# *Differenciálszámítás*

1. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

   (a) $f(x) = 5x^4 + 3x^3 - 14x - 4$
   $[f'(x) = 5 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 3x^2 - 14 - 0 = 20x^3 + 9x^2 - 14]$

   (b) $f(x) = 3\cos x - 7e^x + \sqrt[5]{x^3} + 6$
   $\left[f'(x) = 3 \cdot (-\sin x) - 7 \cdot e^x + \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} + 0 = -3\sin x - 7e^x + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = -3\sin x - 7e^x + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}\right]$

   (c) $f(x) = 4\mathrm{arctg}x + 5^x - \dfrac{3}{x^4} + e^3$
   $\left[f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{1+x^2} + 5^x \cdot \ln 5 - 3 \cdot (-4)x^{-5} + 0 = \frac{4}{1+x^2} + 5^x \cdot \ln 5 + 12 \cdot \frac{1}{x^5} = \frac{4}{1+x^2} + 5^x \ln 5 + \frac{12}{x^5}\right]$

   (d) $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x}} + \log_4 x + 3x - \sqrt{\pi}$
   $\left[f'(x) = 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x \cdot \ln 4} + 3 - 0 = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x\ln 4} + 3 = -\frac{7}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x\ln 4} + 3\right]$

   (e) $f(x) = \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[5]{x^3}}}$
   $[f(x) = x^{\frac{3}{5}}$
   $f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}]$

   (f) $f(x) = 5e^x - 4^x - \ln x - \log_2 x + e^2 - \ln 3$
   $[f'(x) = 5e^x - 4^x \cdot \ln 4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x \cdot \ln 2} + 0 - 0 = 5e^x - 4^x \ln 4 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x\ln 2}]$

2. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

   (a) B $f(x) = \dfrac{11}{x} - \dfrac{\sqrt{3}}{x^4} + \dfrac{7}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt[7]{x^4}}$
   $[f(x) = 11x^{-1} - \sqrt{3}x^{-4} + 7x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{4}{7}}$
   $f'(x) = 11 \cdot (-1)x^{-2} - \sqrt{3} \cdot (-4)x^{-5} + 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} - 2 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) x^{-\frac{11}{7}} =$
   $-\frac{11}{x^2} + \frac{4\sqrt{3}}{x^5} + \frac{7}{2\sqrt{x^3}} - \frac{8}{7\sqrt[7]{x^{11}}}]$

   (b) B $f(x) = x^2\sqrt{x} - \dfrac{4}{x^6} + \dfrac{8x^3}{\sqrt[4]{x^5}}$
   $[f(x) = x^{\frac{5}{2}} - 4x^{-6} + 8x^{\frac{7}{4}}$
   $f'(x) = \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 4 \cdot (-6)x^{-7} + 8 \cdot \frac{7}{4}x^{\frac{3}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3} + \frac{24}{x^7} + 14\sqrt[4]{x^3}]$

   (c) B $f(x) = (3x^5 + 2x)(5x^3 - 7x^2)$
   $[f(x) = 15x^8 - 21x^7 + 10x^4 - 14x^3$
   $f'(x) = 120x^7 - 147x^6 + 40x^3 - 42x^2]$

   (d) B $f(x) = (x^2 + \sqrt[5]{x^3})(\sqrt{x} - \frac{5}{x})$
   $[f(x) = x^{\frac{5}{2}} - 5x + x^{\frac{11}{10}} - 5x^{-\frac{2}{5}}$
   $f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - 5 + \frac{11}{10}x^{\frac{1}{10}} - 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) x^{-\frac{7}{5}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3} - 5 + \frac{11}{10}\sqrt[10]{x} + \frac{2}{\sqrt[5]{x^7}}]$

(e) B $f(x) = \dfrac{3x^7 + 8x^9 - 2x^6 + 5}{x^2}$
$[f(x) = 3x^5 + 8x^7 - 2x^4 + 5x^{-2}$
$f'(x) = 15x^4 + 56x^6 - 8x^3 - 10x^{-3} = 56x^6 + 15x^4 - 8x^3 - \frac{10}{x^3}]$

(f) B $f(x) = \dfrac{x^4 + \sqrt[4]{x^5} - 3}{\sqrt{x}}$
$[f(x) = x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{3}{4}} - 3x^{-\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x^3}}]$

(g) B $f(x) = \dfrac{\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x}}}}{x^2}$
$[f(x) = \frac{x^{\frac{21}{30}}}{x^2} = x^{-\frac{39}{30}}$
$f'(x) = -\frac{39}{30}x^{-\frac{69}{30}} = -\frac{13}{10\sqrt[30]{x^{69}}}]$

3. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

(a) $f(x) = \cos x \cdot 3^x$
$[f'(x) = -\sin x \cdot 3^x + \cos x \cdot 3^x \cdot \ln 3]$

(b) $f(x) = \log_2 x \cdot \text{arcsin}x$
$\left[f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2} \cdot \text{arcsin}x + \log_2 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(c) $f(x) = (2x^4 + 3x - 7) \cdot \text{ctg}x$
$\left[f'(x) = (2 \cdot 4x^3 + 3) \cdot \text{ctg}x + (2x^4 + 3x - 7) \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = (8x^3 + 3)\text{ctg}x - \frac{(2x^4+3x-7)}{\sin^2 x}\right]$

(d) $f(x) = (3\sin x + \sqrt{x})(\log_5(x) - \text{tg } x)$
$\left[f'(x) = (3\cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}})(\log_5(x) - \text{tg } x) + (3\sin x + \sqrt{x})\left(\frac{1}{x\ln 5} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\right]$

(e) $f(x) = \dfrac{\sin x}{8^x}$
$\left[f'(x) = \frac{\cos x \cdot 8^x - \sin x \cdot 8^x \cdot \ln 8}{(8^x)^2} = \frac{\cos x \cdot 8^x - \sin x \cdot 8^x \cdot \ln 8}{8^{2x}}\right]$

(f) $f(x) = \dfrac{\sin x}{4e^x + 2x}$
$\left[f'(x) = \frac{\cos x \cdot (4e^x + 2x) - \sin x \cdot (4e^x + 2)}{(4e^x + 2x)^2}\right]$

(g) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
$\left[f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}\right]$

(h) $f(x) = \sqrt[4]{x^3 + 4x}$
$[f(x) = (x^3 + 4x)^{\frac{1}{4}}$
$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^3 + 4x)^{-\frac{3}{4}} \cdot (3x^2 + 4) = \frac{3x^2+4}{4\sqrt[4]{(x^3+4x)^3}}]$

(i) $f(x) = \sin(5x)$
$[f'(x) = \cos(5x) \cdot 5]$

(j) $f(x) = \sin x^5$
$\left[f'(x) = \cos x^5 \cdot 5x^4\right]$

(k) $f(x) = \sin^5 x$
$\left[f'(x) = 5(\sin x)^4 \cdot \cos x = 5\sin^4 x \cos x\right]$

(l) $f(x) = (4e^x + 2x)^{10}$
$\left[f'(x) = 10(4e^x + 2x)^9(4e^x + 2)\right]$

4. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

(a) B $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x+3}}{\arcsin(x)}$
$$\left[f'(x) = \frac{\frac{1}{4}\cdot(2x+3)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2\cdot\arcsin(x) - \sqrt[4]{2x+3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2(x)}\right]$$

(b) B $f(x) = \cos^2(3x+\pi)$
$[f'(x) = 2\cdot\cos(3x+\pi)\cdot(-\sin(3x+\pi))\cdot 3]$

(c) B $f(x) = \sqrt[5]{\ln\left(4x^2+7\right)}$
$$\left[f'(x) = \frac{1}{5}\cdot(\ln(4x^2+7))^{-\frac{4}{5}}\cdot\frac{1}{4x^2+7}\cdot 8x\right]$$

(d) B $f(x) = 8^x\cdot\sqrt[3]{1-7x}$
$$\left[f'(x) = 8^x\cdot\ln 8\cdot\sqrt[3]{1-7x} + 8^x\cdot\frac{1}{3}\cdot(1-7x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-7)\right]$$

(e) B $f(x) = \sqrt[7]{6x^2+3x}\cdot\mathrm{ctg}(x)$
$$\left[f'(x) = \frac{1}{7}\cdot(6x^2+3x)^{-\frac{6}{7}}\cdot(12x+3)\cdot\mathrm{ctg}(x) + \sqrt[7]{6x^2+3x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right]$$

(f) B $f(x) = \dfrac{\cos(2+3x)}{\sqrt[6]{x}}$
$$\left[f'(x) = \frac{-\sin(2+3x)\cdot 3\cdot\sqrt[6]{x} - \cos(2+3x)\cdot\frac{1}{6}\cdot x^{-\frac{5}{6}}}{\sqrt[3]{x}}\right]$$

(g) B $f(x) = \sin\left(\sqrt[3]{7-2x}\right)$
$$\left[f'(x) = \cos\left(\sqrt[3]{7-2x}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot(7-2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-2)\right]$$

(h) B $f(x) = 4^{\cos(8x^3-5x^2)}$
$$\left[f'(x) = 4^{\cos(8x^3-5x^2)}\cdot\ln 4\cdot(-\sin(8x^3-5x^2))\cdot(24x^2-10x)\right]$$

(i) B $f(x) = \dfrac{\mathrm{arctg}(x^3+2)}{3^x}$
$$\left[f'(x) = \frac{\frac{1}{1+(x^3+2)^2}\cdot 3x^2\cdot 3^x - \mathrm{arctg}(x^3+2)\cdot 3^x\cdot\ln 3}{3^{2x}}\right]$$

(j) B $f(x) = \log_4(2x^2+2)\cdot\mathrm{arcctg}(x)$
$$\left[f'(x) = \frac{1}{(2x^2+2)\cdot\ln 4}\cdot 4x\cdot\mathrm{arcctg}(x) + \log_4(2x^2+2)\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\right]$$

(k) B $f(x) = \sin\left(x^4 + 2x^5\right) \cdot 7^x$
$\left[f'(x) = \cos\left(x^4 + 2x^5\right) \cdot (4x^3 + 10x^4) \cdot 7^x + \sin\left(x^4 + 2x^5\right) \cdot 7^x \cdot \ln 7\right]$

(l) B $f(x) = \dfrac{\arccos(x)}{\mathrm{e}^{4x+3}}$
$\left[f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \mathrm{e}^{4x+3} - \arccos(x) \cdot \mathrm{e}^{4x+3} \cdot 4}{(\mathrm{e}^{4x+3})^2}\right]$

(m) B $f(x) = \dfrac{\sqrt[9]{3x^2+7}}{\arcsin(x)}$
$\left[f'(x) = \dfrac{\frac{1}{9} \cdot (3x^2+7)^{-\frac{8}{9}} \cdot 6x \cdot \arcsin(x) - \sqrt[9]{3x^2+7} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2(x)}\right]$

(n) B $f(x) = \cos\left(6^x \cdot x^3\right)$
$\left[f'(x) = -\sin\left(6^x \cdot x^3\right) \cdot (6^x \cdot \ln 6 \cdot x^3 + 6^x \cdot 3x^2)\right]$

(o) B $f(x) = \operatorname{arctg}(2^x - 3) \cdot \log_6 x$
$\left[f'(x) = \dfrac{1}{1 + (2^x - 3)^2} \cdot 2^x \cdot \ln 2 \cdot \log_6 x + \operatorname{arctg}(2^x - 3) \cdot \dfrac{1}{x \cdot \ln 6}\right]$

(p) B $f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{7 - 2x}$
$\left[f'(x) = \frac{(2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x})(7-2x) - x^2 \cdot \ln x \cdot (-2)}{(7-2x)^2} = \frac{(2x \ln x + x)(7-2x) + 2x^2 \ln x}{(7-2x)^2}\right]$

(r) B $f(x) = \sqrt{3x-2} - e^{2-x}$
$\left[f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x-2}} \cdot 3 - e^{2-x} \cdot (-1) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} + e^{2-x}\right]$

(s) B $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
$\left[f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{x-(x+1)}{x^2} = \frac{-1}{x(x+1)}\right]$

(t) B $f(x) = \cos(4-x)(\ln(5x) + \sqrt{6x+1})$
$\left[f'(x) = -\sin(4-x) \cdot (-1) \cdot (\ln(5x) + \sqrt{6x+1}) + \cos(4-x) \cdot \left(\frac{1}{5x} \cdot 5 + \frac{1}{2\sqrt{6x+1}} \cdot 6\right)\right]$

(v) B $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{4x^2+1}}$
$\left[f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{1 \cdot 4x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1 \cdot (4x^2+1) - x \cdot 8x}{(4x^2+1)^2}\right]$

(w) B $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x-3}{5}\right)$
$[f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{5} \cdot x - \frac{3}{5}\right)$
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x-3}{5}\right)} \cdot \frac{1}{5}]$

(x) B $f(x) = e^{\sqrt{x}\sin x}$
$\left[f'(x) = e^{\sqrt{x}\sin x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x\right)\right]$

5. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

(a) V $f(x)=\sin(6x^4-4x^3+5)\cdot\lg x^5$
$\left[f'(x)=\cos(6x^4-4x^3+5)\cdot(24x^3-12x^2)\cdot\lg x^5+\sin(6x^4-4x^3+5)\cdot\frac{1}{x^5\cdot\ln 10}\cdot 5x^4\right]$

(b) V $f(x)=\frac{\sqrt[3]{4-5x}}{\mathrm{e}^{3x}}$
$\left[f'(x)=\frac{\frac{1}{3}\cdot(4-5x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-5)\cdot\mathrm{e}^{3x}-\sqrt[3]{4-5x}\cdot\mathrm{e}^{3x}\cdot 3}{\mathrm{e}^{6x}}\right]$

(c) V $f(x)=\cos\left(\sqrt[8]{3-9x}\right)$
$\left[f'(x)=-\sin\left(\sqrt[8]{3-9x}\right)\cdot\frac{1}{8}\cdot(3-9x)^{-\frac{7}{8}}\cdot(-9)\right]$

(d) V $f(x)=\sin\left(x^4+2x^5\right)\cdot 7^{3x+2}$
$\left[f'(x)=\cos\left(x^4+2x^5\right)\cdot(4x^3+10x^4)\cdot 7^{3x+2}+\sin\left(x^4+2x^5\right)\cdot 7^{3x+2}\cdot\ln 7\cdot 3\right]$

(e) V $f(x)=\frac{\arccos(3x)}{\mathrm{e}^{5x^2+6x}}$
$\left[f'(x)=\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\cdot 3\cdot\mathrm{e}^{5x^2+6x}-\arccos(3x)\cdot\mathrm{e}^{5x^2+6x}\cdot(10x+6)}{(\mathrm{e}^{5x^2+6x})^2}\right]$

(f) V $f(x)=(2-8x)^5\cdot\mathrm{tg}(3x^2)$
$\left[f'(x)=5\cdot(2-8x)^4\cdot(-8)\cdot\mathrm{tg}(3x^2)+(2-8x)^5\cdot\frac{1}{\cos^2(3x^2)}\cdot 6x\right]$

(g) V $f(x)=\sin\left(\frac{\log_3 x}{x^2}\right)$
$\left[f'(x)=\cos\left(\frac{\log_3 x}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{x\cdot\ln 3}\cdot x^2-\log_3 x\cdot 2x}{x^4}\right)\right]$

(h) V $f(x)=\cos\left(\sqrt[4]{-3x+10}\right)$
$\left[f'(x)=-\sin\left(\sqrt[4]{-3x+10}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot(-3x+10)^{-\frac{3}{4}}\cdot(-3)\right]$

(i) V $f(x)=\sqrt[3]{\ln(4x-5)}$
$\left[f'(x)=\frac{1}{3}\cdot(\ln(4x-5))^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{4x-5}\cdot 4\right]$

(j) V $f(x)=\mathrm{tg}(7x^2+2x)\ln^7\left(\frac{1}{x}\right)$
$\left[f'(x)=\frac{1}{\cos^2(7x^2+2x)}\cdot(14x+2)\cdot\ln^7\left(\frac{1}{x}\right)+\mathrm{tg}(7x^2+2x)\cdot 7\cdot\ln^6\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot(-1)x^{-2}\right]$

(k) V $f(x)=\sqrt[3]{4x+\sin\ln\left(\frac{x^2}{6}\right)}$
$[f(x)=\left(4x+\sin\ln\left(\frac{1}{6}x^2\right)\right)^{\frac{1}{3}}$
$f'(x)=\frac{1}{3}\left(4x+\sin\ln\left(\frac{1}{6}x^2\right)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(4+\cos\ln\left(\frac{1}{6}x^2\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{6}x^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2x\right)$
$\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(4x+\sin\ln\left(\frac{x^2}{6}\right)\right)^2}}\cdot\left(4+\cos\ln\left(\frac{x^2}{6}\right)\frac{2}{x}\right)]$

(l) V $f(x) = \dfrac{\mathrm{ctg}\sqrt{x} - 7x}{3xe^{4x} + 3\cos x}$

$[f'(x) = \dfrac{(-\frac{1}{\sin^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 7)(3xe^{4x} + 3\cos x) - (\mathrm{ctg}\sqrt{x} - 7x)(3e^{4x} + 12xe^{4x} - 3\sin x)}{(3xe^{4x} + 3\cos x)^2}]$

6. Határozza meg az alábbi függvények deriváltfüggvényeit!

(a) $f(x) = x^{\cos x}$

$[f(x) = \mathrm{e}^{\cos x \cdot \ln x}$

$f'(x) = x^{\cos x}\left(-\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \dfrac{1}{x}\right)]$

(b) V $f(x) = (5 - x^3)^{x^2}$

$[f(x) = \mathrm{e}^{x^2 \cdot \ln(5-x^3)}$

$f'(x) = (5 - x^3)^{x^2}\left(2x \cdot \ln(5 - x^3) + x^2 \cdot \dfrac{1}{5 - x^3} \cdot (-3x^2)\right)]$

(c) V $f(x) = (\sin x)^{\mathrm{tg}x}$

$[f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{tg}x \cdot \ln(\sin x)}$

$f'(x) = (\sin x)^{\mathrm{tg}x}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \ln(\sin x) + \mathrm{tg}x \cdot \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right)]$

(e) V $f(x) = (x^4)^{\sin(2x)}$

$[f(x) = \mathrm{e}^{\sin(2x) \cdot \ln x^4}$

$f'(x) = (x^2)^{\sin(2x)}\left(\cos(2x) \cdot 2 \cdot \ln x^4 + \sin(2x) \cdot \dfrac{1}{x^4} \cdot 4x^3\right)]$

(f) V $f(x) = [\ln(2x)]^{\sin(5x)}$

$[f(x) = \mathrm{e}^{\sin(5x) \cdot \ln(\ln(2x))}$

$f'(x) = [\ln(2x)]^{\sin(5x)}\left(\cos(5x) \cdot 5 \cdot \ln(\ln(2x)) + \sin(5x) \cdot \dfrac{1}{\ln(2x)} \cdot \dfrac{1}{2x} \cdot 2\right)]$

7. Adja meg az alábbi függvények $x_0$ helyen vett érintőinek az egyenletét!

(a) B $f(x) = \mathrm{e}^{6-5x},\ x_0 = \dfrac{6}{5}, D(f) = R$ $[y = -5x + 7]$

(b) B $f(x) = \ln(3x - 1),\ x_0 = \dfrac{2}{3}, D(f) = \left]\dfrac{1}{3}; \infty\right[$ $[y = 3x - 2]$

(c) B $f(x) = \dfrac{3}{x^2},\ x_0 = -2, D(f) = R \setminus \{0\}$ $[y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}]$

(d) B $f(x) = \sqrt{7 - x} + 4,\ x_0 = 3, D(f) = ]-\infty; 7]$ $[y = -\frac{1}{4}x + \frac{27}{4}]$

(e) B $f(x) = \arcsin(3 - x),\ x_0 = 3, D(f) = [2; 4]$ $[y = -x + 3]$

(f) B $f(x) = \dfrac{4}{x} + 5,\ x_0 = -3, D(f) = R \setminus \{0\}$ $[y = -\frac{4}{9}x + \frac{7}{3}]$

(g) B $f(x) = (-2 + 3x)^3 - 5,\ x_0 = 1, D(f) = R$ $[y = 9x - 13]$

(h) B $f(x) = -\mathrm{arctg}(6 - 3x),\ x_0 = 2, D(f) = R$ $[y = 3x - 6]$

(i) B $f(x) = \ln(x^2 - 3),\ x_0 = 2, D(f) = ]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; \infty[$ $[y = 4x - 8]$

8. Írja fel a következő hozzárendeléssel adott függvények $x_0$ pontjához tartozó érintőinek az egyenletét!

   (a) V $f(x) = \dfrac{\sin x - 3}{\sqrt{x+1}},\ x_0 = 0, D(f) = ]-1; \infty[$ $[y = \frac{5}{2}x - 3]$

   (b) V $f(x) = xe^{x-1} + 4,\ x_0 = 0, D(f) = R$ $[y = \frac{1}{\mathrm{e}}x + 4]$

   (c) V $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+3}}{x},\ x_0 = 2, D(f) = [-1; \infty[\setminus\{0\}$ $[y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}]$

   (d) V $f(x) = (2x-1)\sin(3x) + 5,\ x_0 = 0, D(f) = R$ $[y = -3x + 5]$

9. V Határozza meg az $f : R \to R, f(x) = \ln(x^2 + 6)$ függvény $5y - 2x = 10$ egyenessel párhuzamos érintőjének az egyenletét!
   [ Ha $x = 2$, akkor az érintő egyenlete:$y = \frac{2}{5}(x-2) + \ln 10$
   Ha $x = 3$, akkor az érintő egyenlete:$y = \frac{2}{5}(x-3) + \ln 15$]

10. V Írja fel az $f(x) = \dfrac{2x-1}{2-x}$ függvény $y = 3x$ egyenessel párhuzamos érintőjének az egyenletét!
    [ Ha $x = 1$, akkor az érintő egyenlete:$y = 3x - 2$
    Ha $x = 3$, akkor az érintő egyenlete:$y = 3x - 14$]

11. V Írja fel az $f : R^+ \to R, f(x) = 3x + 5\ln x$ függvény $4x - y = 3$ egyenessel párhuzamos érintőjének az egyenletét!
    $[y = 4(x-5) + 15 + 5\ln 5]$

12. V Írja fel az $f : R \to R, f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ függvény $m = 9$ meredekségű érintőjének az egyenletét!
    [ Ha $x = 3$, akkor az érintő egyenlete:$y = 9(x-3) + 1 = 9x - 26$
    Ha $x = -1$, akkor az érintő egyenlete:$y = 9(x+1) - 3 = 9x + 6$]

13. V Írja fel az $f(x) = \dfrac{2x+4}{(x-6)^2} + 7x$ függvény $m = 7$ meredekségű érintőjének az egyenletét!
    $[y = 7(x+10) - \frac{1121}{16} = 7x - \frac{1}{16}]$

14. Határozza meg az alábbi függvények határértékét!

    (a) B $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(6x-6)}{4-4x} =$ $[-\frac{3}{2}]$

    (b) B $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{\mathrm{e}^{x+2} - 1}{3x+6} =$ $[\frac{1}{3}]$

    (c) B $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sin(4-2x)}{\mathrm{e}^{-3x+6} - 1} =$ $[\frac{2}{3}]$

    (d) B $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(4x^2+1)}{\ln(1-x^2)} =$ $[-4]$

(e) B $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\cos(2x+2)-x^2}{3x+3} =$ $[\frac{2}{3}]$

(f) B $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(8x^2)}{3x} =$ $[0]$

(g) B $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\arcsin x}{\sin x} =$ $[2]$

(h) B $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^2+x}{\mathrm{e}^x+x} =$ $[\frac{8}{\infty}=0]$

(i) B $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+3x}{\mathrm{e}^{4x+12}-1} =$ $[-\frac{3}{4}]$

(j) B $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(7x^3)}{15x} =$ $[0]$

(k) B $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\arcsin(3x)} =$ $[0]$

(l) B $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\ln(4x+9)}{x^2-4x-12} =$ $[-\frac{1}{2}]$

(m) B $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(6x+3)}{8x^2-2x+7} =$ $[0]$

(n) B $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\mathrm{e}^{4x-1}}{\sqrt{x+5}} =$ $[\infty]$

(o) B $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sin(x-5)}{\ln(11-2x)} =$ $[-\frac{1}{2}]$

(p) B $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(6x)}{7x} =$ $[\frac{6}{7}]$

(r) B $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(5x+3)}{10-x} =$ $[0]$

(s) B $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{2\mathrm{e}^{-x}-2} =$ $[-1]$

(t) B $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{2x-8} =$ $[\frac{3}{16}]$

15. Határozza meg az alábbi függvények határértékét!

(a) V $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2} =$ $[\frac{1}{2}]$

(b) V $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(5x^2+7)} =$ $[1]$

(c) V $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+8x}-\cos(3x)}{\sin(2x)} =$ $[2]$

(d) V $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\frac{x}{5})-10x-1}{2e^{4x}-2e^{-x}} =$ $[-1]$

(e) V $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{7x+2}-2x}{\cos(2-x)-\frac{x}{2}} =$ $\left[\frac{9}{4}\right]$

16. Adja meg az alábbi függvények $x_0$ pont körüli másodfokú Taylor-polinomját!

(a) B $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5x + 2,\ x_0 = -1$ $\left[T_2(x) = -3(x+1) + 8(x+1)^2\right]$

(b) B $f(x) = \dfrac{2}{x+1},\ x_0 = 0$ $\left[T_2(x) = 2 - 2x + 2x^2\right]$

(c) B $f(x) = \mathrm{e}^{4x} + 2,\ x_0 = 0$ $\left[T_2(x) = 3 + 4x + 8x^2\right]$

(d) B $f(x) = \cos(2x) - 5,\ x_0 = 0$ $\left[T_2(x) = -4 - 2x^2\right]$

(e) B $f(x) = \sqrt{3x+1},\ x_0 = 1$ $\left[T_2(x) = 2 + \frac{3}{4}(x-1) - \frac{9}{64}(x-1)^2\right]$

(f) B $f(x) = x\sin(3x),\ x_0 = 0$
$\left[f'(x) = \sin(3x) + 3x\cos(3x); f''(x) = 6\cos(3x) - 9x\sin(3x); T_2(x) = 3x^2\right]$

17. Adja meg az alábbi függvények $x_0$ pont körüli harmadfokú Taylor-polinomját!

(a) V $f(x) = \dfrac{2x}{(x+1)^2},\ x_0 = 0$ $\left[T_3(x) = 2x - 4x^2 + 6x^3\right]$

(b) V $f(x) = \ln(2-x) - \sin(x-1) + 5,\ x_0 = 1$ $\left[T_3(x) = 5 - 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3\right]$

(c) V $f(x) = (5x+2)\cos(-x),\ x_0 = 0$ $\left[T_3(x) = 2 + 5x - x^2 - \frac{5}{2}x^3\right]$

(d) V $f(x) = x\sqrt{x-2},\ x_0 = 3$ $\left[T_3(x) = 3 + \frac{5}{2}(x-3) + \frac{1}{8}(x-3)^2 + \frac{1}{16}(x-3)^3\right]$

18. Adott a függvény első deriváltjának képlete. Vizsgálja meg a függvényt monotonitás és lokális szélsőértékek szempontjából!

(a) B $f'(x) = x(2-x)^5(x+3)^2,\quad D(f) = R$

Megoldás

$f'(x)$ zérushelyei: $-3; 0; 2$

| $D(f)$ | $]-\infty;-3[$ | $x=-3$ | $]-3;0[$ | $x=0$ | $]0;2[$ | $x=2$ | $]2;\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | mon.csökk. | X | mon.csökk. | lok.min. | mon.nő | lok.max. | mon.csökk. |

(b) B $f'(x) = \dfrac{(2x+8)^5}{(3-x)^8},\quad D(f) = R \setminus \{3\}$

Megoldás

$f'(x)$ zérushelyei: $-4$

| $D(f)$ | $]-\infty;-4[$ | $x=-4$ | $]-4;3[$ | $x=3$ | $]3;\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | nincs ért. | $+$ |
| $f(x)$ | mon. csökk. | lok.min. | mon. nő | nincs ért. | mon. nő |

(c) B $f'(x) = \dfrac{(x-5)^2(3x-6)^3}{x-1}, \quad D(f) = ]1;\infty[$

Megoldás

$f'(x)$ zérushelyei:$2;5$

| $D(f)$ | $]1;2[$ | $x=2$ | $]2;5[$ | $x=5$ | $]5;\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | mon. csökk. | lok.min. | mon. nő | X | mon. nő |

(d) B $f'(x) = \dfrac{(x-3)^3(x+1)^4}{x^2}e^{2x+3}, \quad D(f) = R \setminus \{0\}$

Megoldás

$f'(x)$ zérushelyei:$-1;3$

| $D(f)$ | $]-\infty;-1[$ | $x=-1$ | $]-1;0[$ | $x=0$ | $]0;3[$ | $x=3$ | $]3;\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $-$ | nincs ért. | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | mon. csökk. | X | mon. csökk. | nincs ért. | mon. csökk. | lok.min. | mon. nő |

19. Adott a függvény második deriváltjának képlete. Vizsgálja meg a függvényt konvexitás és inflexiós pontok szempontjából!

(a) B $f''(x) = (x+6)^5(4x-12)^8(x+2), \quad D(f) = R$

Megoldás

$f''(x)$ zérushelyei:$-6;-2;3$

| $D(f)$ | $]-\infty;-6[$ | $x=-6$ | $]-6;-2[$ | $x=-2$ | $]-2;3[$ | $x=3$ | $]3;\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | konvex | infl.pont | konkáv | infl.pont | konvex | X | konvex |

(b) B $f''(x) = (2x+3)^2(7-x)^3e^{-3x}, \quad D(f) = R$

Megoldás

$f''(x)$ zérushelyei:$-\frac{3}{2};7$

| $D(f)$ | $]-\infty;-\frac{3}{2}[$ | $x=-\frac{3}{2}$ | $]-\frac{3}{2};7[$ | $x=7$ | $]7;\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | konvex | X | konvex | infl.pont | konkáv |

(c) B $f''(x) = \dfrac{(10-x)}{(4x+2)^6}, \quad D(f) = R \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

Megoldás

$f''(x)$ zérushelyei:$10$

| $D(f)$ | $]-\infty;-\frac{1}{2}[$ | $x=-\frac{1}{2}$ | $]-\frac{1}{2};10[$ | $x=10$ | $]10;\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | nincs ért. | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | konvex | nincs ért. | konvex | infl.pont | konvex |

20. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken és hol van lokális szélsőértéke az $f(x) = 4xe^{-x^2}$ függvénynek?

Megoldás

$D(f) = R$
$f'(x) = 4e^{-x^2} + 4xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(4 - 8x^2)$
$f'(x)$ zérushelyei: $\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

| $D(f)$ | $]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}[$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $]-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}[$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $]\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | mon. csökk. | lok.min. | mon. nő | lok.max. | mon. csökk. |

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = -1,72$
$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = 1,72$

21. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken és hol van lokális szélsőértéke az $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{(x-1)^2}$ függvénynek? Megoldás
$D(f) = R\backslash\{1\}$
$f'(x) = \frac{-2x(x-1)^2 - (2-x^2)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2x(x-1)-(2-x^2)2}{(x-1)^3} = \frac{2x-4}{(x-1)^3}$
$f'(x)$ zérushelyei:2

| $D(f)$ | $]-\infty; 1[$ | 1 | $]1; 2[$ | 2 | $]2; \infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | nincs ért. | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | mon. nő | nincs ért. | mon. csökk. | lok.min. | mon. nő |

$f(2) = -2$

22. V Hol van értelmezve, hol nő, hol csökken és hol van lokális szélsőértéke az $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ függvénynek?

Megoldás
$D(f) = R$
$f'(x) = \frac{6(x^2+1) - 6x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6-6x^2}{(x^2+1)^2}$
$f'(x)$ zérushelyei:$-1; 1$

| $D(f)$ | $]-\infty; -1[$ | $-1$ | $]-1; 1[$ | 1 | $]1; \infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | mon. csökk. | lok.min. | mon. nő | lok.max. | mon. csökk. |

$f(-1) = -3; f(1) = 3$

23. V Adja meg az $f(x)=\ln(x^2+1)^2$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg monotonitás és lokális szélsőértékek szempontjából a függvényt!

Megoldás
$D(f)=R$
$f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x=\frac{4x}{(x^2+1)}$
$f'(x)$ zérushelyei:0

| $D(f)$ | $]-\infty;0[$ | $0$ | $]0;\infty[$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | mon. csökk. | lok.min. | mon. nő |

$f(0)=0$

24. V Adja meg az $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg monotonitás és lokális szélsőértékek szempontjából a függvényt!

Megoldás
$D(f)=R\setminus\{0\}$
$f'(x)=2x\cdot e^{\frac{1}{x}}+x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2xe^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$
$f'(x)$ zérushelyei:$\frac{1}{2}$

| $D(f)$ | $]-\infty;0[$ | $0$ | $]0;\frac{1}{2}[$ | $x=\frac{1}{2}$ | $]\frac{1}{2};\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | nincs ért. | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | mon. csökk. | nincs ért. | mon. csökk. | lok.min. | mon. nő |

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2$

25. V Adja meg az $f(x)=\ln(-x^2+x+12)$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg monotonitás és lokális szélsőértékek szempontjából a függvényt!

Megoldás
$D(f)=]-3;4[$
$f'(x)=\frac{1}{-x^2+x+12}\cdot(-2x+1)=\frac{-2x+1}{-x^2+x+12}$
$f'(x)$ zérushelyei:$\frac{1}{2}$

| $D(f)$ | $]-3;\frac{1}{2}[$ | $x=\frac{1}{2}$ | $]\frac{1}{2};4[$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | mon.nő | lok.max | mon.csökk. |

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{49}{4}\right)$

26. V Hol van értelmezve, hol konvex, hol konkáv és hol van inflexiós pontja az $f(x)=e^{x^3}$ függvénynek?

Megoldás
$D(f)=R$

$f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2$
$f''(x) = e^{x^3} \cdot 9x^4 + e^{x^3} \cdot 6x = e^{x^3}(9x^4 + 6x)$
$f''(x)$ zérushelyei:0; $\sqrt[3]{-\frac{2}{3}} \approx -0,87$

| $D(f)$ | $]-\infty; \sqrt[3]{-\frac{2}{3}}[$ | $\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$ | $]\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}; 0[$ | $0$ | $]0; \infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | konvex | infl. pont | konkáv | infl. pont | konvex |

$f(0) = 1; f\left(\sqrt[3]{-\frac{2}{3}}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}}$

27. V Hol van értelmezve, hol konvex, hol konkáv és hol van inflexiós pontja az $f(x) = 4x^2 + \dfrac{2}{x}$ függvénynek?

Megoldás
$D(f) = R \setminus \{0\}$
$f'(x) = 8x - \frac{2}{x^2}$
$f''(x) = 8 + \frac{4}{x^3}$
$f''(x)$ zérushelyei: $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \approx -0,79$

| $D(f)$ | $]-\infty; \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}[$ | $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$ | $]\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}; 0]$ | $0$ | $]0; \infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | nincs ért. | $+$ |
| $f(x)$ | konvex | infl. pont | konkáv | nincs ért. | konvex |

$f\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}\right) = 0$

28. V Adja meg az $f(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás és inflexiós pontok szempontjából a függvényt!

Megoldás
$D(f) = R$
$f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-x^2+2x-1)}{e^{2x}} = \frac{-x^2+2x-1}{e^x}$
$f''(x) = \frac{(-2x+2)e^x - (-x^2+2x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-2x+2+x^2-2x+1)}{e^{2x}} \frac{x^2-4x+3}{e^x}$
$f''(x)$ zérushelyei:1; 3

| $D(f)$ | $]-\infty; 1[$ | $1$ | $]1; 3[$ | $3$ | $]3; \infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | konvex | infl. pont | konkáv | infl. pont | konvex |

$f(1) = \frac{2}{\mathrm{e}}; f(3) = \frac{10}{\mathrm{e}^3}$

29. V Adja meg az $f(x) = x^2 + 2x - x\ln x$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás és inflexiós pontok szempontjából a függvényt!

Megoldás
$D(f) = ]0;\infty[$
$f'(x) = 2x + 2 - (\ln x + x\frac{1}{x}) = 2x + 2 - \ln x - 1$
$f''(x) = 2 - \frac{1}{x}$
$f''(x)$ zérushelyei: $\frac{1}{2}$

| $D(f)$ | $]0;\frac{1}{2}[$ | $\frac{1}{2}$ | $]\frac{1}{2};\infty[$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | konkáv | infl. pont | konvex |

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,597$

30. V Adja meg az $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás és inflexiós pontok szempontjából a függvényt!

Megoldás
$D(f) = R$
$f'(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}(2x + 2) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$
$f''(x) = \frac{2(x^2+2x+2)-(2x+2)^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2}$
$f''(x)$ zérushelyei: $-2; 0$

| $D(f)$ | $]-\infty;-2[$ | $-2$ | $]-2;0[$ | 0 | $]0;\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | konkáv | infl. pont | konvex | infl. pont | konkáv |

$f(-2) = \ln 2 = 0,693$; $f(0) = \ln 2$

31. V Hol van értelmezve, hol konvex, hol konkáv és hol van inflexiós pontja az $f(x) = x^2e^{\frac{1}{x}}$ függvénynek?

Megoldás
$D(f) = R \setminus \{0\}$
$f'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} + x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot (-1)\,x^{-2} = 2xe^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$
$f''(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{x}} + (2x-1) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(2 - \frac{2x-1}{x^2}\right)$
Az $f''(x) = 0$, ha $2 - \frac{2x-1}{x^2} = 0$, de ennek az egyenletnek nincs megoldása, így az $f(x)$ függvénynek nincs inflexiós pontja.

| | $]-\infty;0[$ | $x = 0$ | $]0;\infty[$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | nincs ért. | $+$ |
| $f(x)$ | konvex | nincs ért. | konvex |

32. V Adja meg az $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 5x + 6)$ függvény értelmezési tartományát! Vizsgálja meg konvexitás és inflexiós pontok szempontjából a függvényt!

Megoldás
$D(f) = R$
$f'(x) = e^x \cdot (x^2 - 5x + 6) + e^x \cdot (2x - 5) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 1)$
$f''(x) = e^x \cdot (x^2 - 3x + 1) + e^x \cdot (2x - 3) = e^x \cdot (x^2 - x - 2)$
$f''(x)$ zérushelyei:$-1; 2$

| $D(f)$ | $]-\infty; -1[$ | $x = -1$ | $]-1; 2[$ | $x = 2$ | $]2; \infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | konvex | infl.pont | konkáv | infl.pont | konvex |

$f(-1) = \frac{12}{e}; f(2) = 0$

33. V Végezzen teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = x^3 - x^4$ függvényen!

Megoldás

1. $D(f) = R = ]-\infty; \infty[$
2. $f(x)$ zérushelyei:$0; 1$ (a függvény itt metszi az x tengelyt)
   y tengelyt metszi: 0
3. $f(x) \neq f(-x)$ nem páros a függvény
   $-f(x) \neq f(-x)$ nem páratlan a függvény
4. $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - x^4) = -\infty$
   $\lim_{x \to \infty} (x^3 - x^4) = -\infty$
5. $f'(x) = 3x^2 - 4x^3$
   $f'(x)$ zérushelyei:$0; \frac{3}{4}$
6. 

| $D(f)$ | $]-\infty; 0[$ | 0 | $]0; \frac{3}{4}[$ | $\frac{3}{4}$ | $]\frac{3}{4}; \infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | mon.nő | X | mon. nő | lok.max. | mon.csökk. |

   $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{256} \approx 0,1055$
7. $f''(x) = 6x - 12x^2$
   $f''(x)$ zérushelyei:$0; \frac{1}{2}$
8. 

| $D(f)$ | $]-\infty; 0[$ | 0 | $]0; \frac{1}{2}[$ | $\frac{1}{2}$ | $]\frac{1}{2}; \infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | konkáv | infl.pont | konvex | infl.pont | konkáv |

   $f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} \approx 0,0625$
9. 
10. $R(f) = \left]-\infty; \frac{27}{256}\right]$

34. V Végezzen teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$ függvényen!

Megoldás

1. $D(f) = R \setminus \{0\} = ]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$
2. $f(x)$ zérushelyei:$1; -1$ (a függvény itt metszi az x tengelyt)
   Az y tengelyt nem metszi a függvény, mivel nincs értelmezve az $x = 0$ pontban.
3. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}; f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^3} = \frac{x^2-1}{-x^3}; -f(x) = -\frac{x^2-1}{x^3}$
   $f(x) \neq f(-x)$ nem páros a függvény
   $-f(x) = f(-x)$ a függvény páratlan
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3} = 0$
   $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^2-1}{x^3} = \infty$
   $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2-1}{x^3} = -\infty$
   $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3} = 0$
5. $f'(x) = \frac{-x^4+3x^2}{x^6} = \frac{-x^2+3}{x^4}$
   $f'(x)$ zérushelyei:$-\sqrt{3} = -1,73; \sqrt{3} = 1,73$
6. 

| $D(f)$ | $]-\infty; -\sqrt{3}[$ | $-\sqrt{3}$ | $]-\sqrt{3}; 0[$ | 0 | $]0; \sqrt{3}[$ | $\sqrt{3}$ | $]\sqrt{3}; \infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | nincs ért. | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | mon.csökk. | lok.min. | mon. nő | nincs ért. | mon.nő | lok.max. | mon.csökk. |

   $f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{-2}{3\sqrt{3}} \approx -0,38$
   $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0,38$
7. $f''(x) = \frac{2x^5-12x^3}{x^8} = \frac{2x^2-12}{x^5}$
   $f''(x)$ zérushelyei:$-\sqrt{6} = -2,45; \sqrt{6} = 2,45$
8. 

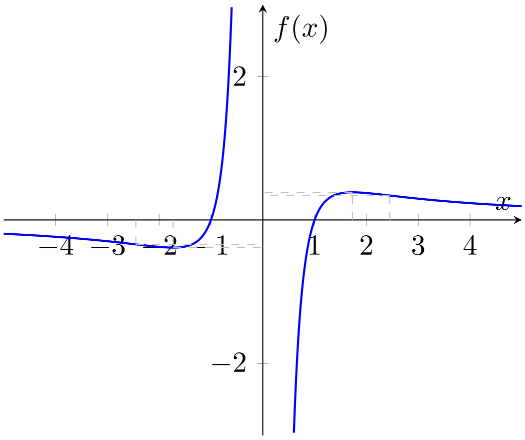
| $D(f)$ | $]-\infty; -\sqrt{6}[$ | $-\sqrt{6}$ | $]-\sqrt{6}; 0[$ | 0 | $]0; \sqrt{6}[$ | $\sqrt{6}$ | $]\sqrt{6}; \infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | nincs ért. | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | konkáv | infl. pont | konvex | nincs ért. | konkáv | infl. pont | konvex |

   $f\left(-\sqrt{6}\right) = \frac{-5}{6\sqrt{6}} \approx -0,34$
   $f\left(\sqrt{6}\right) = \frac{5}{6\sqrt{6}} \approx 0,34$
9. 
10. $R(f) = R$

35. V Végezzen teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ függvényen!

Megoldás

1. $D(f) = R$
2. $f(x)$ zérushelyei:$0$ (a függvény itt metszi az x tengelyt)
   y tengelyt nem metszi:$0$




3. $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4}$; $f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+4}=\frac{x^2}{x^2+4}$; $-f(x)=-\frac{x^2}{x^2+4}$
   $f(x)=f(-x)$ a függvény páros
   $-f(x)\neq f(-x)$ a függvény nem páratlan

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2+4}=1$
   $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+4}=1$

5. $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+4)^2}$
   $f'(x)$ zérushelyei:0

6.

| $D(f)$ | $]-\infty;0[$ | 0 | $]0;\infty[$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | mon.csökk. | lok.min. | mon. nő |

   $f(0)=0$

7. $f''(x)=\frac{8\cdot(x^2+4)^2-8x\cdot2\cdot(x^2+4)\cdot2x}{(x^2+4)^4}=\frac{8(x^2+4)^2-32x^2(x^2+4)}{(x^2+4)^4}=\frac{(x^2+4)(8(x^2+4)-32x^2)}{(x^2+5)^4}=\frac{-24x^2+32}{(x^2+4)^3}$
   $f''(x)$ zérushelyei:$-\frac{2}{\sqrt{3}}=-1,15$; $\frac{2}{\sqrt{3}}=1,15$

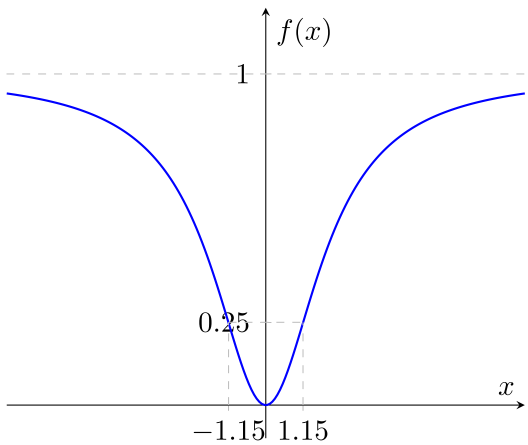
8.

| $D(f)$ | $]-\infty;-\frac{2}{\sqrt{3}}[$ | $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $]-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}[$ | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | $]\frac{2}{\sqrt{3}};\infty[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | konkáv | infl. pont | konvex | infl. pont | konkáv |

   $f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4}=0,25$
   $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{4}=0,25$

9.

10. $R(f)=[0;1[$


f(x)
1
0.25
x
−1.15
1.15