Függvények

2015. július 13.

Határozza meg a következő határértékeket!

1. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(2+7^{-x}-15^{x})=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}(2+7^{-x}-15^{x})=(2+0-\infty)=-\infty$$

2. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}(2+7^{-x}-15^{x})=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to-\infty}(2+7^{-x}-15^{x})=(2+\infty-0)=\infty$$

3. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(2+7^{x}-15^{x})=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0}(2+7^{x}-15^{x})=(2+7^{0}-15^{0})=2+1-1=2$$

4. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}(x^5-4x^7+4)=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^5-4x^7+4)=\lim_{x\to-\infty}x^7\left(\frac{1}{x^2}-4+\frac{4}{x^7}\right)=(-\infty(-4))=\infty$$

5. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(x^5-4x^7+4)=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}(x^5-4x^7+4)=\lim_{x\to\infty}x^7\left(\frac{1}{x^2}-4+\frac{4}{x^7}\right)=(\infty(-4))=-\infty$$

6. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to -1}(x^5 - 4x^7 + 4) =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to -1}(x^5 - 4x^7 + 4) = (-1)^5 - 4(-1)^7 + 4 = 7$$

7. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to 1}(5x^2 - 3x - 2) =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 1}(5x^2 - 3x - 2) = 5\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 2 = 0$$

8. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to -\frac{2}{5}-}\frac{5x^2 - 3x - 2}{15x + 7} =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to -\frac{2}{5}-}\frac{5x^2 - 3x - 2}{15x + 7} = \frac{0}{1} = 0$$

9. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to \frac{3}{2}+}\log_4(8x + 4) =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}+}\log_4(8x + 4) = \log_4 16 = 2$$

10. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos 2x - 2\sin x + 5) =}$$

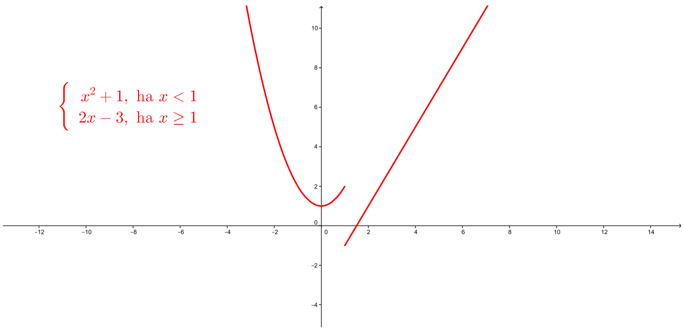
Megoldás:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos 2x - 2\sin x + 5) = \cos 2\frac{\pi}{2} - 2\sin\frac{\pi}{2} + 5 = -1 - 2 + 5 = 2$$

11. **Feladat:** Ábrázolja f függvényt és olvassa le az f jobb- és baloldali határértékét az $x = 1$ pontban! Majd adja meg f határértékét $x = 1$ pontban!

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{ha} x \geq 1 \\ x^2 + 1 & \text{ha} x < 1 \end{cases}$$

Megoldás:



Az ábráról a következő jobb -és baloldali határérték olvasható le:

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = -1$$

Mivel a jobb és baloldali határértékek különbözőek, $x = 1$ pontban f függvénynek nem létezik határértéke.

Megjegyzés: Ábra nélkül a határértékeket behelyettesítéssel is meg tudjuk határozni:

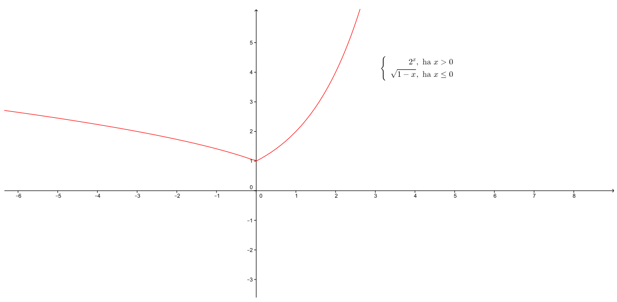
$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (x^2 + 1) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (2x - 3) = 2 - 3 = -1$$

12. **Feladat:** Ábrázolja f függvényt, majd olvassa le az f jobb - és baloldali határértékét az $x = 0$ pontban! Majd adja meg f határértékét $x = 0$ pontban!

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{ha} x \geq 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{ha} x < 0 \end{cases}$$

Megoldás: Ábrázoljuk f-t.



Az ábráról a következő jobb -és baloldali határértékek olvashatóak le:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$$

Mivel a jobb- és baloldali határértékek megegyeznek, f függvénynek létezik határértéke és $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Megjegyzés: Behelyettesítéssel következőképpen járhatunk el:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (\sqrt{1-x}) = \sqrt{1-0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 2^x - = 2^0 = 1$$

13. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to 3+} \frac{4x+1}{6-2x} =}$$

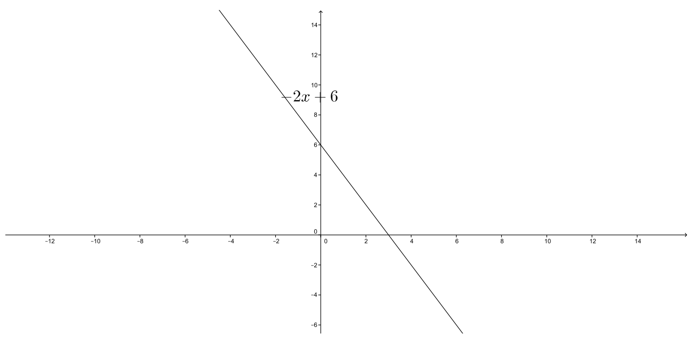
Megoldás: Véges helyen vizsgáljuk a határértéket, helyettesítsünk be 3-t.

$$\lim_{x\to 3+} \frac{4x+1}{6-2x} = \frac{13}{0}$$

Mivel a számláló nem nulla, a nevező 0, további vizsgálatra van szükség. Ha meg tudjuk mondani, hogy a nevező milyen értékeken keresztül tart 0-hoz, akkor felhasználhatjuk, hogy

$$\frac{1}{0} = \begin{cases} \frac{1}{0+} = \infty \\ \frac{1}{0-} = -\infty \\ \frac{1}{0\pm} = \text{divergens} \end{cases}$$

Ábrázoljuk a nevezőben lévő $g(x) = -2x+6$ függvényt. Majd olvassuk



le a nullához közelítés irányát. Az ábrán jól látható, hogy ha 3-nál nagyobb értékeken keresztül közelítünk 3-hoz, akkor a helyettesítési értékek negatív számokon keresztül közelítik meg nullát.

$$\lim_{x\to 3+} \frac{4x+1}{6-2x} = \frac{13}{0} = \frac{13}{0-} = 13\frac{1}{0-} = 21 \cdot (-\infty) = -\infty$$

14. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to 3-} \frac{4x+1}{6-2x} =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 3-} \frac{4x+1}{6-2x} = \frac{13}{0}$$

Az előző feladatnál lévő ábra alapján balról közelítve 3-t, nevezőben a helyettesítési értékek pozitív számokon keresztül közelítik meg a nullát.

$$\lim_{x\to 3-} \frac{4x+1}{6-2x} = \frac{13}{0} = \frac{13}{0+} = 13\frac{1}{0+} = 13 \cdot \infty = \infty$$

15. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to -4-} \frac{1-x}{(x+4)^2} =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to -4-} \frac{1-x}{(x+4)^2} = \frac{5}{0}$$

Mivel a nevezőben egy teljes négyzet szerepel a nullához közelítés csak pozitív számokon keresztül lehet, így a keresett határérték:

$$\lim_{x\to -4-} \frac{1-x}{(x+4)^2} = \frac{5}{0+} = \infty$$

16. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to -4} \frac{1-x}{(x+4)^2} =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to -4} \frac{1-x}{(x+4)^2} = \frac{5}{0}$$

Mivel a nevezőben egy teljes négyzet szerepel a nullához közelítés akár jobbról, akár balról csak pozitív számokon keresztül lehet, így a keresett határérték:

$$\lim_{x\to -4} \frac{1-x}{(x+4)^2} = \frac{5}{0+} = \infty$$

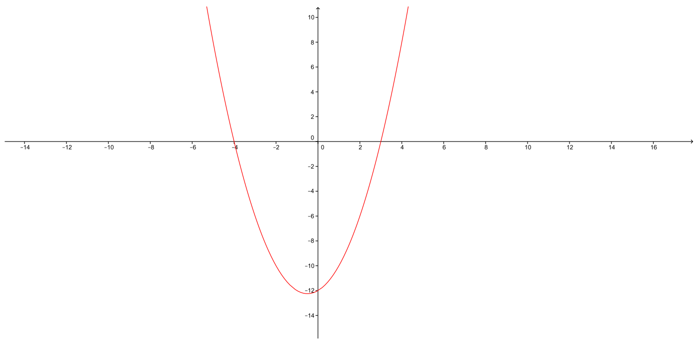
17. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to -4-} \frac{x}{x^2+x-12} =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to -4-} \frac{x}{x^2+x-12} = \frac{-4}{0}$$

Ábrázoljuk a nevezőben szereplő $g(x) = x^2 + x - 12$ hozzárendeléssel adott függvényt, majd olvassuk le a közelítés irányát.



$$\lim_{x\to -4-} \frac{x}{x^2+x-12} = \frac{-4}{0+} = -\infty$$

18. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} \frac{4x+1}{5-x} =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{4x+1}{5-x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{5}{x}-1\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{4+\frac{1}{x}}{\frac{5}{x}-1} = -4$$

19. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3x-5}{4x^2+7x-15} =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+3x-5}{4x^2+7x-15} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(4+\frac{7}{x}-\frac{15}{x^2}\right)} = \lim_{x\to \infty} \frac{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{4+\frac{7}{x}-\frac{15}{x^2}} = \frac{1}{4}$$

20. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+3x-5}{4x^2+7x-15} =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-5}{4x^2+7x-15}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(4+\frac{7}{x}-\frac{15}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{4+\frac{7}{x}-\frac{15}{x^2}}=\frac{1}{4}$$

21. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+5x}{4x^4-x^2+7}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+5x}{4x^4-x^2+7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3(1+\frac{5}{x^2})}{x^4(4-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^4})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{5}{x^2}}{4-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^4}}=0\cdot\frac{1}{4}=0$$

22. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{10}-x}{x-x^3}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{10}-x}{x-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{10}(1-\frac{1}{x^9})}{x^3(\frac{1}{x^2}-1)}=\lim_{x\to-\infty}x^7\cdot\frac{1-\frac{1}{x^9}}{\frac{1}{x^2}-1}=-\infty\cdot(-1)=\infty$$

23. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x+\sqrt{4x^2+3}}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x+\sqrt{4x^2+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(2+\frac{3}{x})}{3x+\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(2+\frac{3}{x})}{x\left(3+\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{2}{3+2}=\frac{2}{5}$$

24. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^3+x^2+13}}{\sqrt{7x^2+3x+4}}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^3+x^2+13}}{\sqrt{7x^2+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3(2+\frac{1}{x}+\frac{13}{x^3})}}{\sqrt{x^2(7+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2})}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{2+\frac{1}{x}+\frac{13}{x^3}}}{x\sqrt{7+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2+\frac{1}{x}+\frac{13}{x^3}}}{\sqrt{7+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{7}}$$

25. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{7x^6+x^4-5x^2-3}}{\sqrt{4x^3+x-11}} =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{7x^6+x^4-5x^2-3}}{\sqrt{4x^3+x-11}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x^6\left(7+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^4}-\frac{3}{x^6}\right)}}{\sqrt{x^3\left(4+\frac{1}{x^2}-\frac{11}{x^3}\right)}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{6}{5}}\cdot\sqrt[5]{7+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^4}-\frac{3}{x^6}}}{x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{4+\frac{1}{x^2}-\frac{11}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{3}{10}} \frac{\sqrt[5]{7+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^4}-\frac{3}{x^6}}}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}-\frac{11}{x^3}}} = 0\cdot\frac{\sqrt[5]{7}}{2} = 0$$

26. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to 5} \frac{7x-x^2-10}{x^2-25} =}$$

Megoldás: Véges helyen vizsgáljuk a határértéket, kezdjük behelyettesítéssel.

$$\lim_{x\to 5} \frac{7x-x^2-10}{x^2-25} = \frac{0}{0} =$$

Ennél a típusnál alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt. Keressük meg a polinomok gyökeit és használjuk a gyöktényezős felírást.

$$7x-x^2-10 = -(x-2)(x-5) \qquad \text{mivel} \qquad x_1 = 5 \qquad x_2 = 2$$

$$x^2-25 = x^2-5^2 = (x-5)(x+5)$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{7x-x^2-10}{x^2-25} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 5} \frac{-(x-2)(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5} \frac{-(x-2)}{(x+5)} = -\frac{3}{10}$$

27. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to 4} \frac{2x^2-7x-4}{x^2-4x} =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 4} \frac{2x^2-7x-4}{x^2-4x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 4} \frac{(2x+1)(x-4)}{x(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{2x+1}{x} = \frac{9}{4}$$

Felhasználva, hogy

$$2x^2-7x-4 = 0 \qquad \text{ha} \qquad x_1 = 4 \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$$

így a gyöktényezős alak:

$$2x^2-7x-4 = 2(x-4)(x+\frac{1}{2}) = (x-4)(2x+1)$$

28. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x^2-x-6}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x^2-x-6}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)x}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x}{x-3}=\frac{2}{5}$$

29. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{6x-9x^2}{x^3+2x}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-9x^2}{x^3+2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{x(6-9x)}{x(x^2+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{6-9x}{x^2+2}=\frac{6}{2}=3$$

30. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot 8^{x+1}-3}{9-2^{3x+4}}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot 8^{x+1}-3}{9-2^{3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot 8\cdot 8^x-3}{9-2^4\cdot 8^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{8^x(16-3\left(\frac{1}{8}\right)^x)}{8^x(9\left(\frac{1}{8}\right)^x-16)}=\lim_{x\to\infty}\frac{16-3\left(\frac{1}{8}\right)^x}{9\left(\frac{1}{8}\right)^x-16}=-1$$

31. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{6^{x-1}-7^{-x}}{3^{2x+2}+4^x}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6^{x-1}-7^{-x}}{3^{2x+2}+4^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6^{-1}\cdot 6^x-7^{-x}}{3^2\cdot 9^x+4^x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6^x(6^{-1}-\frac{1}{7^x\cdot 6^x})}{9^x(3^2+\left(\frac{4}{9}\right)^x)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{9}\right)^x\cdot\frac{6^{-1}-\frac{1}{7^x\cdot 6^x}}{3^2+\left(\frac{4}{9}\right)^x}=0\cdot\frac{6^{-1}}{9}=0$$

32. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+7x+9}-\sqrt{3x^2+9x-5})=}$$

Megoldás: A határérték $\infty-\infty$ típusú, így alkalmazzuk a következő bővítést:

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=(\sqrt{A}-\sqrt{B})\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2+7x+9}-\sqrt{3x^2+9x-5})=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+7x+9}-\sqrt{3x^2+9x-5}\right)\frac{\sqrt{3x^2+7x+9}+\sqrt{3x^2+9x-5}}{\sqrt{3x^2+7x+9}+\sqrt{3x^2+9x-5}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x+9-(3x^2+9x-5)}{\sqrt{3x^2+7x+9}+\sqrt{3x^2+9x-5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+14}{\sqrt{3x^2+7x+9}+\sqrt{3x^2+9x-5}}=$$

Egyszerűsítsünk x-szel:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{14}{n}}{\sqrt{3+\frac{7}{x}+\frac{9}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{9}{x}-\frac{5}{x^2}}}=-\frac{2}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

33. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(\sqrt{8x^2+13}-\sqrt{9x^2+7})=}$$

Megoldás: A határérték $\infty-\infty$ típusú, de x^2 együtthatói nem egyenlőek, így emeljük ki $\sqrt{x^2}=|x|=x$-t:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{8x^2+13}-\sqrt{9x^2+7})=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{8+\frac{13}{x^2}}-\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}\right)=\infty(\sqrt{8}-3)=-\infty$$

34. **Feladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x-10x^3-4}{\sqrt[3]{5x^6+8x-9}+6x}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-10x^3-4}{\sqrt[3]{5x^6+8x-9}+6x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{1}{x^2}-10-\frac{4}{x^3}\right)}{x^2\sqrt[3]{5+\frac{8}{x^5}-\frac{9}{x^6}}+6x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{1}{x^2}-10-\frac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{5+\frac{8}{x^5}-\frac{9}{x^6}}+\frac{6}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}x\frac{\frac{1}{x^2}-10-\frac{4}{x^3}}{\sqrt[3]{5+\frac{8}{x^5}-\frac{9}{x^6}}+\frac{6}{x}}=\infty\cdot\frac{-10}{\sqrt[3]{5}+0}=-\infty$$

35. **Vizsgafeladat:**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[5]{32x^6+x^4+13x}}{\sqrt[3]{8x^4+3x^3+7x+12}}=$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[5]{32x^6+x^4+13x}}{\sqrt[3]{8x^4+3x^3+7x+12}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[5]{x^6\left(32+\frac{1}{x^2}+\frac{13}{x^5}\right)}}{\sqrt[3]{x^4\left(8+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^3}+\frac{12}{x^4}\right)}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{\frac{6}{5}} \sqrt[5]{32+\frac{1}{x^2}+\frac{13}{x^5}}}{x^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{8+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^3}+\frac{12}{x^4}}} = \lim_{x\to-\infty} x^{\frac{-2}{15}} \frac{\sqrt[5]{32+\frac{1}{x^2}+\frac{13}{x^5}}}{\sqrt[3]{8+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^3}+\frac{12}{x^4}}} = 0\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[3]{8}} = 0$$

36. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot 9^{x-2}-4^{2x+1}+5}{10^{-x}+6^{x+2}} =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot 9^{x-2}-4^{2x+1}+5}{10^{-x}+6^{x+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot 9^{-2}\cdot 9^{x}-4\cdot 16^{x}+5}{10^{-x}+6^{2}\cdot 6^{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{16}{6}\right)^{x} \frac{2\cdot 9^{-2}\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^{x}-4+5\left(\frac{1}{16}\right)^{x}}{\frac{1}{10^{x}\cdot 6^{x}}+6^{2}} = \infty\cdot\frac{-4}{36} = -\infty$$

37. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot 8^{x+1}-3^{x-2}+13}{5^{x}-2^{3x+4}} =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot 8^{x+1}-3^{x-2}+13}{5^{x}-2^{3x+4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot 8\cdot 8^{x}-3^{-2}3^{x}+13}{5^{x}-16\cdot 8^{x}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8^{x}\left(16-3^{-2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x}+13\left(\frac{1}{8}\right)^{x}\right)}{8^{x}\left(\left(\frac{5}{8}\right)^{x}-16\right)} = -1$$

38. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x-5}{4x+3}\right)^{7x+10} =}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x-5}{4x+3}\right)^{7x+10} = 1^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4x+3-8}{4x+3}\right)^{7x+10} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{-8}{4x+3}\right)^{4x+3}\right]^{\frac{7x+10}{4x+3}} = \left(e^{-8}\right)^{\frac{7}{4}} = \frac{1}{e^{14}}$$

Felhasználva, hogy

$$\frac{7x+10}{4x+3} = \frac{x(7+\frac{10}{x})}{x(4+\frac{3}{x})} = \frac{7+\frac{10}{x}}{4+\frac{3}{x}} \to \frac{7}{4} \qquad \text{ha} \qquad x\to\infty$$

39. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+14}{5x^2+4}\right)^{10x-3}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+14}{5x^2+4}\right)^{10x-3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+4+10}{5x^2+4}\right)^{10x-3}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{10}{5x^2+4}\right)^{5x^2+4}\right]^{\frac{10x-3}{5x^2+4}}=\left(e^{10}\right)^0=e^0=1$$

Felhasználva, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{10x-3}{5x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{10-\frac{3}{x}}{5+\frac{4}{x^2}}=0\cdot 2=0$$

40. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x+5}{2x+10}\right)^{9x^2+3}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x+5}{2x+10}\right)^{9x^2+3}=\left(\frac{8}{2}\right)^{\infty}=4^{\infty}=\infty$$

41. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-4}{5x^2+11}\right)^{4x+2}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3x^2-4}{5x^2+11}\right)^{4x+2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{\infty}=0$$

42. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to 1-}\frac{3x^2+\sqrt{x}}{\ln^2 x}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 1-}\frac{3x^2+\sqrt{x}}{\ln^2 x}=\frac{4}{0}$$

Négyzetre emelés miatt a nevező csak pozitív irányból közelítheti nullát, így

$$\lim_{x\to 1-}\frac{3x^2+\sqrt{x}}{\ln^2 x}=\frac{4}{0+}=4\cdot\frac{1}{0+}=4(+\infty)=\infty$$

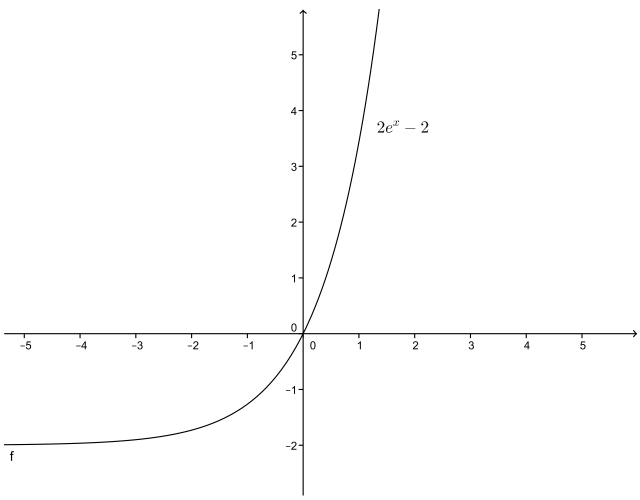
43. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to 0+} \frac{4x+1}{2e^x-2} =}$$

Megoldás: Helyettesítsünk be:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{4x+1}{2e^x-2} = \frac{1}{0}$$

Az osztás nem végezhető el. Ábrázoljuk az $f(x) = 2e^x - 2$ függvényt, majd olvassuk le, hogy milyen értékeken keresztül közelíti meg f a nullát.



$$\lim_{x\to 0+} \frac{4x+1}{2e^x-2} = \frac{1}{0+} = \infty$$

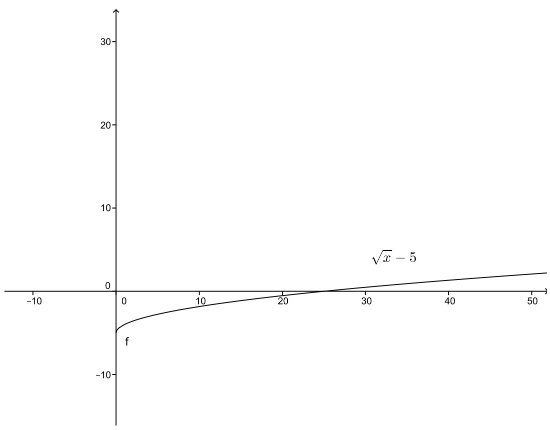
44. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\lim_{x \to 25-} \frac{7+e^x}{\sqrt{x}-5} =}$$

Megoldás: Helyettesítsünk be:

$$\lim_{x \to 25-} \frac{7+e^x}{\sqrt{x}-5} = \frac{7+e^{25}}{0}$$

A művelet nem végezhető el. Ábrázoljuk $g(x) = \sqrt{x} - 5$ függvényt és olvassuk le a nullához való közelítés irányát, majd adjuk meg a határértéket:



$$\lim_{x \to 25-} \frac{7+e^x}{\sqrt{x}-5} = \frac{7+e^{25}}{0-} = -\infty$$

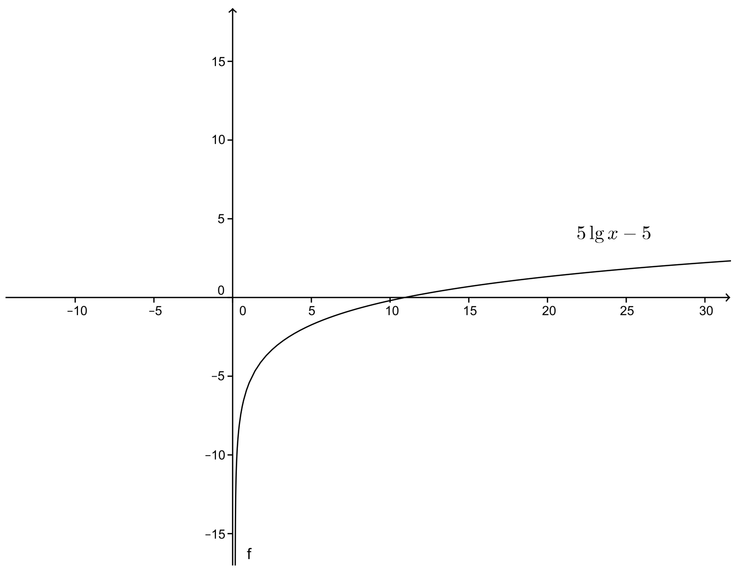
45. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\lim_{x\to 10-}\frac{12}{5\lg x-5}=}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 10+}\frac{x-12}{5\lg x-5}=\frac{-2}{0}$$

Vizsgáljuk meg, hogy a nevező milyen értékeken keresztül tart nullához.



$$\lim_{x\to 10+}\frac{x-12}{5\lg x-5}=\frac{-2}{0+}=-\infty$$