

Pénzügyi számítások

2015. december 2.

1. ÁFA

Nettó ár = Tiszta ár, adót nem tartalmaz,

Bruttó ár = fogyasztói ár = adóval terhelt érték = Nettó ár + ÁFA

A jelenlegi ÁFA a nettó ár 27%-a.

Összefüggések:

$$\text{bruttó ár} = \text{nettó ár} \cdot 1,27$$

$$\text{nettó ár} = \frac{1}{1,27} \cdot \text{bruttó ár} = 0,7874 \cdot \text{bruttó ár}$$

$$\text{ÁFA} = \text{bruttó ár} - \text{nettó ár} = \text{bruttó ár} \left(1 - \frac{1}{1,27}\right) = \text{bruttó ár} \cdot 0,2126$$

1. Egy termék nettó ára 30 000 Ft. 27%-os ÁFA kulccsal számolva, mennyi lesz a termék ÁFA-ja?

Megoldás:

$$\text{ÁFA} = \text{nettó ár} \cdot 0,27 = 30\,000 \cdot 0,27 = 8\,100 \text{ Ft}$$

2. Egy termék nettó ára 21 000 Ft. 27%-os ÁFA kulccsal számolva, mennyi lesz a fogyasztói ára?

Megoldás:

$$\text{Fogyasztói ár} = \text{nettó ár} \cdot 1,27 = 21\,000 \cdot 1,27 = 26\,670 \text{ Ft}$$

3. Ha egy áru fogyasztói ára 50 000 Ft, akkor hány Ft ÁFA-t tartalmaz, ha az ÁFA kulcs 27%?

Megoldás:

$$\text{ÁFA} = \text{bruttó ár} \cdot 0,2126 = 50\,000 \cdot 0,2126 = 10\,630 \text{ Ft}$$

4. Ha egy áru fogyasztói ára 35 000 Ft, akkor hány Ft ÁFA-t tartalmaz, ha az ÁFA kulcs 18%?

Megoldás:

$$\text{ÁFA} = \text{bruttó ár} \cdot \left(1 - \frac{1}{1,18}\right) = 35\,000 \cdot 0,1525 = 5\,339 \text{ Ft}$$

5. Egy termék ÁFA kulcsa 25%-ról 27%-ra fog nőni. Mekkora lesz az áremelkedés, ha a nettó ár nem változik?

Megoldás:

$$\text{régi bruttó ár} = \text{nettó ár} \cdot 1,25$$

$$\text{új bruttó ár} = \text{nettó ár} \cdot 1,27$$

$$\frac{\text{új bruttó ár}}{\text{régi bruttó ár}} = \frac{\text{nettó ár} \cdot 1,27}{\text{nettó ár} \cdot 1,25} = \frac{1,27}{1,25} = 1,016$$

Tehát az ÁFA kulcs 2 százalékponttal növekedett, a termék ára pedig 1,6%-kal nőtt.

6. Egy termék ÁFA kulcsa 27%-ról 20%-ra csökken. Mekkora lesz az ár-csökkenés, ha a nettó ár nem változik?

Megoldás:

$$\text{régi bruttó ár} = \text{nettó ár} \cdot 1,27$$

$$\text{új bruttó ár} = \text{nettó ár} \cdot 1,20$$

$$\frac{\text{új bruttó ár}}{\text{régi bruttó ár}} = \frac{\text{nettó ár} \cdot 1,20}{\text{nettó ár} \cdot 1,27} = \frac{1,20}{1,27} = 0,945$$

Tehát az ÁFA kulcs 7 százalékpontos csökkenése a termék 5,5%-os csökkenését eredményezte.

7. Egy termék ÁFA kulcsa 27%-ról 20%-ra csökken. A termék nettó ára pedig 4%-kal nő. Hogy változik a termék ára az eredeti árhoz képest?

Megoldás:

$$\text{régi bruttó ár} = \text{régi nettó ár} \cdot 1,27$$

$$\text{új nettó ár} = 1,04 \cdot \text{régi nettó ár}$$

$$\text{új bruttó ár} = \text{új nettó ár} \cdot 1,20 = 1,04 \cdot \text{régi nettó ár} \cdot 1,20$$

$$\frac{\text{új bruttó ár}}{\text{régi bruttó ár}} = \frac{1,04 \cdot \text{nettó ár} \cdot 1,20}{\text{nettó ár} \cdot 1,27} = \frac{1,04 \cdot 1,20}{1,27} = 0,983$$

Tehát a termék ára csökkent 1,7%-kal.

8. Egy termék ÁFA kulcsa kezdetben 15%. A nettó ár 5%-os emelése után mekkora az új ÁFA kulcs, ha a fogyasztói ár 10%-kal emelkedett?

Megoldás:

$$\text{régi bruttó ár} = \text{régi nettó ár} \cdot 1,15$$

$$\text{új nettó ár} = 1,05 \cdot \text{régi nettó ár}$$

$$\text{új bruttó ár} = \text{új nettó ár} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

$$\text{új bruttó ár} = 1,05 \cdot \text{régi nettó ár} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

$$\frac{\text{új bruttó ár}}{\text{régi bruttó ár}} = \frac{1,05 \cdot \text{régi nettó ár} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)}{\text{régi nettó ár} \cdot 1,15} = \frac{1,05 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)}{1,15} = 1,1$$

Az egyenletet x -re megoldva $x = 20,5\%$

9. Egy termék ÁFA kulcsa kezdetben 18%. A nettó ár 6%-os emelése után mekkora az új ÁFA kulcs, ha a fogyasztói ár nem változott?

Megoldás:

$$\text{régi bruttó ár} = \text{régi nettó ár} \cdot 1,18$$

$$\text{új nettó ár} = 1,06 \cdot \text{régi nettó ár}$$

$$\text{új bruttó ár} = \text{új nettó ár} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

$$\text{új bruttó ár} = 1,06 \cdot \text{régi nettó ár} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

$$\frac{\text{új bruttó ár}}{\text{régi bruttó ár}} = \frac{1,06 \cdot \text{régi nettó ár} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)}{\text{régi nettó ár} \cdot 1,18} = \frac{1,06 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)}{1,18} = 1$$

Az egyenletet x -re megoldva $x = 11,32\%$

10. Egy termék ÁFA kulcsa kezdetben 10%. A nettó ár 4%-os csökkenése után mekkora az új ÁFA kulcs, ha a fogyasztói ár 2%-kal nőtt?

Megoldás:

$$\text{régi bruttó ár} = \text{régi nettó ár} \cdot 1,1$$

$$\text{új nettó ár} = 0,96 \cdot \text{régi nettó ár}$$

$$\text{új bruttó ár} = \text{új nettó ár} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

$$\text{új bruttó ár} = 0,96 \cdot \text{régi nettó ár} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$$

$$\frac{\text{új bruttó ár}}{\text{régi bruttó ár}} = \frac{0,96 \cdot \text{régi nettó ár} \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)}{\text{régi nettó ár} \cdot 1,1} = \frac{0,96 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)}{1,1} = 1,02$$

Az egyenletet x -re megoldva $x = 16,87\%$

2. Egyszerű vagy lineáris kamat

Definíció: Egyszerű kamatozásról akkor beszélünk, ha az alaptőke $p\%$ százalékat szabályos időközönként (kamatperiódusként) hozzáadják a tőkéhez. Ebben az esetben a kamat nem kamatozik.

Legyen T_0 a lekötött összeg, p kamatláb, t futamidő:

$$T_1 = T_0 + T_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot t = T_0 \left(1 + \frac{p}{100} \cdot t \right)$$

1. **Feladat:** Mennyi lesz 150 000 Ft-ot egyszerű kamata 6%-os évi kamattal számolva, ha a futamidő

- (a) 1 hónap;
- (b) félév;
- (c) 2 és fél év?

Megoldás:

- (a) Ki kell számolni először t értékét évben megadva. Egy hónap az év 12-ed része, így $t = \frac{1}{12}$, így az egy hónapra eső kamat:

$$150\,000 \cdot 0,06 \cdot \frac{1}{12} = 750 \text{ Ft}$$

- (b) 6 hónap esetén $t = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, így a 6 hónapra eső kamat:

$$150\,000 \cdot 0,06 \cdot \frac{1}{2} = 4\,500 \text{ Ft}$$

- (c) 2 és fél év esetén $t = 2,5$, a számolt kamat:

$$150\,000 \cdot 0,06 \cdot 2,5 = 22\,500 \text{ Ft}$$

2. **Feladat:** 80 000 Ft kölcsönt veszünk fel évi 15%-os kamattal. Egyszerű kamattal számolva, mennyi pénzt kell visszafizetnünk, ha a lejáratidő

- (a) 3 hónap;
- (b) 7 hónap;
- (c) 50 nap?

Megoldás:

- (a) 3 hónap esetén $t = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, így a 3 hónapra eső kamat:

$$80\,000 \cdot 0,15 \cdot \frac{1}{4} = 3\,000 \text{ Ft}$$

A 3 hónapra felvett kölcsön lejáratidő értéke:

$$80\,000 + 3\,000 = 83\,000 \text{ Ft}$$

(b) 7 hónap esetén $t = \frac{7}{12}$, így a 7 hónapra eső kamat:

$$80\,000 \cdot 0,15 \cdot \frac{7}{12} = 5\,250 \text{ Ft}$$

A 7 hónapra felvett kölcsön lejáratosi értéke: 85250 Ft

(c) 50 nap esetén $t = \frac{50}{365}$, így a 50 napra eső kamat:

$$80\,000 \cdot 0,15 \cdot \frac{50}{365} = 1\,644 \text{ Ft}$$

Az 50 napra felvett kölcsön lejáratosi értéke: 81 644 Ft

3. **Feladat:** Egy hónapra elhelyezünk a bankban 1,5 millió Ft-ot. Egyszerű kamattal számolva a kapott kamat 5 000 Ft. Mekkora az éves kamatláb?

Megoldás:

$$1\,500\,000 \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{12} = 5\,000 \quad \rightarrow \quad p = 4\%$$

4. **Feladat:** Negyedévre elhelyezünk a bankban 600 000 Ft-ot. Egyszerű kamattal számolva a kapott kamat 2 000 Ft. Mekkora az éves kamatláb?

Megoldás:

$$600\,000 \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{4} = 2\,000 \quad \rightarrow \quad p = 1,33\%$$

5. **Feladat:** Egyszerű kamattal számolva, hány forintot helyeztünk el a bankban, ha félév múlva 12 000 Ft kamatot kaptunk évi 5%-os kamatláb esetén?

Megoldás:

$$T_0 \frac{5}{100} \cdot \frac{1}{2} = 12\,000 \quad \rightarrow \quad T_0 = 480\,000 \text{ Ft}$$

6. **Feladat:** Egyszerű kamattal számolva, hány forintot helyeztünk el a bankban, ha másfél év múlva 70000 Ft kamatot kaptunk évi 8%-os kamatláb esetén?

Megoldás:

$$T_0 \frac{8}{100} \cdot \frac{3}{2} = 70\,000 \quad \rightarrow \quad T_0 = 583\,333 \text{ Ft}$$

3. Kamatos kamat

Definíció: Kamatos kamat számolásról akkor beszélünk, ha a kamatperiódus végén a kamatot nem fizetik ki, hanem hozzáadják a tőkéhez és a kapott kamat is kamatozik. A kamatjöváírás (tőkésítés) a gyakorlatban történhet többévente, évente, félévente vagy havonta.

Jelölje T_0 az alaptőkét, p az egy tőkésítési periódusra eső kamatlábat, n pedig a tőkésítések számát, ekkor a kamatos kamattal növelt T összeg:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Ha a tőkésítések száma n , de a tőkésítési periódusra eső kamatlábak különbözőek: $p_1, p_2 \dots p_n$, akkor a felvett összeg:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right)$$

1. **Feladat:** 200 000-Ft-ot elhelyezünk a bankban folyamatos éves ismétlődő lekötés mellett. Mennyi pénzt vehetünk fel 5 év múlva, ha az éves kamatláb minden évben 4%?

Megoldás: $T_0 = 200\,000$, $p = 4\%$ és a tőkésítések száma $n = 5$, így a felvett összeg az 5 év végén:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 200\,000 \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = 243\,330,58 \text{ Ft}$$

2. **Feladat:** 200 000-Ft-ot elhelyezünk a bankban folyamatos ismétlődő lekötés mellett. Mennyi pénzt vehetünk fel 5 év múlva, ha az éves kamatláb minden évben 4% és a bank

- (a) félévente;
- (b) negyedévente;
- (c) havonta tőkésít?

Megoldás:

- (a) félévenkénti tőkésítéssel számolva: $T_0 = 200\,000$, $p = \frac{4}{2} = 2\%$ és a tőkésítések száma $n = 2 \cdot 5 = 10$, így a felvett összeg az 5 év végén:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 200\,000 \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{10} = 243\,798,88 \text{ Ft}$$

- (b) negyedévenkénti tőkésítéssel számolva: $T_0 = 200\,000$, $p = \frac{4}{4} = 1\%$ és a tőkésítések száma $n = 4 \cdot 5 = 20$, így a felvett összeg az 5 év végén:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 200\,000 \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{20} = 244\,038,00 \text{ Ft}$$

- (c) havonta tőkésítéssel számolva: $T_0 = 200\,000$, $p = \frac{4}{12} = 0,333\%$ és a tőkésítések száma $n = 12 \cdot 5 = 60$, így a felvett összeg az 5 év végén:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 200\,000 \left(1 + \frac{0,333}{100}\right)^{60} = 244\,150,64 \text{ Ft}$$

3. **Feladat** 200 000-Ft-ot elhelyezünk a bankban folyamatos éves ismétlődő lekötés mellett. Mennyi pénzt vehetünk fel 3 év múlva, ha az éves kamatláb első évben 4%, a következőben 3,5%, majd a harmadikban 3%?

Megoldás: $T_0 = 200\,000$, a tőkésítések száma $n = 3$, de a kamatláb változik, $p_1 = 4\%$, $p_2 = 3,5\%$ és $p_3 = 3\%$.

$$\begin{aligned} T &= T_0 \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) = \\ &= 200\,000 \left(1 + \frac{4}{100}\right) \left(1 + \frac{3,5}{100}\right) \left(1 + \frac{3}{100}\right) = 221\,738,4 \text{ Ft} \end{aligned}$$

4. **Feladat:** Mekkora összeget helyeztünk el a bankban ismétlődő éves lekötés mellett, ha 3 év múlva 850 000-Ft-ot vehettünk fel? Az éves kamatláb minden évben 5%.

Megoldás: $T = 850\,000$, $p = 5\%$ és a tőkésítések száma $n = 3$,

$$T = T_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Helyettesítsünk be:

$$850\,000 = T_0 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3$$

Innen

$$T_0 = \frac{850\,000}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^3} = 734\,262 \text{ Ft}$$

5. **Feladat:** Az év elején 200 000-Ft-ot elhelyezünk a bankban folyamatos havi ismétlődő lekötés mellett. Mennyi pénzt vehetünk fel az év végén, ha az havi kamatláb minden hónapban 0,9%?

Végeredmény: A felvehető összeg: 222 701 Ft.

6. **Feladat:** Az év elején 200 000-Ft-ot elhelyezünk a bankban folyamatos havi ismétlődő lekötés mellett. Mennyi pénzt vehetünk fel az év végén, ha az havi kamatláb az első hat hónapban 0,9%, majd az év második felében 1%?

Végeredmény: A felvehető összeg: 224 029 Ft.

7. **Feladat:** Mekkora összeget helyezünk el a bankban, hogy kamatos kamattal számolva 5 év múlva 500 000 Ft-ot tudjunk felvenni? Éves kamatláb minden évben 7%.
Végeredmény: 356 493,1 Ft-ot kell elhelyeznünk a bankban.
8. **Feladat:** Mekkora éves kamatot realizálhatunk ismétlődő havi lekötés mellett, ha a havi kamat egész évben 0,9%?
Végeredmény: Az éves kamat 11,3%.
9. **Feladat:** Mekkora éves kamatot realizálhatunk ismétlődő negyedévi lekötés mellett, ha a negyedévi kamat egész évben 1,1%?
Végeredmény: Az éves kamat 4,47%.
10. **Feladat:** Évi 10%-os kamat hány százalékos havi kamattal egyenértékű?
Végeredmény: A havi kamat 0,8%.
11. **Feladat:** Évi 6%-os kamat hány százalékos havi kamattal egyenértékű?
Végeredmény: A havi kamat 0,48%.
12. **Feladat:** A pénzünket folyamatos évi lekötéssel betesszük a bankba. A kamat minden évben 6%. Mennyi idő alatt duplázódik meg a betett összeg?
Végeredmény: 11,89 év múlva fog duplázódni a betett összeg.
13. **Feladat:** Kamatos kamattal és évi 8% kamattal számolva, mennyi idő alatt duplázódik meg a betett összeg?
Végeredmény: 9 év múlva fog duplázódni a betett összeg.

4. Inflációszámítás

Definíció: Az infláció mértéke egy adott időszakra vonatkozóan $p\%$ -os, ha az időszak végén az időszak elejéhez viszonyítva a javak egy egysége $p\%$ -kal többbe kerül.

Definíció: T_0 Ft vásárlóértéke megmutatja, hogy az év elején mennyibe került az az áru, amit év végén T_0 Ft-ért vásároltunk.

Jelölje a pénzem év eleji névértékét T_0 , az éves infláció mértékét $p_i\%$, ekkor a pénzem T_v vásárlóértéke az év végén:

$$T_v = \frac{T_0}{1 + \frac{p_i}{100}}$$

Ha az éves infláció n évig állandó, akkor T_0 összeg vásárlóértéke n . év végén:

$$T_v = \frac{T_0}{\left(1 + \frac{p_i}{100}\right)^n}$$

Változó inflációval számolva:

n egymást követő évben az infláció rendre $p_{i_1}; p_{i_2}; \dots; p_{i_n}$, akkor az n . év végén T_0 vásárlóértéke:

$$T_v = \frac{T_0}{\left(1 + \frac{p_{i_1}}{100}\right)\left(1 + \frac{p_{i_2}}{100}\right) \cdots \left(1 + \frac{p_{i_n}}{100}\right)}$$

1. **Feladat:** 100 000 Ft-nak év végén 7%-os éves infláció mellett mennyi lesz a vásárlóértéke?

Megoldás: $T_0 = 100\,000$, az infláció $p_i = 7\%$

$$T_v = \frac{T_0}{1 + \frac{p_i}{100}} = \frac{100\,000}{1 + \frac{7}{100}} = 93\,457,9 \text{ Ft.}$$

2. **Feladat:** Havi 0,6%-os infláció mellett 10 hónap múlva mennyi lesz 50 000 Ft vásárlóértéke?

Megoldás: $T_0 = 50\,000$, az infláció $p_i = 0,6\%$, $n = 10$

$$T_v = \frac{T_0}{\left(1 + \frac{p_i}{100}\right)^n} = \frac{50\,000}{\left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^{10}} = 47\,096,67$$

3. **Feladat:** 500 000 Ft-nak mennyi lesz a vásárló értéke 3 év múlva akkor, ha az infláció mértéke mindegyik évben 2%-os volt?

Megoldás: $T_0 = 500\,000$, az infláció $p_i = 2\%$, $n = 3$

$$T_v = \frac{T_0}{\left(1 + \frac{p_i}{100}\right)^n} = \frac{500\,000}{\left(1 + \frac{2}{100}\right)^3} = 471\,161,17 \text{ Ft.}$$

4. **Feladat:** 500 000 Ft-nak mennyi lesz a vásárló értéke 3 év múlva akkor, ha az éves infláció mértéke az egymást követő években 4%, 3% illetve 3,5%?

Megoldás:

$$T_v = \frac{500\,000}{\left(1 + \frac{4}{100}\right)\left(1 + \frac{3}{100}\right)\left(1 + \frac{3,5}{100}\right)} = 450\,981 \text{ Ft}$$

5. **Feladat:** 500 000-Ft-nak mennyi lesz a vásárló értéke 3 év múlva akkor, ha éves ismétlődő lekötés mellett az éves kamatláb 4%, 5% illetve 5,5%, ugyanakkor az infláció mértéke mindegyik évben 3%-os volt?

Megoldás:

$$T_v = 500\,000 \frac{\left(1 + \frac{4}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{5,5}{100}\right)}{\left(1 + \frac{3}{100}\right)^3} = 527\,149 \text{ Ft}$$

6. **Feladat:** 500 000 Ft-nak mennyi lesz a vásárló értéke 3 év múlva akkor, ha éves ismétlődő lekötés mellett az éves kamatláb 4%, 5% illetve 5,5%, ugyanakkor az infláció mértéke 3%, 4% és 4,5%?

Megoldás:

$$T_v = 500\,000 \frac{\left(1 + \frac{4}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{5,5}{100}\right)}{\left(1 + \frac{3}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{4,5}{100}\right)} = 514\,586 \text{ Ft}$$

7. **Feladat:** Havi 1,2%-os infláció milyen éves szintűvel egyenértékű?

Végeredmény: Évi 15,3%-os inflációval egyenértékű.

8. **Feladat:** Havi 0,7%-os infláció milyen éves szintűvel egyenértékű?

Végeredmény: Évi 8,73%-os inflációval egyenértékű.

9. **Feladat:** 150 000 Ft vásárlóértéke az év végére 148 510 Ft. Hány százalékos az éves infláció?

Végeredmény: Az éves infláció 1%-os.

5. Gyűjtőjárdék

Azonos időközönként ugyanakkora összeget teszünk be egy bankba. Tegyük fel, hogy a lekötés kamatperiódusa megegyezik a befizetési időközökkel.

1. 2014. február elsejétől kezdve 10 éven keresztül minden évben beteszünk a bankba 50 000 Ft-ot. Évi 6%-os kamattal számolva 2024. feb.1-jén az utolsó befizetéskor mennyi pénzünk lesz a bankban?

Megoldás: 2014 febr. 1-jén betett összeg:

$$50\,000 \text{ Ft}$$

2015. febr. 1-jén a bank jóváírja a kamatot, majd befizetünk 50 000 Ft-ot:

$$50\,000 \left(1 + \frac{6}{100}\right) + 50\,000 \text{ Ft}$$

2016. febr. 1-jén megkapjuk a jóváírást, majd újra befizetünk 50 000 Ft-ot:

$$\left(50\,000 \left(1 + \frac{6}{100}\right) + 50\,000\right) \left(1 + \frac{6}{100}\right) + 50\,000 \text{ Ft} =$$

$$50\,000 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^2 + 50\,000 \left(1 + \frac{6}{100}\right) + 50\,000 \text{ Ft} =$$

2016. febr. 1-jén megkapjuk a jóváírást, majd újra befizetünk 50 000 Ft-ot:

$$50\,000 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^3 + 50\,000 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^2 + 50\,000 \left(1 + \frac{6}{100}\right) + 50\,000 \text{ Ft}$$

2024. febr. 1-jén lesz éppen a 11. befizetés. Előbb megkapjuk a már befizetett összegre a jóváírást, majd befizetünk 50 000 Ft-ot:

$$50\,000 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10} + 50\,000 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^9 + \dots + 50\,000 \left(1 + \frac{6}{100}\right) + 50\,000 \text{ Ft}$$

Emeljünk ki 50 000-t.

$$50\,000 \cdot (1,06^{10} + 1,06^9 + \dots + 1,06 + 1) =$$

A zárójelben egy mértani sor első 11 tagját kapjuk, ahol az első tag 1 és $q = 1 + \frac{6}{100} = 1,06$. A mértani sor első 11 tagjának az összege:

$$= 50\,000 \frac{1,06^{11} - 1}{1,06 - 1} = 748\,582 \text{ Ft}$$

2. Peti 10. születésnapján szülei elhatározzák, hogy az egyetemi évekre gondolva, ezután minden hónapban 10 000 forintot befizetnek a bankba. Évi 9%-os kamattal számolva Peti 18. születésnapjáig mennyi pénzt sikerült összegyűjteni, ha az utolsó befizetés a születésnap előtti hónapban volt?

Megoldás: Mivel havonta fizetünk be, a jóváírások is havonta történnek, ezért szükségünk van a havi kamatlábra: $\frac{9}{12} = 0,75\%$.

A szerződés aláírásánál befizetjük az első részletet:

$$10\,000 \text{ Ft}$$

Egy hónap múlva jóváírják a kamatot, majd befizetjük a következő részletet:

$$10\,000 \cdot 1,0075 + 10\,000$$

2. hónap végén megkapjuk a jóváírást, majd befizetjük a következő részletet:

$$10\,000 \cdot 1,0075^2 + 10\,000 \cdot 1,0075 + 10\,000$$

3. hónap végén megkapjuk a jóváírást, majd befizetjük a következő részletet:

$$10\,000 \cdot 1,0075^3 + 10\,000 \cdot 1,0075^2 + 10\,000 \cdot 1,0075 + 10\,000$$

Az utolsó jóváírás a $12 \cdot 8 = 96$. hónap múlva lenne, de ekkor nem fizetjük be a részletet. Az eddig felgyűlt összeg:

$$10\,000(1,0075^{96} + 1,0075^{95} + \dots + 1,0075) =$$

Most a mértani sor első eleme és q is éppen 1,0075-tel egyenlő.

$$10\,000 \cdot 1,0075 \frac{1,0075^{96} - 1}{0,0075} = 1\,156\,792 \text{ Ft.}$$

3. 15 éven keresztül minden hónap elsején befizetünk egy bizonyos összeget a bankba. Havi 0,9%-os kamatlábbal számolva az utolsó befizetéssel együtt 2 250 000 Ft-ot gyűjtöttünk össze. Mekkora összeget fizettünk be havonta?

Megoldás: Legyen t_0 a havonta befizetett összeg. A utolsó befizetésig $12 \cdot 15 = 180$ hónap telik el. Az utolsó részlet befizetésével összegyűjtött pénz t_0 -al kifejezve:

$$t_0(1,009^{180} + 1,009^{179} + 1,009^{178} + 1,009^{176} \dots + 1,009^1 + 1) = 2\,250\,000$$

Egy mértani sor első 181 tagját kaptuk, így felírható, hogy

$$t_0 \frac{1,009^{181} - 1}{0,009} = 2\,250\,000$$

$$t_0 = 2\,250\,000 \cdot \frac{0,009}{1,009^{181} - 1} \approx 4985 \text{ Ft}$$

4. **Feladat:** Minden évben befizetünk 100 000 Ft-ot, évi 15%-os kamattal mellett. Hány év múlva lesz legalább 2 000 000 Ft-unk?
Végeredmény: $n = 4,95 \approx 5$ év múlva már több, mint 2 millió Ft-unk van.

6. Törlesztőjádék

Kölcsönt veszünk fel egy banktól, majd azonos időközönként ugyanakkora összeg befizetésével törlesztünk. Tegyük fel, hogy a befizetési időközök és a kamatperiódus megegyezik és az első törlesztés a kölcsön felvételét követő első időköz eltelte után történik.

1. **Feladat:** Felvettünk 500 000-Ft kölcsönt 2 évre, éves kamatláb 12%. Havonta törlesztve mekkora lesz a részletem?

Megoldás: Mivel havonta törlesztünk, havi kamatlábbal számolunk, ami most: $p = \frac{12}{12} = 1\%$.

Egy hónappal eltelte után a bank jóváírja az 500 000 Ft kamatát, majd másnap befizetjük az első részletet, amit jelölünk x -szel.

$$500\,000 \cdot 1,01 - x$$

Egy hónappal később a bank újra jóváírja a tartozásom kamatát, majd másnap befizetjük a 2. törlesztőrészletet:

$$500\,000 \cdot 1,01^2 - x \cdot 1,01 - x$$

Egy hónappal később, a 3. törlesztésnél:

$$500\,000 \cdot 1,01^3 - x \cdot 1,01^2 - x \cdot 1,01 - x$$

Két év alatt $2 \cdot 12 = 24$ alkalommal törlesztünk. Az utolsó, 24. törlesztésnél a kölcsönünket visszafizettük:

$$500\,000 \cdot 1,01^{24} - x \cdot 1,01^{23} - x \cdot 1,01^{22} - \dots - x = 0$$

$$500\,000 \cdot 1,01^{24} - x \cdot (1,01^{23} + 1,01^{22} + \dots + 1) = 0$$

$$500\,000 \cdot 1,01^{24} - x \cdot \frac{1,01^{24} - 1}{0,01} = 0$$

$$500\,000 \cdot 1,01^{24} = x \cdot \frac{1,01^{24} - 1}{0,01}$$

$$x = 500\,000 \cdot 1,01^{24} \cdot \frac{0,01}{1,01^{24} - 1} = 23\,537 \text{ Ft}$$

2. Mekkora kölcsönt vehetek fel 5 évre évi 10%-os kamatláb mellett, ha évente egyszerre legfeljebb 200 000 Ft befizetésével szeretnék törleszteni ?

Megoldás:Jelöljük a felvett összeget X -szel.Egy évvel a pénz felvétele után, a bank jóváírja a kölcsön kamatát, majd befizetem az első törlesztést:

$$X \cdot 1,1 - 200\,000$$

Egy évvel később a kamat jóváírása után befizetem a 2. törlesztést

$$X \cdot 1,1^2 - 200\,000 \cdot 1,1 - 200\,000$$

3. törlesztés után:

$$X \cdot 1,1^3 - 200\,000 \cdot 1,1^2 - 200\,000 \cdot 1,1 - 200\,000$$

4. törlesztés után:

$$X \cdot 1,1^4 - 200\,000 \cdot 1,1^3 - 200\,000 \cdot 1,1^2 - 200\,000 \cdot 1,1 - 200\,000$$

5. törlesztés után:

$$X \cdot 1,1^5 - 200\,000 \cdot (1,1^4 + 1,1^3 + 1,1^2 + 1,1 + 1) = 0$$

Oldjuk meg X -re:

$$X \cdot 1,1^5 = 200\,000 \cdot (1,1^4 + 1,1^3 + 1,1^2 + 1,1 + 1)$$

$$X = \frac{200\,000 \cdot (1,1^4 + 1,1^3 + 1,1^2 + 1,1 + 1)}{1,1^5}$$

$$X = 200\,000 \cdot \frac{1,1^5 - 1}{0,1} \approx 758\,157 \text{ Ft}$$

3. **Feladat:** Szeptember elsején 2 000 000 Ft-ot havi 0,6%-os kamatláb mellett elhelyezünk a bankban. Majd a következő hónaptól kezdve, minden hónapban felvesszünk 30 000 Ft-ot. Mennyi pénzünk lesz 3 év múlva miután felvettük a pénzünket?

Megoldás: A betett összeg: 2 000 000 Ft. Egy hónap múlva jóváírják a kamatot, majd kiveszünk 30 000 Ft-ot.

$$2\,000\,000 \cdot 1,006 - 30\,000$$

A következő hónapban jóváírják a kamatot, majd újra felvesszük a 30 000 Ft-ot:

$$2\,000\,000 \cdot 1,006^2 - 30\,000 \cdot 1,006 - 30\,000$$

A 3. felvételnél:

$$2\,000\,000 \cdot 1,006^3 - 30\,000 \cdot 1,006^2 - 30\,000 \cdot 1,006 - 30\,000$$

A 4. felvételnél:

$$2\,000\,000 \cdot 1,006^4 - 30\,000 \cdot 1,006^3 - 30\,000 \cdot 1,006^2 - 30\,000$$

A 3 év alatt $12 \cdot 3 = 36$ pénzfelvétel lesz. Az utolsó, 36. felvételnél:

$$2\,000\,000 \cdot 1,006^{36} - 30\,000 \cdot 1,006^{35} - 30\,000 \cdot 1,006^{34} - \dots - 30\,000 =$$

$$2\,000\,000 \cdot 1,006^{36} - 30\,000 \cdot (1,006^{35} + 1,006^{34} + \dots + 1) =$$

Vegyük észre, hogy a zárójelben egy mértani sorozat első 37 tagja szerepel. Írjuk fel az ismert összefüggést, ha $q = 1,006$ az első tag pedig 1. Majd számoljuk ki a kifejezés értékét:

$$2\,000\,000 \cdot 1,006^{36} - 30\,000 \cdot \frac{1,006^{36} - 1}{0,006} = 1\,279\,095 \text{ Ft}$$

4. **Feladat:** 2 500 000 Ft-ot ismétlődő lekötéssel, havi 0,8%-os kamatlábal beteszem a bankba. Havonta mekkora összeget vehetek fel, ha azt szeretnénk, hogy a pénzünk 4 év alatt fogyjon el? (Az első pénzfelvétel a lekötés után egy hónappal történik.)

Megoldás: Az első hónap elteltével jóváírják a kamatot és felvesszük az első x összeget.

$$2\,500\,000 \cdot 1,008 - x$$

Egy hónappal később, a 2. felvételnél:

$$2\,500\,000 \cdot 1,008^2 - x \cdot 1,008 - x$$

Egy hónappal később, a 3. felvételnél:

$$2\,500\,000 \cdot 1,008^3 - x \cdot 1,008^2 - x \cdot 1,008 - x$$

Négy év alatt $4 \cdot 12 = 48$ pénzfelvétel történik. Az utolsó, 48. felvételnél a pénzünk elfogy:

$$2\,500\,000 \cdot 1,008^{48} - x \cdot 1,008^{47} - x \cdot 1,008^{46} - \dots - x = 0$$

$$2\,500\,000 \cdot 1,008^{48} - x \cdot (1,008^{47} + 1,008^{46} + \dots + 1) = 0$$

$$2\,500\,000 \cdot 1,008^{48} - x \cdot \frac{1,008^{48} - 1}{0,008} = 0$$

$$2\,500\,000 \cdot 1,008^{48} = x \cdot \frac{1,008^{48} - 1}{0,008}$$

$$x = 2\,500\,000 \cdot 1,008^{48} \cdot \frac{0,008}{1,008^{48} - 1} = 47\,195 \text{ Ft}$$

5. Mekkora kölcsönt vehetek fel 10 évre évi 6%-os kamattal mellett, ha havonta legfeljebb 50 000 Ft befizetésével szeretnénk törleszteni?

Végeredmény: A kölcsön értéke: 4 500 000 Ft.

6. Szüleimtől egyetemi tanulmányaimra kaptam 1 000 000 Ft-ot, amit betettem a bankba folyamatos lekötéssel, havi 0,7%-os kamatlábal számolva. Ezután minden hónapban azonos összeget felvéve szeretném, ha pénzem épp 3 év leteltével fogyna el. Mekkora összeget vehetek fel havonta?

Végeredmény: A havonta felvehető összeg: 31 521 Ft.

7. 2 000 000 Ft-ot havi 1,2%-os kamatlábal elhelyeztünk egy bankban. Minden hónapban járadékként felvesszünk 20 000 Ft-ot. Mennyi pénzünk lesz 3 év múlva a pénzfelvétel után?

8. Mekkora összeget helyezünk el a bankban, hogy havi 0,8%-os kamatlábal mellett egy egyetemre járó diák 4 éven keresztül minden hónapban 25 000 Ft-ot vehessen fel?