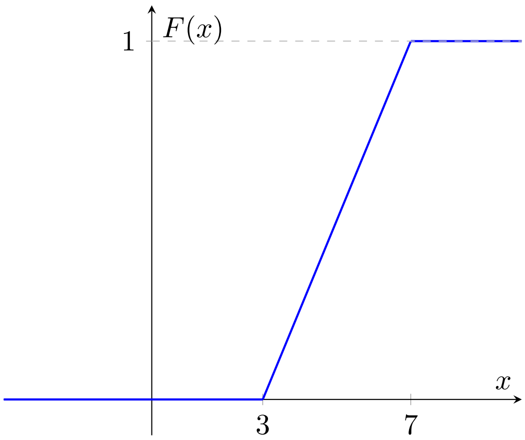
NEVEZETES FOLYTONOS ELOSZLÁSOK

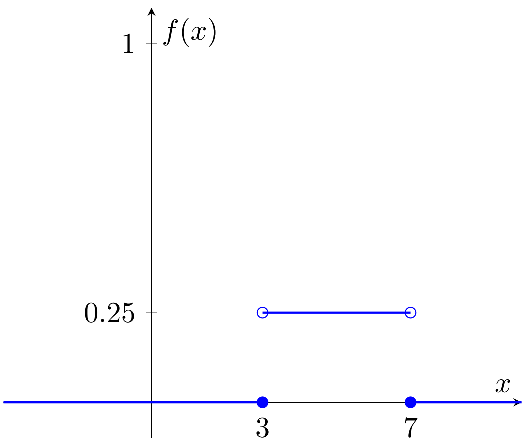
EGYENLETES ELOSZLÁS

1. A $]3,7[$ intervallumból teljesen véletlenszerűen választunk egy értéket. A ξ valószínűségi változó értéke legyen a választott szám.

   (a) V Adja meg és ábrázolja a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!
   $$\left[F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 3 \\ \frac{x-3}{4} & \text{ha } 3 < x \leq 7 \\ 1 & \text{ha } x > 7 \end{cases} \right]$$



   (b) V Adja meg és ábrázolja a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
   $$\left[f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{ha } 3 < x < 7 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \right]$$



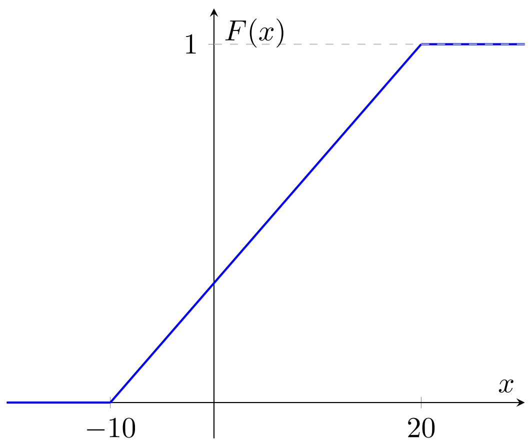
   (c) V Határozza meg a ξ valószínűségi változó várható értékét! $[M(\xi) = 5]$

(d) V Határozza meg a ξ valószínűségi változó szórását! $[D(\xi) = 1,1547]$

2. A $]-10, 20[$ intervallumból teljesen véletlenszerűen választunk egy értéket. A ξ valószínűségi változó értéke legyen a választott szám.

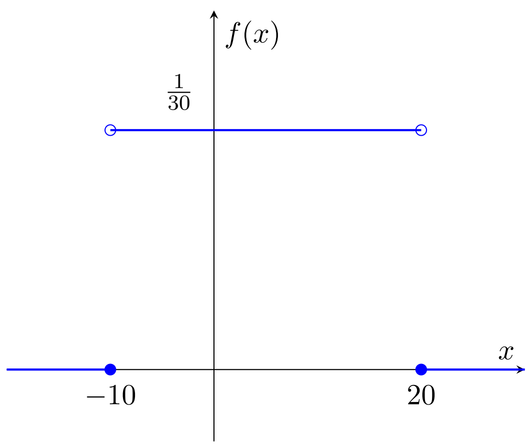
(a) V Adja meg és ábrázolja a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

$$\left[F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq -10 \\ \frac{x+10}{30} & \text{ha } -10 < x \leq 20 \\ 1 & \text{ha } x > 20 \end{cases} \right]$$



(b) V Adja meg és ábrázolja a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

$$\left[f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{ha } -10 < x < 20 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \right]$$



(c) V Határozza meg a ξ valószínűségi változó várható értékét! $[M(\xi) = 5]$

(d) V Határozza meg a ξ valószínűségi változó szórását! $[D(\xi) = 8,6603]$

(e) V Mekkora a valószínűsége, hogy a választott szám kisebb mint 8?
$[P(\xi < 8) = 0,6]$

(f) V Mekkora a valószínűsége, hogy a választott szám 6 és 16 közé esik?
$[P(6 < \xi < 16) = 0,3333]$

(g) V Mekkora a valószínűsége, hogy a választott szám nagyobb mint 12?
$[P(\xi > 12) = 0,2667]$

(h) V Mekkora a valószínűsége, hogy a választott szám abszolút értéke kisebb mint 6?
$[P(|\xi| < 6) = P(-6 < \xi < 6) = 0,4]$

(i) V Mekkora a valószínűsége, hogy a választott szám abszolút értéke nagyobb mint 4?
$[P(|\xi| > 4) = P(\xi < -4) + P(\xi > 4) = 0,7333]$

3. Egy 600 méter hosszú vezeték bármely pontjában meghibásodhat. A hiba helye egyenletes eloszlású folytonos valószínűségi változó.

(a) V Adja meg a hiba helyét leíró valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!
$$\left[F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \frac{x}{600} & \text{ha } 0 < x \le 600 \\ 1 & \text{ha } x > 600 \end{cases} \right]$$

(b) V Adja meg a hiba helyét leíró valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
$$\left[f(x) = \begin{cases} \frac{1}{600} & \text{ha } 0 < x < 600 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \right]$$

(c) V Határozza meg a hiba helyét leíró valószínűségi változó várható értékét! $[M(\xi) = 300]$

(d) V Határozza meg a hiba helyét leíró valószínűségi változó szórását! $[D(\xi) = 173,2051]$

(e) V Mekkora a valószínűsége, hogy a vezeték első negyedében történik a meghibásodás?
$[P(\xi \le 150) = 0,25]$

(f) V Mekkora a valószínűsége, hogy a vezeték pontosan a felénél hibásodik meg?
$[P(\xi = 300) = 0]$

(g) V Mekkora a valószínűsége, hogy a vezeték az első 50 méter után hibásodik meg?
$[P(\xi > 50) = 0,9167]$

4. Egy szövőüzemben 10 méter hosszú fonalat készítenek, amely néha elszakadhat. A szakadás helye egyenletes eloszlású valószínűségi változó.

(a) V Mekkora a valószínűsége, hogy az első három méteren belül történik a szakadás?
$[P(\xi < 3) = 0,3]$

(b) V Mekkora a valószínűsége, hogy a fonal pontosan a hatodik méternél szakad el?
$[P(\xi = 6) = 0]$

(c) V Mekkora a valószínűsége, hogy a szakadás mindkét végétől legalább 2 méterre van?
$[P(2 \le \xi \le 8) = 0,6]$

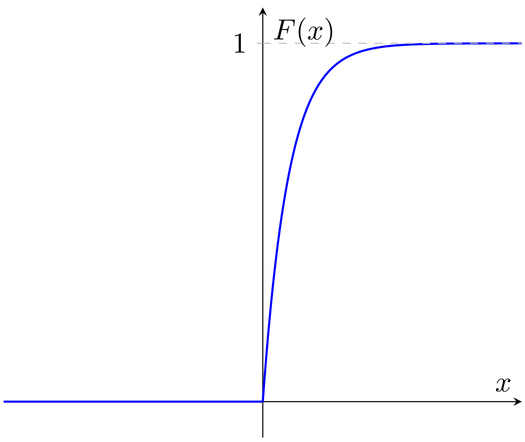
(c) V Mekkora a valószínűsége, hogy a szakadás a várható értéken belül található?
$[M(\xi) = 5; P(\xi < 5) = 0,5]$

EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁS

1. Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó, 5000 óra várható értékkel.

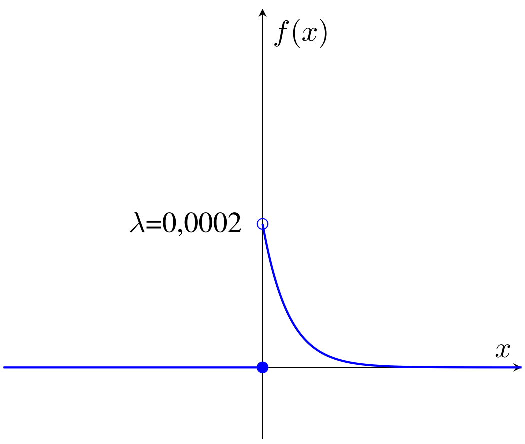
(a) V Adja meg és ábrázolja az alkatrész élettartamát jelölő valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

$$\left[F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-0,0002 \cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \right]$$



(b) V Adja meg és ábrázolja az alkatrész élettartamát jelölő valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

$$\left[f(x) = \begin{cases} 0,0002 \cdot \mathrm{e}^{-0,0002 \cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \right]$$



(c) V Mi a valószínűsége, hogy az alkatrész kevesebb, mint 500 óra alatt meghibásodik?
$[P(\xi < 500) = 0,0952]$

(d) V Mi a valószínűsége, hogy az alkatrész 1000 óra múlva még működni fog?
$[P(\xi \geq 1000) = 0,8187]$

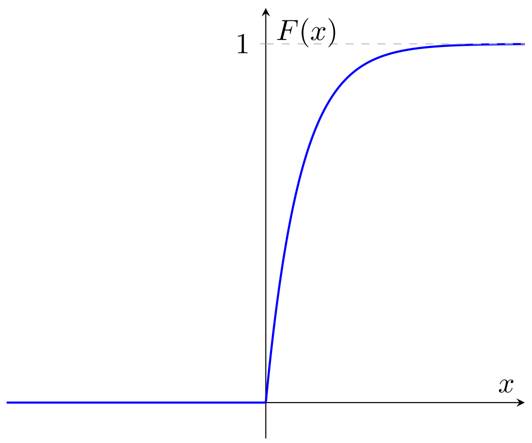
(e) V Mi a valószínűsége, hogy az alkatrész legalább 3000, de legfeljebb 7000 órát képes működni?
$[P(3000 \leq \xi \leq 7000) = 0,3022]$

(f) V Feltéve, hogy az alkatrész 3000 óráig működött, mi a valószínűsége, hogy még legalább 6000 óráig működni fog?
[Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága miatt nem számít mennyit működött már az alkatrész. $P(\xi \geq 6000) = 0,3012$]

2. Vihar idején két villámcsapás között eltelt idő exponenciális eloszlást követ, melynek szórása 2 perc.

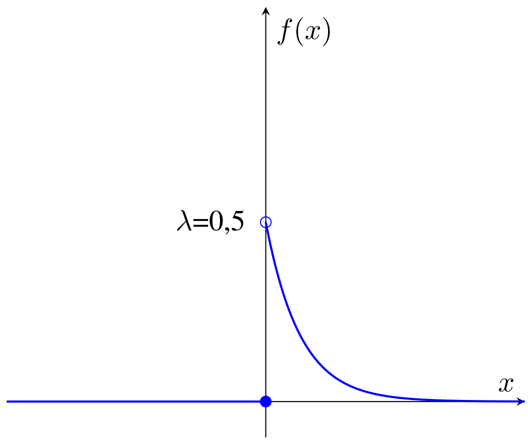
(a) V Adja meg és ábrázolja a két villámcsapás között eltelt időt jelölő valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

$$\left[F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-0,5\cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \right]$$



(b) V Adja meg és ábrázolja a két villámcsapás között eltelt időt jelölő valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

$$\left[f(x) = \begin{cases} 0,5 \cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \right]$$



(c) V Mi a valószínűsége, hogy két villámcsapás között legfeljebb 1 perc telik el?
$[P(\xi \leq 1) = 0,3935]$

(d) V Mi a valószínűsége, hogy két villámcsapás között legalább 2 perc telik el?
$[P(\xi \geq 2) = 0,3679]$

3. Egy bizonyos típusú izzó élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó és szórása 1000 óra.

(a) V Adja meg az izzó élettartamát jelölő valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!
$$\left[F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-0,001 \cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \right]$$

(b) V Adja meg az izzó élettartamát jelölő valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
$$\left[f(x) = \begin{cases} 0,001 \cdot \mathrm{e}^{-0,001 \cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \right]$$

(c) V Mi a valószínűsége, hogy az izzó élettartama kisebb a várható értéknél?
$[M(\xi) = 1000; P(\xi < 1000) = 0,6321]$

4. Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra 10 percnél többet kell várni, a tapasztalatok szerint $0,2$. A várakozási idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

(a) V Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen a benzinkúthoz érkezve 5 percen belül sorra kerülünk?
$[P(\xi > 10) = 0,2; 1 - P(\xi \leq 10) = 0,2; 1 - F(10) = 0,2; 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 10}) = 0,2;$
$\mathrm{e}^{-\lambda \cdot 10} = 0,2; \lambda = 0,160944; P(\xi < 5) = 0,5528]$

(b) V Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen a benzinkúthoz érkezve 15 percnél többet kell várnunk?
$[P(\xi > 15) = 0,0894]$

5. Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Tapasztalat szerint az ilyen típusú alkatrészek 80%-a bír ki 4000 óránál többet.

(a) V Mennyi a valószínűsége, hogy egy alkatrész legalább 6000 órát képes működni?
$[P(\xi > 4000) = 0,8; 1-P(\xi \leq 4000) = 0,8; 1-F(4000) = 0,8; 1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda \cdot 4000}) = 0,8; \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 4000} = 0,8; \lambda = 0,00005578; P(\xi \geq 6000) = 0,7155]$

(b) V Feltéve, hogy egy alkatrész már 3000 órája működik, mi a valószínűsége, hogy még legalább 7000 órát képes működni?
[Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága miatt nem számít mennyit működött már az alkatrész. $P(\xi \geq 7000) = 0,6767$]

NORMÁLIS ELOSZLÁS

1. Egy normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 12, szórása 4.

(a) V Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó értéke kisebb mint 17!
$[m = 12; \sigma = 4; P(\xi < 17) = P(\xi^* < 1,25) = \Phi(1,25) = 0,8944]$

(b) V Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó értéke legfeljebb 8!
$[m = 12; \sigma = 4; P(\xi \leq 8) = P(\xi^* \leq -1) = \Phi(-1) = 0,1587]$

(c) V Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó értéke nagyobb mint 13!
$[m = 12; \sigma = 4; P(\xi > 13) = P(\xi^* > 0,25) = 1 - \Phi(0,25) = 0,4013]$

(d) V Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó értéke legalább 9!
$[m = 12; \sigma = 4; P(\xi \geq 9) = P(\xi^* \geq -0,75) = 1 - \Phi(-0,75) = 0,7734]$

(e) V Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó értéke 11 és 14 közé esik!
$[m = 12; \sigma = 4; P(11 < \xi < 14) = P(-0,25 < \xi^* < 0,5) = \Phi(0,5) - \Phi(-0,25) = 0,2902]$

2. Egy normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 24, szórása 5. Határozza meg azt a c értéket, melyre

(a) V $P(\xi < c) = 0,8$
$[m = 24; \sigma = 5; P(\xi < c) = 0,8; P(\xi^* < \frac{c-24}{5}) = 0,8; \Phi(\frac{c-24}{5}) = 0,8; \frac{c-24}{5} = 0,84; c = 28,2]$

(b) V $P(\xi < c) = 0,22$
$[m = 24; \sigma = 5; P(\xi < c) = 0,22; P(\xi^* < \frac{c-24}{5}) = 0,22; \Phi(\frac{c-24}{5}) = 0,22;$ A táblázat Φ oszlopában nincs 0,5-nél kisebb érték. Felhasználjuk a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ összefüggést. $\Phi(-\frac{c-24}{5}) = 0,78; -\frac{c-24}{5} = 0,77; c = 20,15]$

3. Egy város lakosainak magasság adatai normális eloszlást követnek, 175 cm várható értékkel és 10 cm szórással.

(a) V Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember testmagassága legfeljebb 178 cm?
$[m = 175; \sigma = 10; P(\xi \leq 178) = P(\xi^* \leq 0,3) = \Phi(0,3) = 0,6179$

(b) V Mennyi a valószínűsége, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott ember testmagassága több mint 168 cm?
$[m = 175; \sigma = 10; P(\xi > 168) = P(\xi^* > -0,7) = 1 - \Phi(-0,7) = 0,7580$

(c) V Mennyi a valószínűsége, hogy egy találomra kiválasztott ember testmagassága 171 cm és 181 cm közé esik?
$[m = 175; \sigma = 10; P(171 < \xi < 181) = P(-0,4 < \xi^* < 0,6) = \Phi(0,6) - \Phi(-0,4) = 0,3811$

(d) V Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember testmagassága a várható értéktől kevesebb mint 4 cm-rel tér el?
$[m = 175; \sigma = 10; P(171 < \xi < 179) = P(-0,4 < \xi^* < 0,4) = \Phi(0,4) - \Phi(-0,4) = 0,3108$

4. Az IQ teszt eredménye egy adott országon belül normális eloszlású valószínűségi változó, 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással.

(a) V A populáció hány százalékának van 140 feletti intelegencia-hányadosa?
$[m = 100; \sigma = 15; P(\xi > 140) = P(\xi^* > 2,67) = 1 - \Phi(2,67) = 0,0038 \to 0,38\%]$

(b) V A populáció hány százalékának van 70 alatti intelegencia-hányadosa?
$[m = 100; \sigma = 15; P(\xi < 70) = P(\xi^* < -2) = \Phi(-2) = 0,0228 \to 2,28\%]$

5. Egy csomagológép 1 kg tömegű sajtot csomagol. A sajtok tömege normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető 5 dkg szórással.

(a) V Mennyi a valószínűsége, hogy egy sajtdarab súlya 96 dkg-nál több?
$[m = 100; \sigma = 5; P(\xi > 96) = P(\xi^* > -0,8) = 1 - \Phi(-0,8) = 1 - (1 - \Phi(0,8)) = 0,7881]$

(b) V Mennyi a valószínűsége, hogy egy sajtdarab súlya 105 dkg-nál kevesebb?
$[m = 100; \sigma = 5; P(\xi < 105) = P(\xi^* < 1) = \Phi(1) = 0,8413]$

(c) V Mennyi a valószínűsége, hogy egy sajtdarab súlya 98 dkg és $1,02$ kg közé esik?
$[m = 100; \sigma = 5; P(98 < \xi < 102) = P(-0,4 < \xi^* < 0,4) = \Phi(0,4) - \Phi(-0,4) = 0,3108]$

6. Egy gyárban a gép által gyártott alkatrészek tömege normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető, melynek a várható értéke 30 dkg, szórása 4 g.

(a) V Mennyi a valószínűsége, hogy a gép által gyártott alkatrész tömege legfeljebb 302 g?
$[m = 300; \sigma = 4; P(\xi \leq 302) = P(\xi^* \leq 0,5) = \Phi(0,5) = 0,6915]$

(b) V Mennyi a valószínűsége, hogy a gép által gyártott alkatrész tömege legalább 290 g?
$[m = 300; \sigma = 4; P(\xi \geq 290) = P(\xi^* \geq -2,5) = 1 - \Phi(-2,5) = 0,9938]$

(c) V Mennyi a valószínűsége, hogy a gép által gyártott alkatrész tömege 301 g?
$[P(\xi = 301) = 0]$

(d) V Mennyi a valószínűsége, hogy a gép által gyártott alkatrész tömege legalább 298 g, de legfeljebb 303 g?
$[m = 300; \sigma = 4; P(298 \leq \xi \leq 303) = P(-0,5 \leq \xi^* \leq 0,75) = \Phi(0,75) - \Phi(-0,5) = 0,4649]$

7. Egy fűrészüzemben gyártott léc hossza normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 100 cm. A lécek 10%-a rövidebb, mint $96,4$ cm.

   (a) V Mekkora a lécek hosszának szórása?
   $[m = 100; P(\xi < 96,4) = 0,1; P(\xi^* < \frac{96,4-100}{\sigma}) = 0,1; P(\xi^* < -\frac{3,6}{\sigma}) = 0,1; \Phi(-\frac{3,6}{\sigma}) = 0,1; 1 - \Phi(\frac{3,6}{\sigma}) = 0,1; \Phi(\frac{3,6}{\sigma}) = 0,9; \frac{3,6}{\sigma} = 1,28; \sigma = 2,8125]$

   (b) V Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott léc hossza 98 és 102 cm közé esik?
   $[m = 100; \sigma = 2,8125; P(98 < \xi < 102) = P(-0,71 < \xi^* < 0,71) = \Phi(0,71) - \Phi(-0,71) = 0,5222]$

8. Egy üzemben 30 dkg névleges töltőtömegű konzervet gyártanak. A töltőtömeg normális eloszlásúnak tekinthető, melynek a várható értéke megegyezik a névleges értékkel. A termék 95%-ának töltőtömege 27 dkg és 33 dkg közötti.

   (a) V Mekkora a töltőtömeget leíró valószínűségi változó szórása?
   $[m = 30; P(27 < \xi < 33) = 0,95; P(\frac{27-30}{\sigma} < \xi^* < \frac{33-30}{\sigma}) = 0,95;$
   $P(-\frac{3}{\sigma} < \xi^* < \frac{3}{\sigma}) = 0,95; \Phi(\frac{3}{\sigma}) - \Phi(-\frac{3}{\sigma}) = 0,95; \Phi(\frac{3}{\sigma}) - [1 - \Phi(\frac{3}{\sigma})] = 0,95;$
   $\Phi(\frac{3}{\sigma}) = 0,975; \frac{3}{\sigma} = 1,96; \sigma = 1,5306]$

   (b) V Ha a szórás $1,5$ dkg lenne, akkor a termékek hány százalékának tömege esne 27 dkg és 33 dkg közé?
   $[m = 30; \sigma = 1,5; P(27 < \xi < 33) = P(-2 < \xi^* < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0,9544 \rightarrow 95,44\%]$