Sorozatok

1. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás szempontjából!(Indoklással, nem elegendő a sorozat néhány elemének kiszámolása.)

   (a) $a_n = \frac{n+1}{n+3}$ [szigorúan monoton nő]

   (b) $a_n = \frac{n+3}{1+n}$ [szigorúan monoton csökken]

   (c) $a_n = \frac{n-2}{2+n}$ [szigorúan monoton nő]

   (d) B $a_n = \frac{n+7}{2n-1}$ [szigorúan monoton csökken]

   (e) B $a_n = \frac{2+4n}{3-5n}$ [szigorúan monoton nő]

   (f) B $a_n = \frac{3n-2}{1-2n}$ [szigorúan monoton csökken]

   (g) B $a_n = \frac{1+2n}{2-3n}$ [szigorúan monoton nő]

2. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából!(Indoklással, nem elegendő a sorozat néhány elemének kiszámolása.)

   (a) V $a_n = \frac{3-4n}{5-7n}$
   [szigorúan monoton nő; legnagyobb alsó korlát: k= $\frac{1}{2}$; legkisebb felső korlát:K= $\frac{4}{7}$]

   (b) V $a_n = \frac{3n+4}{5n-1}$
   [szigorúan monoton csökken; legnagyobb alsó korlát: k=$\frac{3}{5}$; legkisebb felső korlát:K=$\frac{7}{4}$]

3. Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha igen, adja meg azt az N_0 küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték $\varepsilon = 10^{-2}$ sugarú környezetén belül esnek!

   (a) V $a_n = \frac{2-3n}{1-4n}$
   [a sorozat konvergens, $N_0 = 31$]

   (b) V $a_n = \frac{6n^2+3}{2+9n}$
   [a sorozat divergens]

   (c) V $a_n = \frac{8-10n}{5n+2}$
   [a sorozat konvergens, $N_0 = 239$]

   (d) V $a_n = \frac{2n-3}{4n+1}$
   [a sorozat konvergens, $N_0 = 87$]

   (e) V $a_n = \frac{-4n^3+8}{5+7n^2}$
   [a sorozat divergens]

4. Vizsgálja meg az alábbi sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából!(Indoklással, nem elegendő a sorozat néhány elemének kiszámolása.) Konvergens-e az alábbi sorozat? Ha igen, adja meg azt az N_0 küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték $\varepsilon = 10^{-3}$ sugarú környezetén belül esnek!

(a) V $a_n = \frac{n-2}{n+2}$
[szigorúan monoton nő; legnagyobb alsó korlát:k=$-\frac{1}{3}$; legkisebb felső korlát:K= 1, a sorozat konvergens, $N_0 = 3998$]

(b) V $a_n = \frac{5-7n}{4-5n}$
[szigorúan monoton csökken; legnagyobb alsó korlát: k=2; legkisebb felső korlát:K=$\frac{7}{5}$, a sorozat konvergens, $N_0 = 120$]

(c) V $a_n = \frac{2n-2}{1+3n}$
[szigorúan monoton nő; legnagyobb alsó korlát:k= 0; legkisebb felső korlát:K= $\frac{2}{3}$, a sorozat konvergens,$N_0 = 888$]

5. V Vizsgálja meg az $a_n = \frac{n-5}{1-3n}$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából!(Indoklással, nem elegendő a sorozat néhány elemének kiszámolása.) Ha konvergens a sorozat, adja meg azt az N_0 küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték $\varepsilon = 10^{-4}$ sugarú környezetén belül esnek!
[szigorúan monoton csökken; legnagyobb alsó korlát: k=$-\frac{1}{3}$; legkisebb felső korlát:K=2, a sorozat konvergens, $N_0 = 15555$]

6. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = 2n - 1$
$$\left[\lim_{n\to\infty}(2n-1) = \lim_{n\to\infty} n\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \infty\right]$$

(b) $a_n = 6n^3 - 2n - n^7$ $[-\infty]$

(c) $a_n = -5n^2 + 4n - 8$ $[-\infty]$

(d) $a_n = 3n^4 + \sqrt{7}n^5 - \frac{4}{3}n^2$ $[\infty]$

(e) B $a_n = \dfrac{2n^2 + 3 - 4n}{2 + 8n^2}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

(f) B $a_n = \dfrac{7n^3 - 4n^2}{6 - 5n^3 - 9n}$ $\left[-\frac{7}{5}\right]$

(g) B $a_n = \dfrac{6n + 2n^5 - 7}{3n^2 + 8n}$ $[\infty]$

(h) B $a_n = \dfrac{(5n-4)^2}{3n - 2n^2}$ $\left[-\frac{25}{2}\right]$

(i) B $a_n = \dfrac{4n + 3 - 9n^4}{-2 + 5n^7}$ $[0]$

(j) B $a_n = \dfrac{(-3-2n)^2}{1-n}$ $[-\infty]$

(k) B $a_n = \dfrac{5n^3 + 2n^2 - 7}{-4n^2 - 3n^3}$ $\left[-\frac{5}{3}\right]$

(l) B $a_n = \dfrac{3n^2 - 8n^6 + 2n}{5n^4 + 8n - 7}$ $[-\infty]$

(m) B $a_n = \dfrac{(3-6n)^2}{2+4n^5+3n^2}$ $[0]$

(n) B $a_n = \dfrac{(n^2+1)(2n+3)}{n(3n-1)^2}$ $\left[\frac{2}{9}\right]$

(o) B $a_n = \dfrac{(3n^2-1)(n^3+1)}{5n^3(n+4)^2}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

7. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) B $a_n = \dfrac{\sqrt{n+7}}{6+n}$ $[0]$

(b) B $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}}{6n-3}$ $[0]$

(c) B $a_n = \dfrac{n^2+2}{\sqrt[4]{n^5-6}}$ $[\infty]$

(d) B $a_n = \dfrac{-\sqrt{5n^2+4+2n}-8n}{n+3}$ $\left[-\sqrt{5}-8\right]$

(e) B $a_n = \dfrac{3n+\sqrt{6n^2+2n-8}}{5n-1}$ $\left[\frac{3+\sqrt{6}}{5}\right]$

(f) B $a_n = \dfrac{11n^3-2n}{\sqrt[3]{6n+2n^3-1}+7n}$ $[\infty]$

(g) B $a_n = \dfrac{2+n}{n^2+\sqrt[4]{6n+3n^4-1}}$ $[0]$

(h) B $a_n = \dfrac{\sqrt[4]{16n^7+6n^3-n}}{4+4n}$ $[\infty]$

(i) B $a_n = \dfrac{8n^3+\sqrt{4n^6+2n^2-8n}}{n^3-1}$ $[10]$

(j) B $a_n = \dfrac{2-3n^2}{\sqrt[3]{4n^5+2n}+5n}$ $[-\infty]$

(k) B $a_n = \dfrac{5-\sqrt{n^2-9}}{2n+3}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

(l) B $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^4+3n^2-1}-2n}{3+5n}$ $[\infty]$

(m) B $a_n = \dfrac{n^2-1}{3n-\sqrt[3]{4n^7-2n^3}}$ $[0]$

(n) V $a_n = \dfrac{2-\sqrt{2n^2+3n}}{\sqrt{n-2}}$ $[-\infty]$

(o) V $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^4+5}+\sqrt{6n^2+2n-8}}{n-1}$ $[\infty]$

(p) V $a_n = \dfrac{\sqrt{9n^4-3n^2+4}-3n}{n^2-\sqrt{5n+16n^4-2}}$ $[-1]$

(r) V $a_n = \dfrac{6n^2 + \sqrt[3]{3n^7 + 6n^4}}{\sqrt[5]{3n^{10} + 6n} - 2n^3}$ $[0]$

8. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = 5^n - 3^n$ $[\infty]$

(b) $a_n = 10^n - 2^{4n}$ $[-\infty]$

(c) $a_n = 3^n - 5^{-n}$ $[\infty]$

(d) $a_n = \dfrac{3^n + 2 \cdot 5^n}{4^n - 4}$ $[\infty]$

(e) $a_n = \dfrac{8^n + 3}{3^n - 4 \cdot 8^n}$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

(f) $a_n = \dfrac{2^n + 5 \cdot 7^n}{2 \cdot 3^n + 5 \cdot 8^n}$ $[0]$

(g) $a_n = \dfrac{3^{n+1} + 2 \cdot 5^n}{5^{n+2} - 2 \cdot 2^{2n}}$ $\left[\frac{2}{25}\right]$

(h) B $a_n = \dfrac{2^{2n} + 3^{10}}{2^5 - 5^{n+3}}$ $[0]$

(i) B $a_n = \dfrac{4^{3n} - 10^n}{10^8 - 7^{2n}}$ $[-\infty]$

(j) B $a_n = \dfrac{3 \cdot 2^{3n+1} - 3^n}{5 \cdot 8^{1+n} - 5^{n+1}}$ $\left[\frac{3}{20}\right]$

(k) B $a_n = \dfrac{4^{n+1} + 6^{n-2}}{3^{n+3} - 6^{n-1}}$ $\left[-\frac{1}{6}\right]$

(l) B $a_n = \dfrac{3^{2n+1} + 5^n}{9^{n+3} + 2^{3n}}$ $\left[\frac{1}{243}\right]$

(m) B $a_n = \dfrac{7^{-2+n} + 2 \cdot 8^{n+2}}{-3^{n-1} + 5 \cdot 2^{2+3n}}$ $\left[\frac{32}{5}\right]$

(n) B $a_n = \dfrac{5^{n+3} - 4 \cdot 3^{2n+1}}{4^{n-1} + 2^{2+3n}}$ $[-\infty]$

(o) B $a_n = \dfrac{3^{n+3} - 5 \cdot 2^{2n+1}}{25 \cdot 5^{n-2} + 3^{1+3n}}$ $[0]$

(p) B $a_n = \dfrac{-9^{2n-1} + 3 \cdot 5^{n+2}}{-3^{n+1} - 4 \cdot 3^{2n+1}}$ $[\infty]$

9. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) V $a_n = \dfrac{4^{2n+1} + 3 \cdot 2^{3n+2}}{7 \cdot 4^{n-2} + 9^{n-1}}$ $[\infty]$

(b) V $a_n = \dfrac{3^{n-2} - 4 \cdot 5^{3n+1}}{2 \cdot 5^{3n-2} + 4^{1+2n}}$ $[-250]$

(c) V $a_n = \dfrac{5 \cdot 2^{3n-2} + 3 \cdot 3^{2n+1}}{7 \cdot 8^{n+2} - 3^{2+3n}}$ $[0]$

(d) V $a_n = \dfrac{-3^{n+3} - 6 \cdot 6^{2n+1}}{2 \cdot 6^{n-2} + 2^{3n-1}}$ $[-\infty]$

(e) V $a_n = \dfrac{-4^{2n+2} + 3 \cdot 2^{3n-1}}{2 \cdot 7^{n+1} + 2^{4n+2}}$ $[-4]$

(f) V $a_n = \dfrac{6^{-n+2} + 5^{n+7}}{2^{-n-1} - 3^n}$ $[-\infty]$

(g) V $a_n = \dfrac{3^{n+2} - 4^{2n}}{5^{-2n} - 2^{4n+1}}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

10. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) V $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n-7}$ $[0]$

(b) V $a_n = \sqrt{5n^2 - 13} - \sqrt{5n^2 + 4}$ $[0]$

(c) V $a_n = \sqrt{3n^2 + 5n} - \sqrt{2n - 5}$ $[\infty]$

(d) V $a_n = \sqrt{2 + 3n^2} - \sqrt{3n + 7 + 7n^2}$ $[-\infty]$

(e) V $a_n = \sqrt{7 + 4n^6} - \sqrt{3 + 3n^6 + 7n}$ $[\infty]$

(f) V $a_n = \sqrt{4 + 3n^2 + 2n} - \sqrt{3n^2 + 2n - 2}$ $[0]$

(g) V $a_n = \sqrt{7n^2 - 5n - 13} - \sqrt{n^4 - n + 2}$ $[-\infty]$

(h) V $a_n = \sqrt{8n^2 + 6n - 11} - \sqrt{8n^2 - n + 3}$ $\left[\frac{7}{2\sqrt{8}} = \frac{7}{4\sqrt{2}}\right]$

(i) V $a_n = \sqrt{3n^2 - 2 + 4n} - \sqrt{7 + 3n^2 - 2n}$ $\left[\frac{3}{\sqrt{3}}\right]$

(j) V $a_n = \sqrt{3 + 7n^4 - n} - \sqrt{7n^4 + 3n - 2}$ $[0]$

(k) V $a_n = \sqrt{5 + 6n^8 + 4n^3} - \sqrt{2n^4 + 6n^8 + 3}$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$

(l) V $a_n = \sqrt{5n^2 + 3n - 13} - \sqrt{5n^2 - n + 2}$ $\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

(m) V $a_n = \dfrac{7}{\sqrt{3n^2 + 5n + 3} - \sqrt{3n^2 - 7n + 12}}$ $\left[\frac{7\sqrt{3}}{6}\right]$

11. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $a_n = \left(1 + \dfrac{3}{n}\right)^n$ $[\mathrm{e}^3]$

(b) $a_n = \left(1 + \dfrac{-4}{n}\right)^n$ $\left[\mathrm{e}^{-4} = \frac{1}{\mathrm{e}^4}\right]$

(c) $a_n = \left(1 - \dfrac{6}{n}\right)^n$ $\left[\mathrm{e}^{-6} = \frac{1}{\mathrm{e}^6}\right]$

(d) $a_n = \left(1 + \dfrac{5}{n}\right)^{2n}$ $[\mathrm{e}^{10}]$

(e) $a_n = \left(1 + \dfrac{7}{n}\right)^{21}$ $[1^{21} = 1]$

(f) B $a_n = \left(\left(1+\frac{9}{n}\right)^{23} + \left(\frac{12}{7}\right)^n\right)$ $[1^{23}+\infty=\infty]$

(g) B $a_n = \left(\left(1+\frac{8}{n}\right)^{100} - \left(\frac{8}{3}\right)^n\right)$ $[1^{100}-\infty=-\infty]$

(h) B $a_n = \left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ $[\mathrm{e}^5+0=\mathrm{e}^5]$

(i) B $a_n = \left(\left(1+\frac{6}{n}\right)^{n} - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$ $[\mathrm{e}^6-0=\mathrm{e}^6]$

(j) B $a_n = \left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right)$ $[\mathrm{e}^3+\infty=\infty]$

(k) B $a_n = \left(\left(1+\frac{9}{n}\right)^{n} - \left(\frac{8}{3}\right)^{-n}\right)$ $[\mathrm{e}^9-0=\mathrm{e}^9]$

(l) B $a_n = \left(\left(1+\frac{7}{n}\right)^{n} - \left(\frac{4}{11}\right)^{-n}\right)$ $[\mathrm{e}^7-\infty=-\infty]$

(m) B $a_n = \left(\left(1-\frac{11}{n}\right)^{n} + 4n^{-4}\right)$ $\left[\mathrm{e}^{-11}+4\cdot 0=\frac{1}{\mathrm{e}^{11}}\right]$

(n) B $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n+1}$ $[\mathrm{e}^6]$

(o) B $a_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^{2n-3}$ $\left[\mathrm{e}^{-4}=\frac{1}{\mathrm{e}^4}\right]$

12. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

(a) V $a_n = \left(\frac{n+5}{n+2}\right)^{n+1}$ $[\mathrm{e}^3]$

(b) V $a_n = \left(\frac{2n+6}{2n+8}\right)^{n-3}$ $\left[\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$

(c) V $a_n = \left(\frac{3n-7}{n+3}\right)^{n-3}$ $[\infty]$

(d) V $a_n = \left(\frac{n+14}{n-3}\right)^{2n-1}$ $[\mathrm{e}^{34}]$

(e) V $a_n = \left(\frac{4n+6}{7n-2}\right)^{2n+5}$ $[0]$

(f) V $a_n = \left(\frac{7n+4}{7n+5}\right)^{2n-1}$ $\left[\mathrm{e}^{-\frac{2}{7}}\right]$

(g) V $a_n = \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+5}\right)^{n^2+2}$ $\left[\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right]$

(h) V $a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2-4}\right)^{n^3+2}$ $[\mathrm{e}^{\infty}=\infty]$

(i) V $a_n = \left(\frac{7n+5}{3n+10}\right)^{7n^2+3}$ $[\mathrm{e}^{\infty} = \infty]$

(j) V $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{4n^2+3}$ $[\mathrm{e}^{8}]$

(k) V $a_n = \left(\frac{7n^2+4}{7n^2+1}\right)^{12n+3}$ $[\mathrm{e}^{0} = 1]$

(l) V $a_n = \left(\frac{9n-11}{9n-7}\right)^{n^3+n}$ $[\mathrm{e}^{-\infty} = 0]$