Határozott integrál

2015. június 17.

1. Határozott integrál

Határozza meg a következő határozott integrálok értékét!

1. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-1}^{3}(4x-5)dx=}$$

Megoldás:

$$\int_{-1}^{3}(4x-5)dx=\left[4\frac{x^2}{2}-5x\right]_{-1}^{3}=$$

$$\left[2x^2-5x\right]_{-1}^{3}=2\cdot 3^2-5\cdot 3-(2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1))=-4$$

2. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=}$$

Megoldás:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$$

3. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-6}^{-\frac{1}{2}}\frac{5}{x-3}dx=}$$

Megoldás:

$$\int_{-6}^{-2}\frac{5}{x-3}dx=[5\ln|x-3|]_{-6}^{-2}=$$

$$5\ln|-2-3|-5\ln|-6-3|=5(\ln 5-\ln 9)=5\ln\frac{5}{9}$$

4. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-1}^{\ln 5} e^{-4x} dx =}$$

Megoldás:

$$\int_0^5 e^{-4x} dx = \left[\frac{e^{-4x}}{-4} \right]_0^5 = \frac{e^{-4 \cdot 5}}{-4} - \frac{e^0}{-4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4e^{20}}$$

5. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-10}^{-1} \frac{7x^3 - 2x - 15}{x^2} dx =}$$

Megoldás:

$$\int_{-10}^{-1} \frac{7x^3 - 2x - 15}{x^2} dx = \int_{-10}^{-1} \left(7x - 2\frac{1}{x} - 15\frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$\int_{-10}^{-1} \left(7x - 2\frac{1}{x} - 15x^{-2} \right) dx = \left[7\frac{x^2}{2} - 2 \ln |x| + 15\frac{1}{x} \right]_{-10}^{-1} =$$

$$= 7\frac{1}{2} - 2 \ln 1 - 15 - (7\frac{100}{2} - 2 \ln 10 - \frac{15}{10}) = -360 + 2 \ln 10 \approx -355,39$$

6. **Feladat:**

$$\boxed{\int_1^{16} (3x^2 + \sqrt{x})(5x - 2\sqrt[3]{x^2}) dx =}$$

Megoldás:

$$\int_1^{16} (3x^2 + \sqrt{x})(5x - 2\sqrt[3]{x^2}) dx = \int_1^{16} (15x^3 + 5x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{8}{3}} - 2x^{\frac{7}{6}}) dx =$$

$$= \left[15\frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x^5} - \frac{18}{11}\sqrt[3]{x^{11}} - \frac{12}{13}\sqrt[6]{x^{13}} \right]_1^{16} =$$

$$15\frac{16^4}{4} + 2\sqrt{16^5} - \frac{18}{11}\sqrt[3]{16^{11}} - \frac{12}{13}\sqrt[6]{16^{13}} - \left(15\frac{1}{4} + 2 \cdot 1 - \frac{18}{11} \cdot 1 - \frac{12}{13} \cdot 1 \right) =$$

7. **Feladat:**

$$\boxed{\int_1^{10} \frac{x^2 \sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt{x}} dx =}$$

Megoldás:

$$\int_1^{10} \frac{x^2 \sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{10} \frac{\sqrt[4]{x^8 \cdot x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{10} \frac{\sqrt[4]{x^9\sqrt[5]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{10} \frac{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^{45} \cdot x}}}{\sqrt{x}} dx =$$

$$\int_1^{10} \frac{\sqrt[20]{x^{46}}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{10} \frac{x^{\frac{46}{20}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \int_1^{10} x^{\frac{23}{10}-\frac{1}{2}} = \int_1^{10} x^{\frac{18}{10}} = \int_1^{10} x^{\frac{9}{5}} =$$

$$\left[\frac{x^{\frac{14}{5}}}{\frac{14}{5}}\right]_1^{10} = \left[\frac{5}{14}\sqrt[5]{x^{14}}\right]_1^{10} = \frac{5}{14}\sqrt[5]{10^{14}} - \frac{5}{14}$$

8. **Feladat:**

$$\boxed{\int_2^8 \frac{x^4-2}{10x-x^5} dx =}$$

Megoldás: Törtfüggvény esetén nézzük meg, hogy a számlálóban egy konstanssal való szorzással kialakítható-e a nevező deriváltja:

$$(10x-x^5)' = 10-5x^4 = 5(2-x^4) = -5(x^4-2)$$

Tehát, ha -5-tel bővítünk, a számlálóban lesz a nevező deriváltja:

$$\int_2^8 \frac{x^4-2}{10x-x^5} dx = -\frac{1}{5}\int_2^8 \frac{-5(x^4-2)}{10x-x^5} dx = -\frac{1}{5}\left[\ln|10x-x^5|\right]_2^8 =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\ln|80-8^5| - \ln 12\right) = -\frac{1}{5}\ln\frac{8^5-80}{12}$$

9. **Feladat:**

$$\boxed{\int_0^1 \frac{(4x+13)^5}{9} dx =}$$

Megoldás:

$$\int_0^1 \frac{(4x+13)^5}{9} dx = \frac{1}{9}\int_0^1 (4x+13)^5 dx = \frac{1}{9}\left[\frac{(4x+13)^6}{6\cdot 4}\right]_0^1 = \frac{1}{216}\left(17^6-13^6\right)$$

10. **Feladat:**

$$\boxed{\int_0^\pi \cos\left(\frac{2x}{5}\right) dx =}$$

Megoldás:

$$\int_0^\pi \cos\left(\frac{2x}{5}\right) dx = \left[\frac{\sin\left(\frac{2x}{5}\right)}{\frac{2}{5}}\right]_0^\pi = \frac{5}{2}\left[\sin\left(\frac{2x}{5}\right)\right]_0^\pi = \frac{5}{2}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 0\right) = \frac{5}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

11. **Feladat:**

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{20}} \frac{\sin 5x}{\cos 5x} dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_0^{\frac{\pi}{20}} \frac{\sin 5x}{\cos 5x} dx = \dots = -\frac{1}{5}\left[\ln|\cos 5x|\right]_0^{\frac{\pi}{20}} = -\frac{1}{5}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{5}\cdot 0 = -\frac{1}{5}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

12. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-2}^{0} \frac{12}{(x+3)^5} dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{-2}^{0} \frac{12}{(x+3)^5} dx = \cdots = \left[-\frac{3}{(x+3)^4}\right]_{-2}^{0} = -\frac{1}{3^3} + 3 = \frac{80}{27}$$

13. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-3}^{3} \frac{6x}{\sqrt{x^2+8}} dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{-3}^{3} \frac{6x}{\sqrt{x^2+8}} dx = \cdots = \left[6\sqrt{x^2+8}\right]_{-3}^{3} = 6 \cdot \sqrt{17} - 6 \cdot \sqrt{17} = 0$$

14. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{1}^{e^3} \frac{\ln^5 x}{x} dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{1}^{e^3} \frac{\ln^5 x}{x} dx = \cdots = \frac{1}{6}\left[\ln^6(x)\right]_1^{e^3} = \frac{1}{6}(3^6 - 0) = \frac{3^6}{6}$$

15. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{0}^{\ln 12} (3+2e^x)^2 \, dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{0}^{\ln 12} (3+2e^x)^2 \, dx = \cdots = \left[9x + 12e^x + 2e^{2x}\right]_0^{\ln 12} =$$

$$= 9\ln 12 + 12e^{\ln 12} + 2e^{2\ln 12} - (0 + 12e^0 + 2e^0) = 9\ln 12 + 12^2 + 2 \cdot 144 - 14 = 9\ln 12 + 418$$

16. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{1}^{5} \frac{x^2 - e^{-3x}}{x^3 + e^{-3x}} dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{1}^{5} \frac{x^2 - e^{-3x}}{x^3 + e^{-3x}} dx = \cdots = \left[\frac{1}{3}\ln\left|x^3 + e^{-3x}\right|\right]_1^5 = \frac{1}{3}\ln\frac{5^3 + e^{-15}}{1 + e^{-3}}$$

17. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-2}^{1} \frac{36x}{3x^2-15}dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{-2}^{1} \frac{36x}{3x^2-15}dx = \cdots = \left[6\ln|3x^2-15|\right]_{-2}^{1} = 6\ln 12 - 6\ln 3 = 6\ln 4$$

18. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{0}^{2} \frac{15}{8x+13}dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{0}^{2} \frac{15}{8x+13}dx = \cdots = \left[\frac{15}{8}\ln|8x+13|\right]_{0}^{2} = \frac{15}{8}\ln\frac{29}{13}$$

19. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-7}^{0} \frac{10}{\sqrt{4-3x}}dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{-7}^{0} \frac{10}{\sqrt{4-3x}}dx = \cdots = \left[-\frac{20}{3}\sqrt{4-3x}\right]_{-7}^{0} = -\frac{40}{3} + \frac{100}{3} = 20$$

20. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-1}^{0} x^2 \cdot \sqrt[4]{1+x^3}dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{-1}^{0} x^2 \cdot \sqrt[4]{1+x^3}dx = \cdots = \frac{1}{3}\left[\frac{4}{5}\sqrt[4]{(1+x^3)^5}\right]_{-1}^{0} = \frac{4}{15}$$

21. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{0}^{1} \frac{e^x}{(e^x-4)^2}dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{0}^{1} \frac{e^x}{(e^x-4)^2}dx = \cdots = \left[-\frac{1}{e^x-4}\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{e-4} - \frac{1}{3}$$

22. **Feladat:**

$$\boxed{\int_e^{e^4} \frac{(\ln x + 6)^4}{x} dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_e^{e^4} \frac{(\ln x + 6)^4}{x} dx = \dots = \left[\frac{(\ln x + 6)^5}{5} \right]_e^{e^4} = \frac{10^5}{5} - \frac{7^5}{5}$$

23. **Feladat:** Határozza meg az alábbi szakaszosan definiált függvény határozott integrálját a $[-2; 3]$ intervallumon!

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & \text{ha} \quad x \geq 1 \\ -2x+1 & \text{ha} \quad x < 1 \end{cases}$$

Megoldás:

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{1} (-2x+1)dx + \int_{1}^{3} \sqrt{x+3}dx =$$

$$= \left[-x^2 + x\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x+3)^3} \right]_1^3 = 4\sqrt{6} + \frac{2}{3}$$

24. **Feladat:** Határozza meg az alábbi szakaszosan definiált függvény határozott integrálját a $[-10; 2]$ intervallumon!

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leq -1 \\ \frac{x+1}{5} & \text{ha} \quad x > -1 \end{cases}$$

Megoldás:

$$\int_{-10}^{2} f(x)dx = \int_{-10}^{-1} 0\, dx + \int_{-1}^{2} \frac{x+1}{5} dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{5} \left[\frac{(x+1)^2}{2} \right]_{-1}^{2} = \frac{1}{5} \left(\frac{9}{2} - 0 \right) = \frac{9}{10}$$

25. **Feladat:** Határozza meg az alábbi szakaszosan definiált függvény határozott integrálját a $[-5; 10]$ intervallumon!

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x < 3 \\ \frac{1}{4} & \text{ha} \quad 3 < x < 7 \\ 0 & \text{ha} \quad x > 7 \end{cases}$$

Megoldás:

$$\int_{-5}^{10} f(x)dx = \int_{-5}^{3} 0\, dx + \int_{3}^{7} \frac{1}{4} dx + \int_{7}^{10} 0\, dx =$$

$$= 0 + \left[\frac{1}{4} x \right]_3^7 + 0 = 1$$

26. **Feladat:** Határozza meg az alábbi szakaszosan definiált függvény határozott integrálját a $[-2; 3]$ intervallumon!

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leq 0 \\ 3e^{-7x} & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

Megoldás:

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} 3e^{-7x}dx = 3\left[\frac{e^{-7x}}{-7}\right]_0^3 = 3\left(-\frac{e^{-21}}{7} + \frac{1}{7}\right)$$

27. **Feladat:** Határozza meg az alábbi szakaszosan definiált függvény határozott integrálját a $[-4; 1]$ intervallumon!

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{3}{2} & \text{ha} \quad x \leq -2 \\ 5 & \text{ha} \quad x > -2 \end{cases}$$

Végeredmény:

$$\int_{-4}^{1} f(x)dx = \cdots = \frac{47}{3} + 15 = \frac{92}{3}$$

28. **Feladat:** Határozza meg az alábbi szakaszosan definiált függvény határozott integrálját a $[2; 10]$ intervallumon!

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leq 0 \\ 4e^{-0.02x} & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

Végeredmény:

$$\int_{2}^{10} f(x)dx = \cdots = \left[4\frac{e^{-0.02x}}{-0.02}\right]_2^{10} \approx 28{,}412$$

29. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\int_0^\pi 6x\cos\left(-\frac{x}{3}\right)dx =}$$

Végeredmény: Alkalmazzunk parciális integrálást:

$$f'(x) = \cos\left(-\frac{x}{3}\right) \qquad f(x) = \frac{\sin\left(-\frac{x}{3}\right)}{-\frac{1}{3}} = -3\sin\left(-\frac{x}{3}\right)$$

$$g(x) = 6x \qquad g'(x) = 6$$

$$\int_0^\pi 6x\cos\left(-\frac{x}{3}\right)dx = \left[-18x\sin\left(-\frac{x}{3}\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -18\sin\left(-\frac{x}{3}\right) =$$

$$= \left[-18x\sin\left(-\frac{x}{3}\right)\right]_0^\pi + 18\left[3\cos\left(-\frac{x}{3}\right)\right]_0^\pi = 9\pi\sqrt{3} - 27$$

30. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\int_1^e 5x^2 \ln 3x dx =}$$

Végeredmény: Alkalmazzunk parciális integrálást:

$$f'(x) = 5x^2 \qquad f(x) = \frac{5x^3}{3}$$

$$g(x) = \ln 3x \qquad g'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$$

$$\int_1^e 5x^2 \ln 3x dx = \left[\frac{5x^3}{3} \ln 3x\right]_1^e - \int_1^e \frac{5x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left[\frac{5x^3}{3} \ln 3x\right]_1^e - \int_1^e \frac{5}{3} x^2 dx = \left[\frac{5x^3}{3} \ln 3x\right]_1^e - \left[\frac{5}{3} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_1^e =$$

$$= \left[\frac{5x^3}{3} \ln 3x - \frac{5}{9} x^3\right]_1^e \approx 57,819$$

31. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\int_{-1}^1 x^2 \sin x dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{-1}^1 x^2 \sin x dx = \cdots = [-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x]_{-1}^1 = 0$$

32. **Vizsgafeladat:** Végezze el a kijelölt műveleteket!

$$\boxed{\int_1^5 x^4 \ln^2 4x dx =}$$

Megoldás:

$$\int_1^5 x^4 \ln^2 4x dx =$$

Alkalmazzunk parciális integrálást:

$$f'(x) = x^4 \qquad f(x) = \frac{x^5}{5}$$

$$g(x) = \ln^2 4x \qquad g'(x) = 2 \ln 4x \frac{1}{4x} \cdot 4 = 2 \ln 4x \frac{1}{x}$$

$$\int_1^5 x^4 \ln^2 4x dx = \left[\frac{x^5}{5}\ln^2 4x\right]_1^5 - \int_1^5 2\ln 4x \frac{1}{x}\frac{x^5}{5}dx =$$

$$\left[\frac{x^5}{5}\ln^2 4x\right]_1^5 - \int_1^5 2\ln 4x \frac{x^4}{5}dx = \left[\frac{x^5}{5}\ln^2 4x\right]_1^5 - \frac{2}{5}\int_1^5 x^4 \ln 4x dx =$$

$$f'(x) = x^4 \qquad f(x) = \frac{x^5}{5}$$

$$g(x) = \ln 4x \qquad g'(x) = \frac{1}{4x}\cdot 4 = \frac{1}{x}$$

$$\left[\frac{x^5}{5}\ln^2 4x\right]_1^5 - \frac{2}{5}\left(\left[\frac{x^5}{5}\ln 4x\right]_1^5 - \int_1^5 \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x}dx\right) =$$

$$\left[\frac{x^5}{5}\ln^2 4x\right]_1^5 - \frac{2}{5}\left[\frac{x^5}{5}\ln 4x\right]_1^5 + \frac{2}{5}\int_1^5 \frac{x^4}{5}dx =$$

$$\left[\frac{x^5}{5}\ln^2 4x\right]_1^5 - \frac{2}{5}\left[\frac{x^5}{5}\ln 4x\right]_1^5 + \frac{2}{25}\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^5 = \cdots$$

33. **Vizsgafeladat:** Végezze el a kijelölt műveleteket!

$$\boxed{\int_0^3 \frac{x}{3}5^{3-x}dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_0^3 \frac{x}{3}5^{3-x}dx = \cdots = \left[-\frac{x}{3\ln 5}5^{3-x} - \frac{1}{3\ln^2 5}5^{3-x}\right]_0^3 = \cdots = 15,336$$

34. **Vizsgafeladat:** Végezze el a kijelölt műveleteket!

$$\boxed{\int_1^9 (x^4+7x^2)\ln x dx =}$$

Végeredmény:

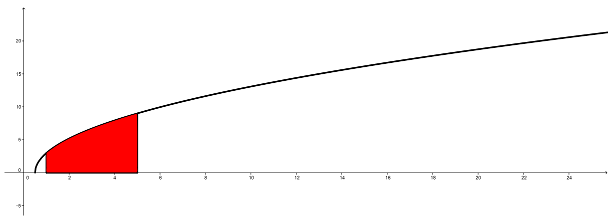
$$\int_1^9 (x^4+7x^2)\ln x dx = \cdots = \left[\left(\frac{x^5}{5}+7\frac{x^3}{3}\right)\ln x - \frac{x^5}{25} - 7\frac{x^3}{9}\right]_1^9 = \cdots$$

2. Területszámítás határozott integrállal

35. **Feladat:** Határozza meg az alábbi függvény és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát az adott intervallumon!

$$\boxed{f(x) = 3\sqrt{2x-1} \qquad [1;5]}$$

Megoldás: Függvénytranszformációval készítsünk ábrát a keresett területről.



Leolvasható, hogy függvény görbéje az adott intervallumon az x tengely felett van. Így a görbe alatti területhez egyszerűen integráljuk f-t a $[1;5]$ intervallumon.

$$T = \int_1^5 3\sqrt{2x+1}dx = 3\int_1^5 (2x+1)^{\frac{1}{2}}dx =$$

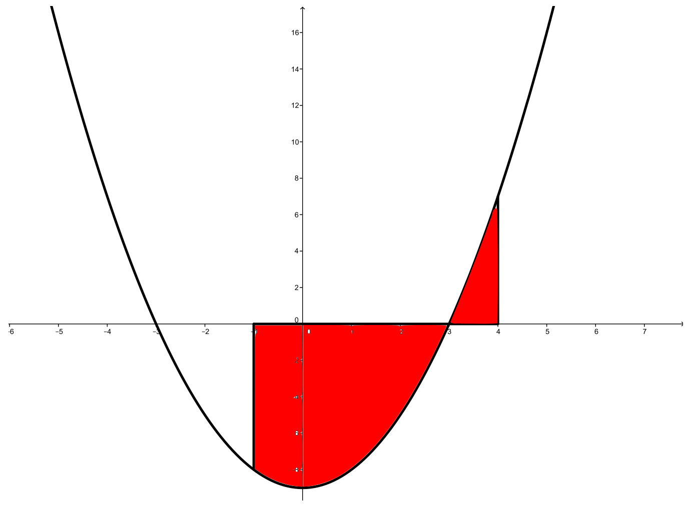
$$3\left[\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot 2}\right]_1^5 = \left[\sqrt{(2x+1)^3}\right]_1^5 = \cdots$$

Megjegyzés: Az ábra nélkül is elvégezhetjük a számolást, hiszen tudjuk, hogy négyzetgyök csak nemnegatív értékeket vehet fel, így területszámításhoz egyszerűen ki kell integrálni f-t az adott intervallumon.

36. **Feladat:** Határozza meg az alábbi függvény és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát az adott intervallumon!

$$\boxed{f(x) = x^2 - 9 \qquad [-1;4]}$$

Megoldás: Függvénytranszformációval készítsünk ábrát a keresett területről.



Az f függvény felvesz pozitív és negatív értékeket az adott intervallumon. Az $x^2-9=0$ egyenletet megoldva megkapjuk f és az x tengely metszéspontjait.

$$x^2-9=0 \qquad \rightarrow \qquad x_{1;2}=\pm 3$$

A két metszéspont közül $x=3$ pont esik a megadott intervallumba. Így a keresett terület:

$$T=\left|\int_{-1}^{3}(x^2-9)dx\right|+\int_{3}^{4}(x^2-9)dx=$$

$$T=\left|\left[\frac{x^3}{3}-9x\right]_{-1}^{3}\right|+\left[\frac{x^3}{3}-9x\right]_{3}^{4}\approx$$

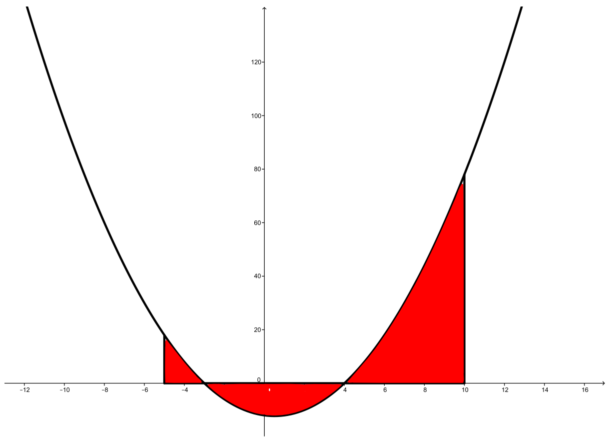
$$|-26,667|+3,333=30$$

37. **Feladat:** Határozza meg az alábbi függvény és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát az adott intervallumon!

$$\boxed{f(x)=x^2-x-12 \qquad [-5;10]}$$

Megoldás: Készítsünk ábrát a keresett területről. Ha ismerjük a polinom metszéspontjait, a parabola gyorsan felrajzolható.

$$x^2-x-12=0 \qquad \rightarrow \qquad x_1=-3 \qquad x_2=4$$



Az f függvény görbéje az adott intervallumon belül két pontban is metszi az x- tengelyt. A metszéspontok $m_1 = -3$ és $m_2 = 4$. Az ábrán jól látható, hogy f a $]-3;4[$ intervallumon negatív értékeket vesz fel. Így a terület:

$$T = \int_{-5}^{-3} (x^2 - x - 12)dx + \left| \int_{-3}^{4} (x^2 - x - 12)dx \right| + \int_{4}^{10} (x^2 - x - 12)dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} - 12x \right]_{-5}^{-3} + \left| \left[\frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} - 12x \right]_{-3}^{4} \right| + \left[\frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} - 12x \right]_{4}^{10} = \cdots$$

38. **Vizsgafeladat:** Határozza meg az alábbi függvény és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát az adott intervallumon!

$$\boxed{f(x) = x^3 \cdot \sqrt{1 + 5x^4} \qquad [0;1]}$$

Megoldás: Mivel f nem elemi függvény vagy annak egy transzformáltja, ábrát készíteni bonyolult lenne. Ha meg tudnánk mondani, hogy f milyen előjelű értékeket vesz fel az adott intervallumon, akkor tudunk területet számolni. Vegyük észre, hogy az adott intervallumon a helyettesítési értékek nemnegatívok. Így a görbe alatti területhez egyszerűen integráljuk f-t a $[0;1]$ intervallumon.

$$T = \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{1 + 5x^4} dx =$$

$$\frac{1}{20} \int_0^1 20x^3 \cdot (1 + 225x^4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{60} \left[\sqrt{(1 + 225x^4)^3} \right]_0^1 = \cdots$$

39. **Vizsgafeladat:** Határozza meg az alábbi függvény és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát az adott intervallumon!

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{5 + 3x^2} \qquad [-2;7]}$$

Megoldás: Ha észreveszzük, hogy a tört nevezője bármely x esetén pozitív, ezért a tört értékének előjelét a számláló, azaz x határozza meg. Így $[-2;0]$ intervallumon $f(x) \leq 0$, $[0;7]$ intervallumon $f(x) \geq 0$ Tehát az integrálást most két részre kell bontani:

$$T = \left| \int_{-2}^{0} \frac{x}{5+3x^2} dx \right| + \int_{0}^{7} \frac{x}{5+3x^2} dx =$$

$$= \left| \frac{1}{6} \int_{-2}^{0} \frac{6x}{5+3x^2} dx \right| + \frac{1}{6} \int_{0}^{7} \frac{6x}{5+3x^2} dx =$$

$$= \left| \frac{1}{6} \left[\ln |5+3x^2| \right]_{-2}^{0} \right| + \frac{1}{6} \left[\ln |5+3x^2| \right]_{0}^{7} =$$

$$\left| \frac{1}{6} (\ln 5 - \ln 17) \right| + \frac{1}{6} (\ln 152 - \ln 5) = \frac{1}{6} \ln \frac{152}{17}$$

40. **Vizsgafeladat:** Határozza meg az alábbi függvény és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát az adott intervallumon!

$$\boxed{f(x) = (2x+3)^2 e^{2x} \qquad [-10, 0]}$$

Megoldás: Az ábra készítése most is felesleges, hiszen jól látható, hogy f helyettesítési értéke mindig nemnegatív. Így a terület:

$$T = \int_{-10}^{0} (2x+3)^2 e^{2x} dx =$$

Parciális integrálással:

$$f'(x) = e^{2x} \qquad f(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$g(x) = (2x+3)^2 \qquad g'(x) = 2(2x+3)2 = 4(2x+3)$$

$$\int_{-10}^{0} (2x+3)^2 e^{2x} dx = \left[(2x+3)^2 \frac{e^{2x}}{2} \right]_{-10}^{0} - \int_{-10}^{0} 4(2x+3) \frac{e^{2x}}{2} dx =$$

$$\left[(2x+3)^2 \frac{e^{2x}}{2} \right]_{-10}^{0} - \int_{-10}^{0} 2(2x+3) e^{2x} dx =$$

Újra parciális integrálással:

$$f'(x) = e^{2x} \qquad f(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$g(x) = 2(2x+3) \qquad g'(x) = 4$$

$$\left[(2x+3)^2\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-10}^{0} - \left(\left[(2x+3)e^{2x}\right]_{-10}^{0} - \int_{-10}^{0} 4\frac{e^{2x}}{2}dx\right) =$$

$$\left[(2x+3)^2\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-10}^{0} - \left[(2x+3)e^{2x}\right]_{-10}^{0} + \left[2\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-10}^{0} = 2,5$$

41. **Feladat:**Határozza meg az alábbi függvény és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát az adott intervallumon! Ábrázolja a keresett területet!

$$\boxed{f(x) = x^2 + 2x - 35 \qquad [0;4]}$$

Végeredmény:

$$T = \left|\int_0^4 \left(x^2 + 2x - 35\right) dx\right| = \left|-\frac{308}{3}\right| = \frac{308}{3} \approx 102,67$$

42. **Feladat:**Határozza meg az alábbi függvény és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát az adott intervallumon!

$$\boxed{f(x) = (5x-2)e^{-3x} \qquad [-10;0]}$$

Végeredmény:

$$T = \left|\int_{-10}^{0} (5x-2)e^{-3x}dx\right| = \frac{1}{9}(151e^{30} - 1)$$

43. **Feladat:**Határozza meg az alábbi függvény és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát az adott intervallumon!

$$\boxed{f(x) = \frac{9}{(2-x)^2} \qquad [-1,1]}$$

Végeredmény: $T = \int_{-1}^{1} \frac{9}{(2-x)^2}dx = 6$

44. **Feladat:** Határozza meg az alábbi függvény és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát az adott intervallumon!

$$\boxed{f(x) = \sqrt{19+18x} \qquad \left[-\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right]}$$

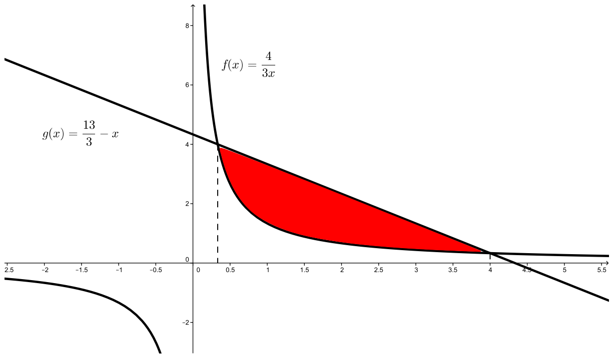
Végeredmény:

$$T = \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{19+18x}dx = \frac{61}{27}$$

45. **Vizsgafeladat:** Határozza meg az alábbi függvények által közbezárt terület mérőszámát!

$$\boxed{f(x) = \frac{4}{3x} \qquad \text{és} \qquad g(x) = \frac{13}{3} - x}$$

Megoldás: Készítsünk ábrát a keresett területről.



Határozzuk meg a két görbe metszéspontját:

$$\frac{4}{3x} = \frac{13}{3} - x \qquad \to \qquad 4 = 13x - 3x^2$$

$$3x^2 - 13x + 4 = 0 \qquad \to \qquad x_{1;2} = \frac{13 \pm 11}{6}$$

A metszéspontok: $x_1 = \frac{1}{3} = m_1$ és $x_2 = 4 = m_2$.

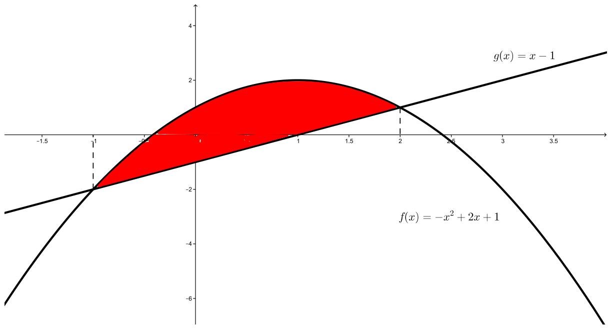
$$T = \left| \int_{m_1}^{m_2} (f(x) - g(x))dx \right| = \left| \int_{\frac{1}{3}}^{4} \left(\frac{4}{3x} - \frac{13}{3} + x \right) dx \right| =$$

$$\left| \left[\frac{4}{3} \ln x - \frac{13}{3} x + \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{3}}^{4} \right| = | - 4,6312| = 4,6312$$

46. **Vizsgafeladat:** Határozza meg az alábbi függvények által közbezárt terület mérőszámát!

$$\boxed{f(x) = -x^2 + 2x + 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = x - 1}$$

Megoldás: Készítsünk ábrát a keresett területről.



Határozzuk meg a két görbe metszéspontját:

$$-x^2 + 2x + 1 = x - 1 \qquad \rightarrow \qquad -x^2 + x + 2 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

A metszéspontok: $x_1 = -1 = m_1$ és $x_2 = 2 = m_2$.

$$T = \left| \int_{m_1 1}^{m_2} (f(x) - g(x)) dx \right| = \left| \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + 2x + 1 - (x - 1) \right) dx \right| =$$

$$\int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2) dx = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{2} \right| = 4,5$$

47. **Vizsgafeladat:** Határozza meg az alábbi függvények által közbezárt terület mérőszámát!

$$\boxed{f(x) = \ln x \qquad \text{és} \qquad g(x) = \ln^2 x}$$

Megoldás: Keressük meg a két görbe metszéspontját.

$$\ln x = \ln^2 x \qquad \rightarrow \qquad \ln^2 x - \ln x = 0$$

Emeljük ki $\ln x$-t:

$$\ln x(\ln x - 1) = 0$$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így ha

$$\ln x = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = 1$$

Ha a második tényező nulla:

$$\ln x = 1 \qquad \rightarrow \qquad x = e$$

A metszéspontok:

$$m_1 = 1 \qquad \rightarrow \qquad m_2 = e$$

A keresett terület mérőszáma:

$$T = \left| \int_1^e (\ln x - \ln^2 x) dx \right| =$$

Kétszer parciálisan integrálva kapjuk a következőt:

$$= \left| \left[x(\ln x - \ln^2 x) - x + 2x \ln x - 2x \right]_1^e \right| = 3 - e$$

48. **Vizsgafeladat:** Határozza meg az alábbi függvények által közbezárt terület mérőszámát!

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{x+2} - 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$$

Végeredmény: $T = \int_{-1}^{4} (\frac{3}{x+2} + 0,5x - 2,5) dx \approx |-3,37472| = 3,37472$

49. **Vizsgafeladat:** Határozza meg az alábbi függvények által közbezárt terület mérőszámát!

$$\boxed{f(x) = 3x^2 + 6x - 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = x^2 + x - 3}$$

Végeredmény:

$$T = \left| \int_{-2}^{-0,5} \left(2x^2 + 5x + 2 \right) dx \right| \approx |-1,125| = 1,125$$

50. **Vizsgafeladat:** Határozza meg az alábbi függvények által közbezárt terület mérőszámát!

$$\boxed{f(x) = -x^2 + 2 \qquad \text{és} \qquad g(x) = 3x - 8}$$

Végeredmény:

$$T = \left| \int_{-5}^{2} \left(-x^2 - 3x + 10 \right) dx \right| = \frac{343}{6} \approx 57,167$$

51. **Vizsgafeladat:** Határozza meg az alábbi függvények által közbezárt terület mérőszámát!

$$\boxed{f(x) = x^2 + 10 \qquad \text{és} \qquad g(x) = 20 - x^2}$$

Végeredmény:

$$T = \left| \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(2x^2 - 10 \right) dx \right| \approx |-29,814| = 29,814$$