Sorozatok

2014. október 15.

Határozza meg a következő sorozatok határértékeit!

1. **Zh feladat:** Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság szerint az alábbi sorozatot!
$$a_n = \frac{3n+4}{5n-1} \qquad \text{ha} \qquad n = 1; 2; \cdots$$
Megoldás: Monotonitás eldöntéséhez vizsgáljuk meg $a_{n+1} - a_n$ előjelét.

Ha

(a)
$$a_{n+1} - a_n > 0 \qquad \text{minden n-re, akkor } a_n \quad \text{szigorúan monoton növekvő.}$$

(b)
$$a_{n+1} - a_n \geq 0 \qquad \text{minden n-re, akkor } a_n \quad \text{monoton növekvő.}$$

(c)
$$a_{n+1} - a_n < 0 \qquad \text{minden n-re, akkor } a_n \quad \text{szigorúan monoton csökkenő.}$$

(d)
$$a_{n+1} - a_n \leq 0 \qquad \text{minden n-re, akkor } a_n \quad \text{monoton csökkenő.}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n+7}{5n+4} - \frac{3n+4}{5n-1} = \frac{(3n+7)(5n-1) - (3n+4)(5n+4)}{(5n+4)(5n-1)} =$$
$$\frac{-23}{(5n+4)(5n-1)} = \frac{-}{+\cdot+} < 0$$
Tehát a_n szigorúan monoton csökkenő.

Ha a_n szigorúan monoton csökkenő, akkor $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$, azaz $a_1 \geq a_n$ minden n-re, így a_n felülről korlátos és $K = a_1 = \frac{7}{4}$.

Mivel a_n szigorúan monoton csökkenő és nagyon nagy n-re $\frac{3}{5}$-höz közeli értékeket vesz fel, így az a sejtés, hogy az alsó korlát $k = \frac{3}{5}$.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{3n+7}{5n-1} > \frac{3}{5} \qquad \text{minden} \qquad n \in \mathbf{N}^{+}\text{-re.}$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát $5(5n-1) > 0$-val.

$$5(3n+7 > 3(5n-1) \qquad \to \qquad 35 > 3$$

Mivel $35 > 4$ igaz, az ekvivalens átalakítások miatt az eredeti állítás is igaz, így a_n valóban alulról korlátos és $k = \frac{3}{5}$.

2. **Zh feladat:** Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság szerint az alábbi sorozatot!

$$b_n = \frac{3-4n}{5-7n} \qquad \text{ha} \qquad n = 1; 2; \cdots$$

Megoldás: Vizsgáljuk először a monotonitást:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-4n-1}{-7n-2} - \frac{3-4n}{5-7n} = \frac{(-4n-1)(5-7n) - (3-4n)(-7n-2)}{(-7n-2)(5-7n)} =$$

$$\frac{1}{(-7n-2)(5-7n)} = \frac{+}{- \cdot -} > 0$$

Tehát a_n szigorúan monoton növekvő.

Monotonitást felhasználva felírhatjuk, hogy $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ azaz $a_1 \leq a_n$ minden $n = 1; 2; \cdots$ esetén, tehát a sorozat alulról korlátos és az alsó korlát $k = a_1 = 0,5$.

Mivel a_n szigorúan monoton növekvő és nagyon nagy n-re $\frac{4}{7}$-höz közeli értékeket vesz fel, így az a sejtés, hogy a felső korlát $K = \frac{4}{7}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{3-4n}{5-7n} < \frac{4}{7}, \qquad \text{minden n-re}$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát $7(5-7n)$-nel.De vegyük figyelembe, hogy ha $n = 1; 2; \cdots$, akkor $5 - 7n < 0$. Egy egyenlőtlenség mindkét oldalát negatív számmal szorozva, az egyenlőtlenség iránya megváltozik.

$$7(3-4n) > 4(5-7n) \qquad \to \qquad 21 > 20$$

Mivel $21 > 20$ igaz, az ekvivalens átalakítások miatt az eredeti állítás is igaz, azaz a_n felülről korlátos és $K = \frac{4}{7}$

3. **Zh feladat:** Konvergens-e az alábbi sorozat? Ha igen, adja meg azt az N küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték $\epsilon = 10^{-3}$ sugarú környezetén belül esnek!

$$a_n = \frac{3n+1}{4n+7}$$

Megoldás: Először vizsgáljuk meg, hogy konvergens-e a sorozat.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{4n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(3+\frac{1}{n})}{n(4+\frac{7}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{4+\frac{7}{n}} = \frac{3}{4}$$

Mivel a határértéke véges, a sorozat konvergens. Határozzuk meg az $\epsilon = 10^{-3}$ tartozó küszöbszámot, azaz oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\left|\frac{3n+1}{4n+7} - \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{1000}$$

$$\left|\frac{4(3n+1) - 3(4n+7))}{4(4n+7)}\right| < \frac{1}{1000}$$

$$\left|\frac{-17}{4(4n+7)}\right| < \frac{1}{1000}$$

Próbáljuk meg elhagyni az abszolútértéket. Ehhez azt kell megvizsgálni, hogy milyen az előjele a kapott törtnek. Mivel a számláló negatív, a nevező pedig $n = 1; 2; \cdots$ esetén pozitív, a tört negatív. Egy negatív szám abszolútértéke pedig önmagának -1-szeresével egyenlő. Tehát az abszolútértéket elhagyhatjuk, ha a törtet szorzom -1-gyel.

$$(-1)\frac{-17}{4(4n+7)} < \frac{1}{1000}$$

Egyszerűbben:

$$\frac{17}{4(4n+7)} < \frac{1}{1000}$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát $1000(4n+7)$-tel. Mivel $4n+7 > 0$, az egyenlőtlenség irány nem változik.

$$4250 = \frac{17000}{4} < 4n+7$$

$$1060,75 = \frac{4243}{4} < n$$

Tehát az $\epsilon = 10^{-3}$ tartozó küszöbszám $N = 1060$. Ez azt jelenti, hogy a sorozat első 1060 tagja kívül esik a határérték $\epsilon = 10^{-3}$ sugarú környezetén, de az összes további, azaz végtelen sok elem már belül lesz.

4. **Zh feladat:** Konvergens-e az alábbi sorozat? Ha igen, adja meg azt az N küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték $\epsilon = 10^{-4}$ sugarú környezetén belül esnek!

$$a_n = \frac{8+10n}{2-5n}$$

Megoldás: Számítsuk ki a sorozat határértékét:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8+10n}{2-5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\frac{8}{n}+10)}{n(\frac{2}{n}-5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8}{n}+10}{\frac{2}{n}-5} = -2$$

Mivel a határértéke véges, a sorozat konvergens. Határozzuk meg az $\epsilon = 10^{-4}$-hez tartozó köszöbszámot. Ehhez oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\left|\frac{8+10n}{2-5n}+2\right| < \frac{1}{10000}$$

$$\left|\frac{8+10n+2(2-5n))}{2-5n}\right| < \frac{1}{10000}$$

$$\left|\frac{12}{2-5n}\right| < \frac{1}{10000}$$

Mivel a számláló pozitív, a nevező pedig negatív, a tört maga negatív. Egy negatív szám abszolútértéke pedig önmagának -1-szere. Így az abszolútértékjel elhagyható, ha a törtet szorozzuk -1-gyel.

$$-\frac{12}{2-5n} < \frac{1}{10000}$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát $10000(2-5n)$ -val. Fontos, hogy negatív számmal való szorzás miatt az egyenlőtlenség irány megváltozik.

$$-120000 > 2-5n$$

$$-120002 > -5n$$

Osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát -5-tel. Az egyenlőtlenség irány újra megváltozik.

$$24000,4 = \frac{-120002}{-5} < n$$

Tehát az $\epsilon = 10^{-4}$ tartozó köszöbszám $N = 24000$. Ez azt jelenti, hogy a sorozat végtelen sok tagja esik a határérték $\epsilon = 10^{-4}$ sugarú környezetébe és pontosan az első 24000 tagja esik kívül.

5. **Zh feladat:**
$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{8}{n}\right)^{100}-\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right)=$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{8}{n}\right)^{100}-\left(\frac{8}{3}\right)^{n}\right)=1^{100}-\infty=-\infty$$

6. **Zh feladat:**
$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right)=$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}+2^{n}\right)=e^{3}+\infty=\infty$$

7. **Zh feladat:**
$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{-n}+n^{-0.5}\right)=$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{5}{n}\right)^{-n}+n^{-0.5}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(1+\frac{5}{n})^{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{e^{5}}+0=\frac{1}{e^{5}}$$

8. **Zh feladat:**
$$\lim_{n\to\infty}(3n^{4}+\sqrt{7}n^{5}-\frac{4}{3}n^{2})=$$

Megoldás: Polinom vizsgálatánál keressük meg a legmagasabb fokszámú kifejezést és emeljük ki:

$$\lim_{n\to\infty}(3n^{4}+\sqrt{7}n^{5}-\frac{4}{3}n^{2})=\lim_{n\to\infty}n^{5}\left(\frac{3}{n}+\sqrt{7}-\frac{4}{3}\frac{1}{n^{3}}\right)=\infty\cdot\sqrt{7}=\infty$$

9. **Zh feladat:**
$$\lim_{n\to\infty}(n^{2}+3n-5n^{6})=$$

Megoldás: Keressük meg a legmagasabb fokszámú kifejezést és emeljük ki:

$$\lim_{n\to\infty}(n^{2}+3n-5n^{6})=\lim_{n\to\infty}n^{6}\left(\frac{1}{n^{4}}+\frac{3}{n^{5}}-5\right)=\infty\cdot(-5)=-\infty$$

10. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty}(5^n - 3^n) =$$

Megoldás: Egynél nagyobb alapú exponenciális függvények esetén keressük meg a nagyobb alapút és emeljük ki:

$$\lim_{n\to\infty}(5^n - 3^n) = \lim_{n\to\infty} 5^n \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = \infty \cdot 1 = \infty$$

11. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty}(10^n - 2^{4n}) =$$

Megoldás: Az alapok egynél nagyobbak, de a kitevők különbözőek. Hatványozás azonosságait felhasználva érjük el, hogy a kitevő mindkét kifejezésben n legyen. Majd keressük meg a nagyobb alapot és emeljünk ki:

$$\lim_{n\to\infty}(10^n - 2^{4n}) = \lim_{n\to\infty}(10^n - \left(2^4\right)^n) =$$

$$\lim_{n\to\infty}(10^n - 16^n) = \lim_{n\to\infty} 16^n \left(\left(\frac{10}{16}\right)^n - 1\right) = \infty \cdot (-1) = -\infty$$

12. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty}(3^n - 5^{-n}) =$$

Megoldás: Az alapok egynél nagyobbak, de a második tagban a kitevő negatív. Így $5^{-n} \to 0$.

$$\lim_{n\to\infty}(3^n - 5^{-n}) = \lim_{n\to\infty}\left(3^n - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = \infty - 0 = \infty$$

13. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 + 3n - 5}{6n^2 + 7n - 15} =$$

Megoldás: Vizsgáljuk meg külön a számláló és a nevező határértékét.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 + 3n - 5}{6n^2 + 7n - 15} = \frac{\infty}{\infty}$$

Ez egy kritikus eset, ebből az alakból még nem tudjuk leolvasni a határértéket Mind a számlálóban mind a nevezőben a legmagasabb fokszám 2, ezért emeljük ki n^2-t:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 + 3n - 5}{6n^2 + 7n - 15} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2})}{n^2(6 + \frac{7}{n} - \frac{15}{n^2})} = \frac{1}{6}$$

14. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 11n^3 - 7n + 3}{4 + 7n^3 + \sqrt{2}n^2} =$$

Megoldás: Vizsgáljuk meg külön a számláló és a nevező határértékét.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 11n^3 - 7n + 3}{4 + 7n^3 + \sqrt{2}n^2} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Ez egy kritikus eset, további vizsgálatra van szükségünk. Mind a számlálóban mind a nevezőben a legmagasabb fokszám 3, ezért emeljük ki n^3-t:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 11n^3 - 7n + 3}{4 + 7n^3 + \sqrt{2}n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(\frac{3}{n} - 11 - \frac{7}{n^2} + \frac{3}{n^3})}{n^3(\frac{4}{n^3} + 7 + \frac{\sqrt{2}}{n})} = -\frac{11}{7}$$

15. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)(2n+3)}{n(3n-1)^2} =$$

Megoldás: Először végezzük el a szorzás műveletét a számlálóban és a nevezőben is:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)(2n+3)}{n(3n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 2n + 3)}{n(9n^2 - 6n + 1)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 2n + 3}{9n^3 - 6n^2 + n} =$$

Most már két polinom hányadosát kell vizsgálni, keressük meg a kegmagasabb fokszámú kifejezést és emeljük ki:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3(2 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3})}{n^3(9 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2})} = \frac{2}{9}$$

16. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2-1)(n^3+1)}{5n^3(n+4)^2} =$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2-1)(n^3+1)}{5n^3(n+4)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^5 - n^3 + 3n^2 - 1}{5n^3(n^2 + 8n + 16)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^5 - n^3 + 3n^2 - 1}{5n^5 + 40n^4 + 80n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5(3 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3} - \frac{1}{n^5})}{n^5(5 + \frac{40}{n} + \frac{80}{n^2})} = \frac{3}{5}$$

17. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{\sqrt{1+7n^2}} =$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{\sqrt{1+7n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(3+\frac{4}{n})}{\sqrt{n^2(\frac{1}{n^2}+7)}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(3+\frac{4}{n})}{n\sqrt{\frac{1}{n^2}+7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

18. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{11+3n^4}}{6n^2+7} =$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{11+3n^4}}{6n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4\left(\frac{11}{n^4}+3\right)}}{n^2(6+\frac{7}{n^2})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sqrt{\frac{11}{n^4}+3}}{n^2(6+\frac{7}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{11}{n^4}+3}}{6+\frac{7}{n^2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

19. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+5n}{4n^2-n^4+7} =$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+5n}{4n^2-n^4+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1+\frac{5}{n^2})}{n^4(\frac{4}{n^2}-1+\frac{7}{n^2})} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\frac{5}{n^2}}{\frac{4}{n^2}-1+\frac{7}{n^2}} = 0 \cdot (-1) = 0$$

20. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-12n^5}{4n^5-n^9-17} =$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-12n^5}{4n^5-n^9-17} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5(\frac{1}{n^3}-12)}{n^9(\frac{4}{n^4}-1-\frac{17}{n^9})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{\frac{1}{n^3}-12}{\frac{4}{n^4}-1-\frac{17}{n^9}} = 0 \cdot 12 = 0$$

21. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^{10}-n}{n-2n^3}=$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^{10}-n}{n-2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{10}(4-\frac{1}{n^9})}{n^3(\frac{1}{n^2}-2)}=\lim_{n\to\infty}n^7\frac{4-\frac{1}{n^9}}{\frac{1}{n^2}-2}=\infty\cdot(-2)=-\infty$$

22. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}-5n-9n^7}{4-3n}=$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}-5n-9n^7}{4-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^7(\frac{\sqrt{3}}{n^7}-\frac{5}{n^6}-9)}{n(\frac{4}{n}-3)}=\lim_{n\to\infty}n^6\frac{\frac{\sqrt{3}}{n^7}-\frac{5}{n^6}-9}{\frac{4}{n}-3}=\infty\cdot 3=\infty$$

23. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{4n^6+3n^5+11}}{2n^2-7n+2}=$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{4n^6+3n^5+11}}{2n^2-7n+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^6(4+\frac{3}{n}+\frac{11}{n^6})}}{n^2(2-\frac{7}{n}+\frac{2}{n^2})}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt[3]{4+\frac{3}{n}+\frac{11}{n^6}}}{n^2(2-\frac{7}{n}+\frac{2}{n^2})}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

24. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5+3n+1}}{4+7n}=$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5+3n+1}}{4+7n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5(1+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5})}}{n(\frac{4}{n}+7)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{5}{4}}\sqrt[4]{1+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5}}}{n(\frac{4}{n}+7)}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{4}}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{3}{n^4}+\frac{1}{n^5}}}{\frac{4}{n}+7}=\infty\cdot\frac{1}{7}=\infty$$

25. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+\sqrt{4n^2+3}}=\cdots=\frac{2}{5}$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+\sqrt{4n^2+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2+\frac{3}{n})}{3n+\sqrt{n^2(4+\frac{3}{n^2})}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(2+\frac{3}{n})}{3n+n\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2+\frac{3}{n})}{n\left(3+\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$$

26. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n^2+5}{4n^2+\sqrt{7n^3+1}} =$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n^2+5}{4n^2+\sqrt{7n^3+n-}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Emeljük ki a legmagasabb fokszámú kifejezést a számlálóban és a nevezőben. A nevezőben is n^2-t kell kiemelni. Ehhez emeljük ki elsőre a gyök alatt n^4-t.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n^2+5}{4n^2+\sqrt{7n^3+n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(12+\frac{5}{n^2})}{4n^2+\sqrt{n^4(\frac{7}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4})}} =$$

$$n\to\infty \frac{n^2(12+\frac{5}{n^2})}{4n^2+n^2\sqrt{\frac{7}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(12+\frac{5}{n^2})}{n^2(4+\sqrt{\frac{7}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}})} = \frac{12}{3} = 4$$

27. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}+4}{5-3^{n+2}} =$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}+4}{5-3^{n+2}} = \frac{\infty}{-\infty}$$

Emeljük ki a 3^n-t.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}+4}{5-3^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{-1}\cdot 3^n+4}{5-3^2\cdot 3^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n(\frac{1}{3}+\frac{4}{3^n})}{3^n(\frac{5}{3^n}-3^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}+\frac{4}{3^n}}{\frac{5}{3^n}-3^2} = \frac{\frac{1}{3}}{9} = \frac{1}{27}$$

28. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n - 5^{n+1}}{1-7^n} =$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n - 5^{n+1}}{1-7^n} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n - 5\right)}{7^n(\frac{1}{7^n}-1)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n - 5}{\frac{1}{7^n}-1} = 0 \cdot 5 = 0$$

29. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1}+5}{9-2^{3n}} =$$

Megoldás: Ahhoz, hogy eldöntsük, hogy melyik a legerősebb kifejezés, alakítsuk át az exponenciális kifejezéseket úgy, hogy a kitevőben n legyen.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1}+5}{9-2^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot(3^2)^n+5}{9-(2^3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 9^n+5^n}{9-8^n} =$$

Most már látszik, hogy 9^n-t kell kiemelni a számlálóban, a nevezőben pedig 8^n-t.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9^n\left(3+\frac{5}{9^n}\right)}{8^n\left(\frac{9}{8^n}-1\right)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{8}\right)^n \frac{3+5\left(\frac{1}{9}\right)^n}{9\left(\frac{1}{8}\right)^n - 1} = \infty\cdot(-3) = -\infty$$

30. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+2}+2}{1-5^{n-1}} =$$

Megoldás:

31. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}+3^{10}}{2^5-5^{n+3}} =$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}+3^{10}}{2^5-5^{n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^2)^n+3^{10}}{2^5-5^3\cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n+3^{10}}{2^5-125\cdot 5^n} =$$

Végezzük el a kiemelést a számlálóban és a nevezőben.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n(1+\frac{3^{10}}{4^n})}{5^n(\frac{2^5}{5^n}-125)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \frac{1+\frac{3^{10}}{4^n}}{\frac{2^5}{5^n}-125} = 0\cdot\frac{-1}{125} = 0$$

32. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{3n} - 10^n}{10^8 - 7^{2n}} =$$

Megoldás: Ahhoz, hogy össze tudjuk hasonlítani az exponenciális kifejezéseket, alakítsük át őket, úgy, hogy a kitevő n legyen.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{3n} - 10^n}{10^8 - 7^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4^3)^n - 10^n}{10^8 - (7^2)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{64^n - 10^n}{10^8 - 49^n} =$$

Most már látszik, hogy a számlálóban 64^n a legerősebb, a nevezőben pedig 49^n. Emeljük ki őket.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{64^n}{49^n} \cdot \frac{1 - \frac{10^n}{64^n}}{\frac{10^8}{49^n} - 1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{64}{49}\right)^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{10}{64}\right)^n}{\frac{10^8}{49^n} - 1} = \infty \cdot (-1) = -\infty$$

33. **Zh feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{11}{n}\right)^n + 4n^{-4} \right) = \cdots = \frac{1}{e^{11}}$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{11}{n}\right)^n + 4n^{-4} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{-11}{n}\right)^n + 4\frac{1}{n^4} \right) = e^{-11} + 0 = \frac{1}{e^{11}}$$

34. **Vizsgafeladat:**Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság és konvergencis szempontjából az alábbi sorozatot! Ha konvergens, adja meg azt az N küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték $\epsilon = 10^{-4}$ sugarú környezetén belül esnek!

$$a_n = \frac{n-5}{1-3n}$$

Megoldás: Monotonitás eldöntéséhez vizsgáljuk meg $a_{n+1} - a_n$ előjelét.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n-4}{-3n-2} - \frac{n-5}{1-3n} = \frac{(n-4)(1-3n) - (n-5)(-3n-2)}{(-3n-2)(1-3n)} =$$

$$\frac{-14}{(-3n-2)(1-3n)} = \frac{-}{- \cdot -} < 0$$

Tehát a_n szigorúan monoton csökkenő.

Ha a_n szigorúan monoton csökkenő, akkor $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$ minden n-re, így a_n felülről korlátos és $K = a_1 = 2$.

Mivel a_n szigorúan monoton csökkenő és nagyon nagy n-re $-\frac{1}{3}$-höz közeli értékeket vesz fel, így az a sejtés, hogy az alsó korlát $k = -\frac{1}{3}$.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{n-5}{1-3n} > -\frac{1}{3} \qquad \text{minden} \qquad n \in \mathbf{N}^{+}\text{-re.}$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát $3(1-3n) - nel$. De vegyük figyelembe, hogy $1 - 3n < 0$, ha $n = 1; 2; \cdots$. Tehát a szorzás eredményeként az egyenlőtlenség iránya megváltozik.

$$3(n-5) < -(1-3n) \qquad \rightarrow \qquad -15 < -1$$

Mivel $-15 < -1$ igaz, az ekvivalens átalakítások miatt az eredeti állítás is igaz, így a_n valóban alulról korlátos és $k = -\frac{1}{3}$.

Vizsgáljuk meg, hogy létezik-e véges határértéke a sorozatnak.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-5}{1-3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-\frac{5}{n})}{n(\frac{1}{n}-3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{5}{n}}{\frac{1}{n}-3} = -\frac{1}{3}$$

Tehát a sorozat konvergens, adjunk küszöbszámot $\epsilon = 10^{-4}$-hez.

$$\left|\frac{n-5}{1-3n} + \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{10000}$$

$$\left|\frac{3(n-5)+1-3n}{3(1-3n)}\right| < \frac{1}{10000}$$

$$\left|\frac{-14}{3(1-3n)}\right| < \frac{1}{10000}$$

Most a számláló és a nevező is negatív, azaz a tört pozitív, ha $n = 1; 2; \cdots$. Az abszlútérték elhagyható.

$$\frac{-14}{3(1-3n)} < \frac{1}{10000}$$

$$\frac{-140000}{3} > 1 - 3n$$

$$\frac{-140000}{3} - 1 > -3n$$

$$15555, \cdots = -\frac{1}{3}(\frac{-140000}{3} - 1) < n$$

Tehát a küszöbszám: $N = 15555$.

35. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+6^{n-2}}{3^{n+3}-6^{n-1}} = \dots = -\frac{1}{6}$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+6^{n-2}}{3^{n+3}-6^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 4^n+6^{-2}\cdot 6^n}{27\cdot 3^n-6^{-1}\cdot 6^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6^n\left(4\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^n+6^{-2}\right)}{6^n\left(27\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^n-6^{-1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^n+6^{-2}}{27\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^n-6^{-1}} = -\frac{1}{6}$$

36. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6^{-n+2}+5^{n+7}}{2^{-n-1}-3^n} = \dots = -\infty$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6^{-n+2}+5^{n+7}}{2^{-n-1}-3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6^2\cdot 6^{-n}+5^7\cdot 5^n}{2^{-1}\cdot 2^{-n}-3^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n \cdot \frac{6^2\cdot\left(\frac{1}{6\cdot 5}\right)^n+5^7}{2^{-1}\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)^n-1} = -\infty$$

37. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}-4^{2n}}{5^{-2n}-2^{4n+1}} = \dots = \frac{1}{2}$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}-4^{2n}}{5^{-2n}-2^{4n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9\cdot 3^n-16^n}{25^{-n}-2\cdot 16^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{16^n\left(9\cdot\left(\frac{3}{16}\right)^n-1\right)}{16^n\left(\left(\frac{1}{25\cdot 16}\right)^n-2\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{9\cdot\left(\frac{3}{16}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{25\cdot 16}\right)^n-2} = \frac{1}{2}$$

38. **Feladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1}+5^n}{9^{n+3}+2^{3n}} = \dots = \frac{1}{243}$$

Megoldás: Ahhoz, hogy eldöntsük, hogy melyik a legerősebb kifejezés, alakítsuk át az exponenciális kifejezéseket úgy, hogy a kitevő n legyen.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1}+5^n}{9^{n+3}+2^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot(3^2)^n+5^n}{3^3\cdot 9^n+(2^3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 9^n+5^n}{27\cdot 9^n+8^n} =$$

Most már látszik, hogy 9^n a legerősebb kifejezés mind a számlálóban, mind a nevezőben. Emeljük ki.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9^n\left(3+\frac{5^n}{9^n}\right)}{9^n\left(27+\frac{8^n}{9^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\left(\frac{5}{9}\right)^n}{27+\left(\frac{8}{9}\right)^n} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

39. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-7}) = \cdots = 0$$

Megoldás: A határérték $\infty - \infty$ típusú, így alkalmazzuk a következő bővítést:

$$\sqrt{A}-\sqrt{B} = (\sqrt{A}-\sqrt{B})\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-7}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-7})\cdot\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-7}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-7}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+3-(n-7)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-7}} = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-7}} = \frac{10}{\infty+\infty} = 10\cdot 0 = 0$$

40. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{5n^2-13}-\sqrt{5n^2+4}) = \cdots = 0$$

Megoldás: A határérték $\infty - \infty$ típusú, így alkalmazzuk a következő bővítést:

$$\sqrt{A}-\sqrt{B} = (\sqrt{A}-\sqrt{B})\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{5n^2-13}-\sqrt{5n^2+4}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{5n^2-13}-\sqrt{5n^2+4})\cdot\frac{\sqrt{5n^2-13}+\sqrt{5n^2+4}}{\sqrt{5n^2-13}+\sqrt{5n^2+4}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-13-(5n^2+4)}{\sqrt{5n^2-13}+\sqrt{5n^2+4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-17}{\sqrt{5n^2-13}+\sqrt{5n^2+4}} = \frac{-17}{\infty+\infty} = 0$$

41. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n+3}-\sqrt{5n-7}) = \cdots = -\infty$$

Megoldás: A határérték $\infty - \infty$ típusú, de az elöző feladatoktól eltérően, n együtthatói nem egyenlőek, így ebben az esetben emeljük ki n legmagasabb fokszámú kifejezését, most $\sqrt{n}$-t:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n+3}-\sqrt{5n-7}) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{4+\frac{3}{n}}-\sqrt{5-\frac{7}{n}}\right) = \infty(\sqrt{4}-\sqrt{5}) = -\infty$$

42. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{7n+1}-\sqrt{2n-5}) = \cdots = \infty$$

Megoldás: A határérték $\infty - \infty$ típusú, de n együtthatói nem egyenlőek, így emeljük ki n legmagasabb fokszámú kifejezését, most $\sqrt{n}$-t:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{7n+1}-\sqrt{2n-5}) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{7+\frac{1}{n}}-\sqrt{2-\frac{5}{n}}\right) = \infty(\sqrt{7}-\sqrt{3}) = \infty$$

43. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3n^2+5n}-\sqrt{n^2+7})=\cdots=\infty$$

Megoldás: A határérték $\infty-\infty$ típusú, de n együtthatói és fokszámai nem egyenlőek, így emeljük ki n legmagasabb fokszámú kifejezését, most $\sqrt{n^2}=n$-t:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3n^2+5n}-\sqrt{n^2+7})=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{3+\frac{5}{n}}-\sqrt{1+\frac{7}{n^2}}\right)=\infty(\sqrt{3}-\sqrt{1})=\infty$$

44. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{5n^2+3n-13}-\sqrt{5n^2-n+2})=\cdots=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{5n^2+3n-13}-\sqrt{5n^2-n+2})=$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{5n^2+3n-13}-\sqrt{5n^2-n+2})\cdot\frac{(\sqrt{5n^2+3n-13}+\sqrt{5n^2-n+2})}{(\sqrt{5n^2+3n-13}+\sqrt{5n^2-n+2})}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n-13-(5n^2-n+2)}{(\sqrt{5n^2+3n-13}+\sqrt{5n^2-n+2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-15}{(\sqrt{5n^2+3n-13}+\sqrt{5n^2-n+2})}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{15}{n}}{\sqrt{5+\frac{3}{n}-\frac{13}{n^2}}+\sqrt{5-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

45. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7}{\sqrt{3n^2+5n+3}-\sqrt{3n^2-7n+12}}=\cdots=\frac{7\sqrt{3}}{6}$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7}{\sqrt{3n^2+5n+3}-\sqrt{3n^2-7n+12}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7}{\sqrt{3n^2+5n+3}-\sqrt{3n^2-7n+12}}\cdot\frac{\sqrt{3n^2+5n+3}+\sqrt{3n^2-7n+12}}{\sqrt{3n^2+5n+3}+\sqrt{3n^2-7n+12}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}7\frac{\sqrt{3n^2+5n+3}+\sqrt{3n^2-7n+12}}{3n^2+5n+3-(3n^2-7n+12)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}7\frac{\sqrt{3n^2+5n+3}+\sqrt{3n^2-7n+12}}{12n-9}=$$

$$\lim_{n\to\infty}7\frac{\sqrt{3+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{3-\frac{7}{n}+\frac{12}{n^2}}}{12-\frac{9}{n}}=\frac{7\sqrt{3}}{6}$$

46. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2-4n+13}-\sqrt{n^2+n+2}} = \cdots = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

47. **Feladat:**

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3n^2+5n}-\sqrt{n+7}) = \cdots = \infty$$

Megoldás: A határérték $\infty - \infty$ típusú, de n együtthatói és fokszámai nem egyenlőek, így emeljük ki n legmagasabb fokszámú kifejezését, most $\sqrt{n^2} = n$-t:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3n^2+5n}-\sqrt{n+7}) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{3+\frac{5}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}}\right) = \infty(\sqrt{3}-\sqrt{0}) = \infty$$

48. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{7n^2-5n-13}-\sqrt{n^4-n+2}) = \cdots = -\infty$$

Megoldás: A határérték $\infty - \infty$ típusú, de n együtthatói és fokszámai nem egyenlőek, így emeljük ki n legmagasabb fokszámú kifejezését, most $\sqrt{n^4} = n^2$-t:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{7n^2-5n-13}-\sqrt{n^4-n+2}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{\frac{7}{n^2}-\frac{5}{n^3}-\frac{13}{n^4}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}}\right) = \infty\cdot(0-1) = -\infty$$

49. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{4n-5}\right)^{6n+2} = \cdots = \frac{1}{\sqrt{e^9}} = \frac{1}{e^4\sqrt{e}}$$

Megoldás: Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{4n-5}\right)^{6n+2} = 1^\infty$$

alkalmazzuk a következő nevezetes határértékre vonatkozó tételt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{r(n)}\right)^{r(n)} = e^a \qquad \text{ahol } a\in\mathbf{R} \qquad \text{és} \qquad r(n)\to\infty$$

Így

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{4n-5}\right)^{6n+2} = 1^\infty = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{4n-5}\right)^{4n-5}\right]^{\frac{6n+2}{4n-5}} = \left(e^{-3}\right)^{\frac{6}{4}} = \frac{1}{\sqrt{e^9}}$$

50. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{3n+1}\right)^{7n+3} = \cdots = \frac{1}{e^{11}\sqrt[3]{e^2}}$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{3n+1}\right)^{7n+3} = 1^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1-5}{3n+1}\right)^{7n+3} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-5}{3n+1}\right)^{7n+3} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-5}{3n+1}\right)^{3n+1}\right]^{\frac{7n+3}{3n+1}} = \left(e^{-5}\right)^{\frac{7}{3}} = \frac{1}{e^{11}\sqrt[3]{e^2}}$$

51. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2-1}\right)^{8n^2+3} = \cdots = e^8$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2-1}\right)^{8n^2+3} = 1^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-1+2}{2n^2-1}\right)^{8n^2+3} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2n^2-1}\right)^{2n^2-1}\right]^{\frac{8n^2+3}{2n^2-1}} = \left(e^2\right)^4 = e^8$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{8n^2+3}{2n^2-1} = \frac{n^2(8+\frac{3}{n^2})}{n^2(2-\frac{1}{n^2})} = \frac{8+\frac{3}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}} \to \frac{8}{2} = 4$$

52. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+4}{7n^2+1}\right)^{12n+3} = \cdots = 1$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+4}{7n^2+1}\right)^{12n+3} = 1^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+1+3}{7n^2+1}\right)^{12n+3} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{7n^2+3}\right)^{7n^2+3}\right]^{\frac{12n+3}{7n^2+1}} = \left(e^3\right)^0 = 1$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{12n+3}{7n^2+1} = \frac{n(12+\frac{3}{n})}{n^2(7+\frac{1}{n})} = \frac{1}{n}\cdot\frac{12+\frac{3}{n}}{7+\frac{1}{n}} \to 0\cdot\frac{12}{7} = 0$$

53. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n-11}{9n-7}\right)^{n^3+n}=\cdots=0$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n-11}{9n-7}\right)^{n^3+n}=1^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n-7-4}{9n-7}\right)^{n^3+n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{9n-7}\right)^{9n-7}\right]^{\frac{n^3-n}{9n-7}}=\left(e^{-4}\right)^{\infty}=\left(\frac{1}{e^4}\right)^{\infty}=0$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{n^3-n}{9n-7}=\frac{n^3(1-\frac{1}{n^2})}{n(9-\frac{7}{n})}=n^2\cdot\frac{1-\frac{1}{n^2}}{9-\frac{7}{n}}\to\infty\cdot\frac{1}{9}=\infty$$

54. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{5n+11}\right)^{4\sqrt{n}+2}=\cdots=0$$

Megoldás: Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{5n+11}\right)^{4\sqrt{n}+2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{\infty}$$

alkalmazzuk a következő nevezetes határértékre vonatkozó tételt:

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0\qquad\text{ha}\qquad|q|<1$$

Így

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{5n+11}\right)^{4\sqrt{n}+2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{\infty}=0$$

55. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+5}{3n+10}\right)^{7n^2+3}=\cdots=\infty$$

Megoldás: Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+5}{3n+10}\right)^{7n^2+3}=\left(\frac{7}{3}\right)^{\infty}$$

alkalmazzuk a következő tételt:

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\infty\qquad\text{ha}\qquad q>1$$

Így

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+5}{3n+10}\right)^{7n^2+3}=\left(\frac{7}{3}\right)^{\infty}=\infty$$