -6 \neq 0, \text{létezik a mátrix inverze; } \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}]$$

(e) V $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 6 & -8 & 15 \\ 10 & -15 & 34 \end{pmatrix}$

$$[det(\mathbf{E}) = 2 \neq 0, \text{létezik az inverz; } \mathbf{E}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{47}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ -27 & 1 & -6 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}]$$

(f) V $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$[det(\mathbf{F}) = 2 \neq 0, \text{ létezik a mátrix inverze; } \mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}]$$

(g) V $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

$$[det(\mathbf{G}) = -36 \neq 0, \text{ létezik a mátrix inverze; } \mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}]$$

31. Határozza meg a mátrix sajátértékeit!

(a) B $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $[\lambda_1 = 3; \lambda_2 = 11]$

(b) B $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $[\lambda_1 = \lambda_2 = 2]$

(c) B, V $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $[\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -1]$

32. Határozza meg a mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

(a) V $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = -1, s = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0; \lambda_2 = 4, s = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

(b) V $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = 2, s = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0; \lambda_2 = -1, s = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

(c) V $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = 4, s = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0; \lambda_2 = -1, s = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

(d) V $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = 2, s = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0; \lambda_2 = -1, s = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

(e) V $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\left[\lambda_1 = \lambda_2 = 0, s = \begin{pmatrix} -2u + 3t \\ u \\ t \end{pmatrix}, t, u \in R, t, u \neq 0; \lambda_3 = 8, s = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in R, t \neq 0\right]$

33. V Határozza meg az $B^2 - 3B^T$ mátrix sajátértékeit és determinánsát!

$B = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 92; det(B^2 - 3B^T) = 184\right]$

34. V Határozza meg az $(A^T - 2B)^2$ mátrix sajátértékeit és determinánsát!

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\lambda_1 = 62,77; \lambda_2 = 24,23; det((A^T - 2B)^2) = 1521\right]$