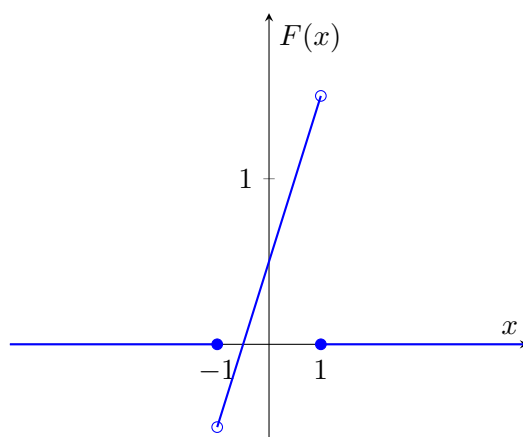


SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY, VÁRHATÓ ÉRTÉK, SZÓRÁS

1. Melyik sűrűségfüggvény az alábbiak közül?

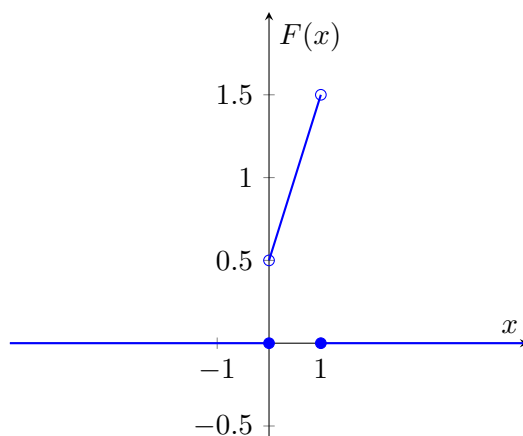
(a) **B, V** $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{ha } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

[1. Ahhoz, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény legyen teljesülnie kell, hogy $f(x) \geq 0$. Ez nem teljesül.]
[Tehát ez a függvény nem sűrűségfüggvény.]



(b) **B, V** $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

[1. Ahhoz, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény legyen teljesülnie kell, hogy $f(x) \geq 0$. Ez teljesül.]

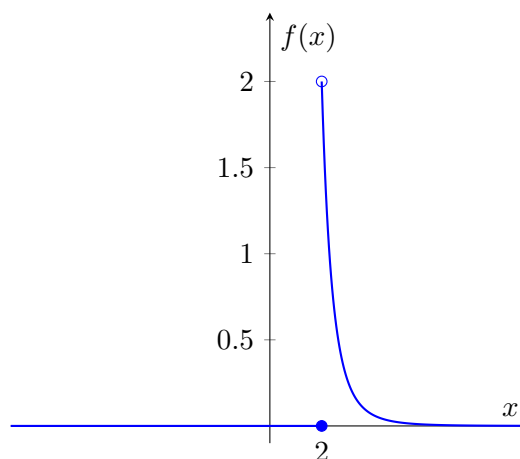
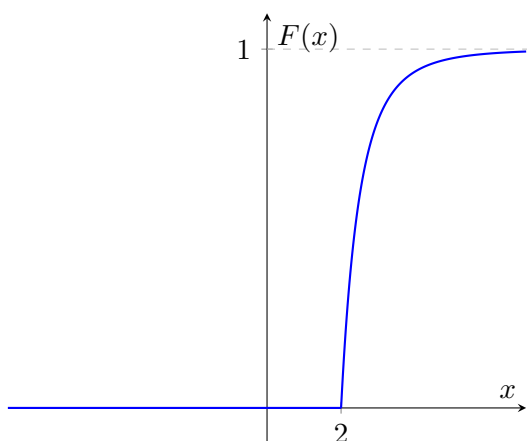


[2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$; Mivel mindkét feltétel teljesül ez a függvény sűrűségfüggvény.]

2. Ábrázolja az eloszlásfüggvényt! Határozza meg és ábrázolja az alábbi eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

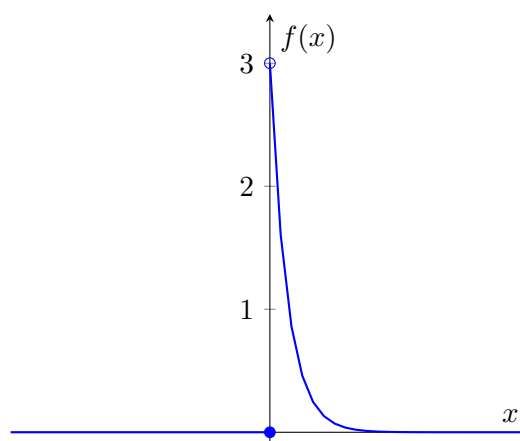
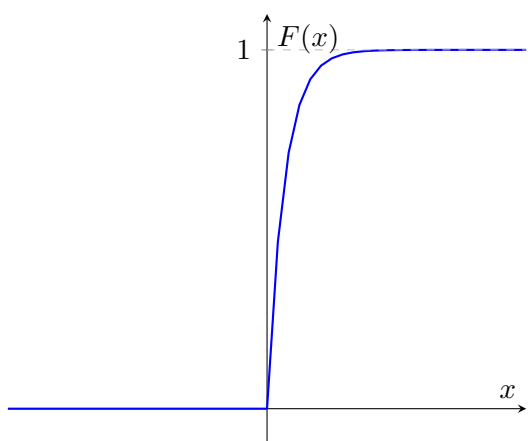
$$(a) \text{ B, V } F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{16}{x^4} & \text{ha } x > 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \begin{cases} \frac{64}{x^5} & \text{ha } x > 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \right]$$



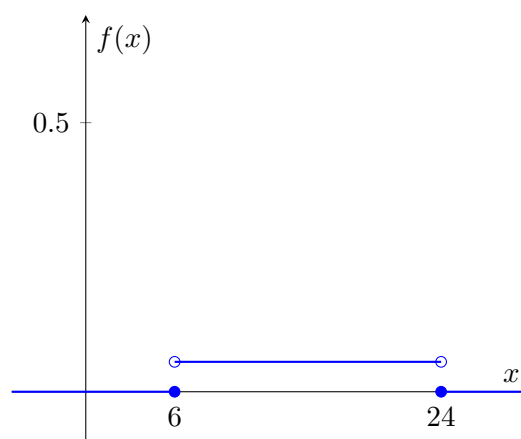
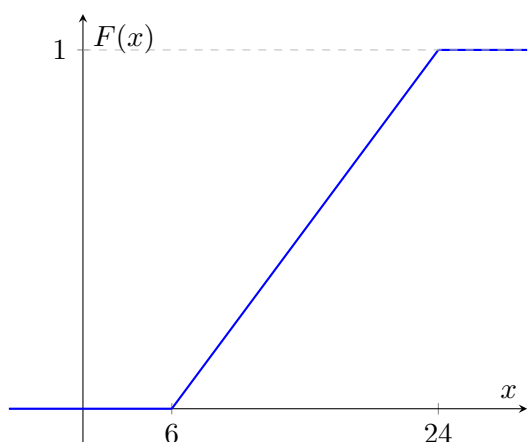
$$(b) \text{ B, V } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \right]$$



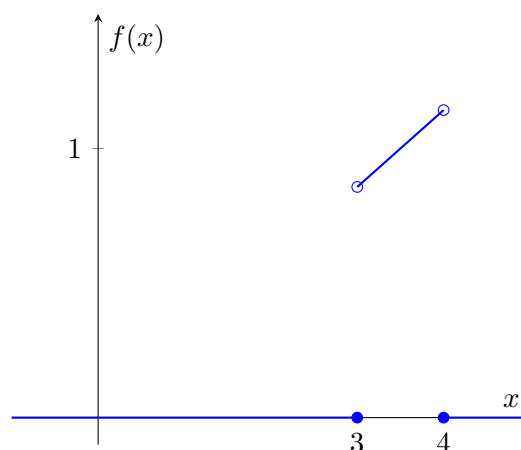
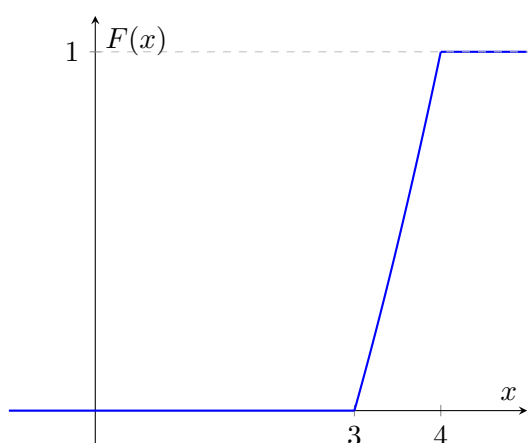
$$(c) \text{ B, V } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 6 \\ \frac{x-6}{18} & \text{ha } 6 < x \leq 24 \\ 1 & \text{ha } x > 24 \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18} & \text{ha } 6 < x < 24 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \right]$$



(d) **B, V**
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 3 \\ \frac{x^2-9}{7} & \text{ha } 3 < x \leq 4 \\ 1 & \text{ha } x > 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{7}x & \text{ha } 3 < x < 4 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$



3. Mennyi legyen a c paraméter értéke, hogy az alábbi függvények sűrűségfüggvények legyenek?

(a) **V**
$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^{-2} & \text{ha } x > 3 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

[1. Ahhoz, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény legyen teljesülnie kell, hogy $f(x) \geq 0$, tehát $c \geq 0$.]

[2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot c$; $\frac{1}{3} \cdot c = 1$; $c = 3$]

(b) **V**
$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^{-5} & \text{ha } x > 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

[1. Ahhoz, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény legyen teljesülnie kell, hogy $f(x) \geq 0$, tehát $c \geq 0$.]

$$\left[2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{64} \cdot c; \frac{1}{64} \cdot c = 1; c = 64 \right]$$

$$(c) \quad \mathbf{V} \quad f(x) = \begin{cases} c \cdot x & \text{ha } 4 < x \leq 13 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

[1. Ahhoz, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény legyen teljesülnie kell, hogy $f(x) \geq 0$, tehát $c \geq 0$.]

$$\left[2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{153}{2} \cdot c; \frac{153}{2} \cdot c = 1; c = \frac{2}{153} \right]$$

$$(d) \quad \mathbf{V} \quad f(x) = \begin{cases} c \cdot x^2 & \text{ha } -3 < x < 3 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

[1. Ahhoz, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény legyen teljesülnie kell, hogy $f(x) \geq 0$, tehát $c \geq 0$.]

$$\left[2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 18 \cdot c; 18 \cdot c = 1; c = \frac{1}{18} \right]$$

$$(e) \quad \mathbf{V} \quad f(x) = \begin{cases} c \cdot 2^{-x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

[1. Ahhoz, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény legyen teljesülnie kell, hogy $f(x) \geq 0$, tehát $c \geq 0$.]

$$\left[2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot c; \frac{1}{\ln 2} \cdot c = 1; c = \ln 2 \right]$$

$$(f) \quad \mathbf{V} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{c}{(x+3)^2} & \text{ha } -1 < x < 3 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

[1. Ahhoz, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény legyen teljesülnie kell, hogy $f(x) \geq 0$, tehát $c \geq 0$.]

$$\left[2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot c; \frac{1}{3} \cdot c = 1; c = 3 \right]$$

4. Határozza meg az alábbi sűrűségfüggvényekkel megadott valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

$$(a) \quad \mathbf{V} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{72}{x^3} & \text{ha } x > 6 \\ 0 & \text{különben } (x \leq 6) \end{cases}$$

$$\left[F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{36}{x^2} & \text{ha } x > 6 \\ 0 & \text{különben } (x \leq 6) \end{cases} \right]$$

$$(b) \quad \mathbf{V} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$\left[F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{ha } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{ha } x > 2 \end{cases} \right]$$

$$(c) \quad \mathbf{V} \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$\left[F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ x^3 & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{ha } x > 1 \end{cases} \right]$$

$$(d) \quad \mathbf{V} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{21} & \text{ha } 1 < x < 4 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$$\left[F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{1}{63}x^3 - \frac{1}{63} & \text{ha } 0 < x \leq 4 \\ 1 & \text{ha } x > 4 \end{cases} \right]$$

5. **B,V** Egy szabályos pénzérmét egymás után háromszor feldobunk. A valószínűségi változó jelentse a dobott fejek számát. Határozza meg a valószínűségi változó várható értékét és szórását!

$$\left[\xi : \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array} \right. ; M(\xi) = 1,5; D(\xi) = 0,866 \right]$$

6. **B,V** Egy szabályos dobókockát háromszor elgurítunk. A valószínűségi változó jelentse a dobott hármások számát. Határozza meg a valószínűségi változó várható értékét és szórását!

$$\left[\xi : \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{125}{216} & \frac{75}{216} & \frac{15}{216} & \frac{1}{216} \end{array} \right. ; M(\xi) = 0,5; D(\xi) = 0,6455 \right]$$

7. **B,V** Egy pakli magyar kártyából visszatevéssel húzunk 4 lapot. A valószínűségi változó jelölje a kihúzott felsők számát. Határozza meg a valószínűségi változó várható értékét és szórását!

$$\left[\xi : \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,5862 & 0,3350 & 0,07178 & 0,00684 & 0,000244 \end{array} \right. ; M(\xi) = 0,5; D(\xi) = 0,6615 \right]$$

8. **B,V** Egy pakli magyar kártyából visszatevés nélkül húzunk 4 lapot. A valószínűségi változó jelölje a kihúzott felsők számát. Határozza meg a valószínűségi változó várható értékét és szórását!

$$\left[\xi : \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,5694 & 0,3644 & 0,0631 & 0,00311 & 0,0000278 \end{array} \right. ; M(\xi) = 0,5; D(\xi) = 0,6287 \right]$$

9. **B,V** Egy dobozban 4 piros és 6 fehér golyó van. 3 golyót húzunk visszatevéssel. A valószínűségi változó jelölje a kihúzott fehér golyók számát. Határozza meg a valószínűségi változó várható értékét és szórását!

$$\left[\xi : \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,064 & 0,288 & 0,432 & 0,216 \end{array} \right. ; M(\xi) = 1,8; D(\xi) = 0,8485 \right]$$

10. **B,V** Egy dobozban 4 piros és 6 fehér golyó van. 3 golyót húzunk visszatevés nélkül. A valószínűségi változó jelölje a kihúzott fehér golyók számát. Határozza meg a valószínűségi változó várható értékét és szórását!

$$\left[\xi : \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,0333 & 0,3 & 0,5 & 0,1667 \end{array} \right. ; M(\xi) = 1,8; D(\xi) = 0,7483 \right]$$

11. **B,V** Egy dobozban 2 piros, 4 kék és 6 fehér golyó van. A valószínűségi változó legyen 2, ha pirosat, 0, ha kéket és -2 , ha fehéret húzunk. Határozza meg a valószínűségi változó várható

értékét és szórását!

$$\left[\xi : \begin{cases} -2 & 0 & 2 \\ \frac{6}{12} & \frac{4}{12} & \frac{2}{12} \end{cases} ; M(\xi) = -0,6667; D(\xi) = 1,4907 \right]$$

12. **V** Egy kaparós sorsjegyből 100 000 darabot hoznak forgalomba. Három olyan van közöttük, amellyel egymillió Ft-ot és száz olyan, amellyel ötvenezer Ft-ot lehet nyerni. A sorsjegy ára 100 Ft. Egy sorsjegy vásárlása esetén mennyi a nettó nyereség várható értéke?

$$\left[\xi : \begin{cases} -100 & 49900 & 999900 \\ \frac{99897}{100000} & \frac{100}{100000} & \frac{3}{100000} \end{cases} ; M(\xi) = -19,997 \right]$$

13. Határozza meg az alábbi sűrűségfüggvényekkel megadott valószínűségi változók várható értékét és szórását!

$$(a) \text{ B, V } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad [M(\xi) = 1; M(\xi^2) = \frac{4}{3}; D(\xi) = 0,5774]$$

$$(b) \text{ B, V } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{ha } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad [M(\xi) = 1,5; M(\xi^2) = 2,4; D(\xi) = 0,3873]$$

$$(c) \text{ B, V } f(x) = \begin{cases} \frac{192}{x^4} & \text{ha } x > 4 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad [M(\xi) = 6; M(\xi^2) = 48; D(\xi) = 3,4641]$$

$$(d) \text{ B, V } f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{2} & \text{ha } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad [M(\xi) = \frac{2}{3}; M(\xi^2) = \frac{2}{3}; D(\xi) = 0,4714]$$

14. Adott a valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{35}x & \text{ha } 1 < x < 6 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$.

Számítsa ki az alábbi valószínűségeket!

- (a) **B, V** $P(\xi < 4)$ [0,42857]
 (b) **B, V** $P(\xi > 3)$ [0,77143]
 (c) **B, V** $P(\xi = 5)$ [0]
 (d) **B, V** $P(3 < \xi \leq 5)$ [0,45714]
 (e) **B, V** $P(\xi < 4 \mid \xi \leq 3)$ [1]
 (f) **V** $P(\xi > 2 \mid \xi < 3)$ [0,625]

15. Adott a valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \begin{cases} \frac{72}{x^3} & \text{ha } x > 6 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$.

Számítsa ki az alábbi valószínűségeket!

- (a) **B, V** $P(\xi < 11)$ [0,70248]
 (b) **B, V** $P(\xi > 9)$ [0,4444]
 (c) **B, V** $P(\xi = 11)$ [0]
 (d) **B, V** $P(8 < \xi < 12)$ [0,3125]

16. Adott a valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \begin{cases} \frac{18}{x^3} & \text{ha } x > 3 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$.

Számítsa ki az alábbi valószínűségeket!

- (a) **B,V** $P(\xi < 6)$ [0, 75]
- (b) **B,V** $P(\xi > 5)$ [0, 36]
- (c) **B,V** $P(\xi = 7)$ [0]
- (d) **B,V** $P(4 < \xi < 6)$ [0, 3125]
- (e) **V** $P(\xi > 4 \mid \xi < 8)$ [0, 491]