Improprius integrálás

2015. február 19.

1. **Feladat:**

$$\boxed{\int_2^\infty \frac{4}{x^3}dx =}$$

Megoldás: Egy improprius integrált kell meghatározni, mivel a felső integrálási határ ∞.

Definíció: Ha az $f(x)$ függvény integrálható az $[a,\infty[$ intervallum bármely $[a,b]$ részintervallumán, akkor $\int_a^\infty f(x)dx$ improprius integrál pontosan akkor létezik, ha

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

határérték létezik (véges), akkor

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Ha a határérték nem véges, akkor az improprius integrál nem létezik (divergens).

Most az integrandus folytonos, alkalmazhatjuk a definíciót:

$$\int_2^\infty \frac{4}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{4}{x^3}dx =$$

Szükségünk van egy primitív függvényre. Azért hogy a megoldás jobban átlátható legyen, végezzük el külön a határozatlan integrál keresését, majd térjünk vissza az improprius integrál meghatározásához.

$$\int \frac{4}{x^3}dx = 4\int x^{-3}dx = 4\frac{x^{-2}}{-2} + c = -2\frac{1}{x^2} + c$$

Folytassuk az improprius integrálást:

$$\int_2^\infty \frac{4}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{4}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-2\frac{1}{x^2}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty}\left[-2\frac{1}{b^2} + \frac{2}{4}\right] =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[-2\frac{1}{b^2}\right] + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad b\to\infty \quad \Rightarrow \quad b^2\to\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b^2}\to 0$$

Tehát a határérték létezik (véges), az improprius integrál is létezik és

$$\int_2^\infty \frac{4}{x^3}dx = \frac{1}{2}$$

2. **Feladat:**

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx =}$$

Megoldás: Az adott intervallumon folytonos függvény improprius integrálját kell meghatározni, ha létezik.

Tehát

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-\frac{3}{2}} dx =$$

Szükségünk van a határozatlan integrálra.

$$\int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -2\frac{1}{\sqrt{x}} + c$$

Folytassuk az improprius integrál meghatározását.

$$= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{b}} + \frac{2}{\sqrt{1}}\right] =$$

$$\lim_{b\to\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{b}}\right] + 2 = 0 + 2 = 2$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad b \to \infty \quad \Rightarrow \quad \sqrt{b} \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{b}} \to 0$$

Tehát

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = 2$$

3. **Feladat:**

$$\boxed{\int_8^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}} dx =}$$

Megoldás: Az adott intervallumon folytonos függvény improprius integrálját keressük, ha létezik.

$$\int_8^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_8^{b} \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_8^{b} (x+4)^{-\frac{1}{3}} dx =$$

Külön végezzük el a határozatlan integrál számítását.

$$\int (x+4)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{(x+4)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+4)^2} + c$$

Folytassuk az improprius integrálást:

$$= \lim_{b\to\infty} \int_8^{b} (x+4)^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+4)^2}\right]_8^b =$$

$$\lim_{b\to\infty} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(b+4)^2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{12^2}\right] = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(b+4)^2}\right] + 3\sqrt[3]{36} = \infty$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad b \to \infty \quad \Rightarrow \quad (b+4)^2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{(b+4)^2} \to \infty$$

Mivel a határérték nem egy véges valós szám, hanem ∞, ezért az improprius integrál nem létezik (divergens).

4. **Feladat:**

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-3x}dx =}$$

Megoldás: Az integrandus folytonos az adott intervallumon, így:

$$\int_0^{\infty} e^{-3x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-3x}dx =$$

Felhasználva, hogy:

$$\int e^{-3x}dx = \frac{e^{-3x}}{-3} + c$$

folytassuk az integrálást:

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-3b}}{-3} - \frac{e^0}{-3}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-3b}}{-3}\right] + \frac{1}{3} =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-3e^{3b}}\right] + \frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Felhasználva, mivel:

$$\lim_{b\to\infty}\left[-3e^{3b}\right] = \infty$$

akkor

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-3e^{3b}}\right] = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

Tehát

$$\int_0^{\infty} e^{-3x}dx = \frac{1}{3}$$

5. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx =}$$

Megoldás: Most az alsó integrációs határ $-\infty$.

DefinícióHa az $f(x)$ függvény integrálható az $]-\infty, a]$ intervallum bármely $[a; b]$ részintervallumán, akkor $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ improprius integrál pontosan akkor létezik, ha

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

határérték létezik (véges) és ekkor

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Ha a határérték nem véges, akkor az improprius integrál nem létezik (divergens).

Tehát

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx =$$

A határozatlan integrál:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = \int (2-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{(2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot(-1)} + c = -2\sqrt{2-x} + c$$

Folytassuk az improprius integrálást.

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx = \lim_{a\to-\infty} \left[-2\sqrt{2-x}\right]_a^1 =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[-2\sqrt{2-1} + 2\sqrt{2-a}\right] = -2 + \lim_{a\to-\infty} \left[2\sqrt{2-a}\right] = \infty$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad a \to\ -\infty \quad \Rightarrow \quad 2-a \to \infty \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2-a} \to \infty$$

Mivel a határérték nem egy véges valós szám, hanem ∞, ezért az improprius integrál nem létezik (divergens).

6. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-1} \frac{3x}{(1+x^2)^4}dx =}$$

Megoldás: A definíció alapján:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{3x}{(1+x^2)^4}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-1} \frac{3x}{(1+x^2)^4}dx =$$

Állítsuk elő a határozatlan igtegrált:

$$\int \frac{3x}{(1+x^2)^4}dx = \int 3x(1+x^2)^{-4}dx = \frac{3}{2}\int 2x(1+x^2)^{-4}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{(1+x^2)^{-3}}{-3} + c = \frac{(1+x^2)^{-3}}{-2} + c = \frac{-1}{2(1+x^2)^3} + c$$

Folytassuk az improprius integrálást:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{3x}{(1+x^2)^4}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-1} \frac{3x}{(1+x^2)^4}dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{-1}{2(1+x^2)^3}\right]_a^{-1} =$$

$$\lim_{a\to-\infty} \left[\frac{-1}{2(1+(-1)^2)^3} + \frac{1}{2(1+a^2)^3}\right] = -\frac{1}{16} + 0 = -\frac{1}{16}$$

Felhasználva, hogy:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2(1+x^2)^3} = \frac{1}{\infty} = 0$$

7. **Feladat:**

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{6}{\sqrt[7]{x^{10}}}dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_1^{\infty} \frac{6}{\sqrt[7]{x^{10}}}dx = 14$$

8. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-6} \frac{6}{7x+11} dx =}$$

Végeredmény: Az improprius integrál nem létezik.

9. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} \frac{9}{(x+4)^2} dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{9}{(x+4)^2} dx = \frac{9}{4}$$

10. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-4} \frac{8}{(3x+9)^5} dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{-\infty}^{-4} \frac{8}{(3x+9)^5} dx = -\frac{2}{243}$$

11. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{1}^{\infty} e^{1-5x} dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{1}^{\infty} e^{1-5x} dx = \frac{1}{5e^4}$$

12. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0} e^{4x-3} dx =}$$

Végeredmény:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{4x-3} dx = \frac{1}{4e^3}$$

13. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{1}^{\infty} \frac{6}{\sqrt[5]{(x+2)^3}} dx =}$$

Végeredmény: Az improprius integrál nem létezik.

14. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x}{3}} dx =}$$

Megoldás: Most az egyik integrációs határ sem véges. Ilyen esetben a feladatot visszavezetjük az előző esetekre. Ha f függvény integrálható bármely részintervallumon és c egy tetszőleges valós szám, valamint

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \qquad \text{és} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

improprius integrálok külön-külön léteznek, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

Először keressünk primitív függvényt.

Alkalmazzuk az alábbi integrálási szabályt:

$$\int f(ax+b) = \frac{F(ax+b)}{a} + c \quad \text{ahol} \quad F(x)' = f(x)$$

Ebben az esetben: $\quad ax+b = \frac{1}{3}x \quad$ és $\quad a = \frac{1}{3}$

$$\int e^{\frac{x}{3}} dx = \frac{e^{\frac{x}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3e^{\frac{x}{3}} + C$$

Térjünk vissza az improprius integrál meghatározására. A definícióban szereplő c bármilyen valós szám lehet. Legyen most $c = 3$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x}{3}} dx = \int_{-\infty}^{3} e^{\frac{x}{3}} dx + \int_{3}^{\infty} e^{\frac{x}{3}} dx =$$

Határozzuk meg külön-külön az improprius integrálokat.

$$\int_{-\infty}^{3} e^{\frac{x}{3}} dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{3} e^{\frac{x}{3}} dx = \lim_{a\to-\infty} \left[3e^{\frac{x}{3}}\right]_a^3 =$$

$$\lim_{a\to-\infty} \left[3e^{\frac{3}{3}} - 3e^{\frac{a}{3}}\right] = 3e - \lim_{a\to-\infty} \left[3e^{\frac{a}{3}}\right] = 3e - 0 = 3e$$

Felhasználva, hogy:

$$\text{ha} \quad a \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{3} \to -\infty \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{a}{3}} \to 0$$

$$\int_{3}^{\infty} 3e^{\frac{x}{3}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_{3}^{b} 3e^{\frac{x}{3}} dx = \lim_{b\to\infty} \left[3e^{\frac{x}{3}}\right]_3^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[3e^{\frac{b}{3}} - 3e^{\frac{3}{3}}\right] = \lim_{b\to\infty} \left[3e^{\frac{b}{3}}\right] - 3e = \infty$$

Felhasználva:

$$\text{ha} \quad a \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{3} \to \infty \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{a}{3}} \to \infty$$

Mivel a vizsgált improprius integrálok közül az egyik nem létezik, ezért $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x}{3}} dx$ sem létezik (divergens).

Megjegyzés: A feladat kicsit egyszerűbben is megoldható, ha felhasználjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= F(c) - \lim_{a\to-\infty} F(a) + \lim_{b\to\infty} F(b) - F(c) =$$

$$= \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

feltéve, hogy a két határérték külön-külön létezik.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{x}{3}} dx = \lim_{a\to-\infty;b\to\infty} \left[3e^{\frac{x}{3}}\right]_a^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty;b\to\infty} \left[3e^{\frac{b}{3}} - 3e^{\frac{a}{3}}\right] = \lim_{b\to\infty} 3e^{\frac{b}{3}} - \lim_{a\to-\infty} 3e^{\frac{a}{3}} = \infty - 0$$

Az egyik határérték nem véges, így a keresett impropius integrál nem létezik.

15. **Vizsgafeladat:** Határozza meg $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ impropius integrált, ha

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{(x+1)^2} & \text{ha} \quad x > 0 \end{cases}$$

Megoldás: Az integrandus most egy szakaszosan definiált függvény.Alkalmozhatjuk a tanult definíciót.

Most legyen $c = 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2}dx =$$

$$= 0 + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{(x+1)^2}dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{b+1} + 1\right] = 1$$

Felhasználva, hogy :

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \int (x+1)^{-2}dx = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x+1} + c$$

Mivel a határérték véges, az impropius integrál létezik és értéke 1.

16. **Vizsgafeladat:** Határozza meg $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ impropius integrált, ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{4} & \text{ha} \quad 2 < x < 10 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Megoldás:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{10} f(x)dx + \int_{10}^{\infty} f(x)dx =$$

$$\int_{-\infty}^{2} 0\,dx + \int_2^{10} \frac{x+5}{4}dx + \int_{10}^{\infty} 0\,dx = 0 + \left[\frac{(x+5)^2}{2\cdot 1}\right]_2^{10} + 0 = \frac{1}{2}(105^2 - 7^2)$$

17. **Vizsgafeladat:** Határozza meg $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ impropius integrált, ha

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leq -1 \\ e^{2-2x} & \text{ha} \quad x > -1 \end{cases}$$

Megoldás:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{\infty} e^{2-2x}dx =$$

$$= 0 + \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{2-2x}}{-2}\right]_{-1}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{2-2b}}{2} + \frac{1}{2}\right] = -0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

18. **Vizsgafeladat:** $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx =$

Megoldás: Egy folytonos függvény improprius integrálját keressük, mivel a felső integrálási határ ∞.

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int -2x\,e^{x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

A primitív függvény segítségével határozzuk meg az improprius integrált.

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-b^2} + \frac{1}{2}e^{0}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{b^2}}\right] + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad b\to\infty \quad \text{akkor} \quad b^2\to\infty \quad \text{és} \quad \frac{1}{e^{b^2}}\to 0$$

19. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}dx =}$$

Megoldás: A felső integrációs határ ∞, egy improprius integrált keresünk.

Először adjuk meg határozatlan integrált.

Felhasználva, hogy:

$$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

ezért, ha $f(x) = \ln x$, akkor $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, tehát

$$\int \frac{1}{x\ln^3 x}dx = \int \ln^{-3} x\frac{1}{x}dx = \frac{\ln^{-2} x}{-2} + c = -\frac{1}{2\ln^2 x} + c$$

Az improprius integrál:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b} \frac{1}{x\ln^3 x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2\ln^2 x}\right]_2^{b} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2\ln^2 b} + \frac{1}{2\ln^2 2}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2\ln^2 b}\right] + \frac{1}{2\ln^2 2} =$$

$$= 0 + \frac{1}{2\ln^2 2} = \frac{1}{2\ln^2 2}$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad b\to\infty \quad \Rightarrow \quad \ln^2 b\to\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\ln^2 b}\to 0$$

20. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx =}$$

Megoldás: Az alsó integrációs határ $-\infty$, egy improprius integrált keresünk. A primitív függvény meghatározásával kezdjük.

$$\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}dx = \frac{1}{3}\ln|1+e^{3x}| + c$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{3}\ln|1+e^{3x}|\right]_a^0 =$$

$$\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{3}\ln|1+e^{0}| - \frac{1}{3}\ln|1+e^{3a}|\right] = \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\ln 1 = \frac{1}{3}\ln 2$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad a\to-\infty \quad \Rightarrow \quad e^{3a}\to 0 \quad \Rightarrow \quad 1+e^{3a}\to 1$$

Tehát

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx = \frac{1}{3}\ln 2$$

21. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-2} \frac{x}{\sqrt[5]{(1-x^2)^6}}dx =}$$

Megoldás: Alkalmazzuk a definíciót:

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{x}{\sqrt[5]{(1-x^2)^6}}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-2} \frac{x}{\sqrt[5]{(1-x^2)^6}}dx =$$

A primitív függvény keresésénél alkalmazzuk az alábbi integrálási szabályt:

$$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c \qquad \text{ha} \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{x}{\sqrt[5]{(1-x^2)^6}}dx = \int x(1-x^2)^{-\frac{6}{5}}dx =$$

Most $f(x) = 1-x^2$ és $f'(x) = -2x$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{6}{5}}(-2x)dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{5}}}{-\frac{1}{5}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^2}} + c$$

Találtunk primitív függvényt, vizsgáljuk meg az improprius integrált.

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{x}{\sqrt[5]{(1-x^2)^6}}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{-2} \frac{x}{\sqrt[5]{(1-x^2)^6}}dx =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{1-x^2}}\right]_a^{-2} = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{1-(-2)^2}} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{1-a^2}}\right] =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{-3}}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{1-a^2}}\right] = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{3}}-0=-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$$

Tehát

$$\int_{-\infty}^{-2}\frac{x}{\sqrt[5]{(1-x^2)^6}}dx = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$$

22. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\int_{3}^{\infty}\frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx =}$$

Megoldás: Alkalmazzuk a definíciót:

$$\int_{3}^{\infty}\frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx =$$

Következő lépés a primitív függvény előállítása:

$$\int\frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx = \int(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}2x\,dx =$$

$$= \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+c = 3\sqrt[3]{x^2-1}+c$$

Folytassuk az improprius integrál kiszámolását:

$$\int_{3}^{\infty}\frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[3\sqrt[3]{x^2-1}\right]_3^b = \lim_{b\to\infty}\left[3\sqrt[3]{b^2-1}-3\sqrt[3]{3^2-1}\right] =$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[3\sqrt[3]{b^2-1}-3\sqrt[3]{8}\right] = \infty-6=\infty$$

felhasználva:

$$\text{ha}\quad b\to\infty \quad\Rightarrow\quad b^2-1\to\infty \quad\Rightarrow\quad 3\sqrt[3]{b^2-1}\to\infty$$

23. **Feladat:**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+3x^2}dx =}$$

Megoldás:

Először végezzük el a primitív függvény keresését. Az integrandus egy valódi racionális tört. Vegyük észre, hogy a számlálóban bővítéssel kialakítható a nevező deriváltja. Mivel $(1+3x^2)'=6x$, bővítsünk 6-tal.

$$\int\frac{x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\int\frac{6x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\ln|1+3x^2|+C$$

Mivel $1+3x^2>0$, ezért az abszolútértéket a továbbiakban elhagyhatjuk.

Használjuk fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx =$$

ahol c egy tetszőleges valós szám, legyen most $c = 0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+3x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+3x^2}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+3x^2}dx =$$

Határozzuk meg külön-külön az improprius integrálokat.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+3x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{x}{1+3x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{6}\ln(1+3x^2)\right]_a^0 =$$

$$\lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{6}\ln 1 - \frac{1}{6}\ln(1+3a^2)\right] = 0 - \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{6}\ln(1+3a^2)\right] = -\infty$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad a \to -\infty \quad \Rightarrow \quad 1+3a^2 \to \infty \quad \Rightarrow \quad \ln(1+3a^2) \to \infty$$

Mivel már az első határérték nem véges ezért $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+3x^2}dx$ improprius integrál nem létezik (divergens).

2. megoldás:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+3x^2}dx = \lim_{a\to-\infty;b\to\infty} \int_{a}^{b} \frac{x}{1+3x^2}dx = \lim_{a\to-\infty;b\to\infty} \left[\frac{1}{6}\ln(1+3x^2)\right]_a^b =$$

$$\lim_{a\to-\infty;b\to\infty} \left[\frac{1}{6}\ln(1+3b^2) - \frac{1}{6}\ln(1+3a^2)\right] =$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{6}\ln(1+3b^2) - \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{6}\ln(1+3a^2) = \infty - \infty$$

Mivel a határértékek külön-külön nem végesek, az improprius integrál nem létezik.

24. **Vizsgafeladat:**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+3}{(10+6x+x^2)^5}dx =}$$

Megoldás: Az alsó integrációs határ $-\infty$, egy improprius integrált keresünk.
Először adjunk primitív függvényt. Vegyük észre, hogy $(10+6x+x^2)' = 2(x+2)$
Alakítsuk az integrandust $f(g(x))g'(x)$ alakúra.

$$\int \frac{x+3}{(10+6x+x^2)^5}dx = \frac{1}{2}\int 2(x+3)(10+6x+x^2)^{-5}dx =$$

Most már használhatjuk az $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$ integrálási szabályt:

$$= \frac{1}{2}\frac{(10+6x+x^2)^{-4}}{-4} = \frac{1}{-8} \cdot \frac{1}{(10+6x+x^2)^4}$$

Az improprius integrál:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+3}{(10+6x+x^2)^5} dx = \lim_{a\to-\infty;b\to\infty} \left[\frac{1}{-8} \cdot \frac{1}{(10+6x+x^2)^4}\right]_a^b =$$

$$= -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(10+6b+b^2)^4} + \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(10+6a+a^2)^4} =$$
$$= -0 + 0 = 0$$

felhasználva:

$$\text{ha} \quad a \to -\infty \quad \Rightarrow \quad (10+6a+a^2)^4 \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(10+6a+a^2)^4} \to 0$$

Mindkét határérték véges, az improprius integrál létezik és értéke 0.

25. **Vizsgafeladat:**

$$\int_0^{\infty} 2x^4 e^{-x^5} dx = \cdots = \frac{2}{5}$$

26. **Vizsgafeladat:**

$$\int_{-\infty}^{3} 6x5^{x^2} dx = \cdots = \frac{3}{\ln 5}$$

27. **Vizsgafeladat:**

$$\int_{e^2}^{\infty} \frac{8}{x \ln^6 x} dx = \cdots = \frac{1}{20}$$

28. **Vizsgafeladat:**

$$\int_{e^4}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln^3 x}} dx = \cdots = 1$$

29. **Vizsgafeladat:**

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx = \cdots = \frac{1}{2}\ln 2$$

30. **Vizsgafeladat:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5e^x}{(1+e^x)^4} dx = \cdots = \frac{1}{3}$$

31. **Vizsgafeladat:** Határozza meg $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ értékét, ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{8} & \text{ha} \quad 0 < x < 2 \\ 0 & \text{ha} \quad \text{különben} \end{cases}$$

Végeredmény:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 \frac{3x^2}{8} dx = \left[\frac{x^3}{8}\right]_0^2 = 1$$

32. **Vizsgafeladat:** Határozza meg $\int_2^{\infty} f(x)dx$ értékét, ha

$$f(x) = \begin{cases} 0,1e^{-0,1x} & \text{ha} \quad 0 < x \\ 0 & \text{ha} \quad \text{különben} \end{cases}$$

Végeredmény:

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty} 0,1e^{-0,1x}dx = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-0,1x}\right]_2^b = e^{-0,2}$$

33. **Vizsgafeladat:** Határozza meg $\int_{-\infty}^{4} f(x)dx$ értékét, ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{ha} \quad 1 < x < 7 \\ 0 & \text{ha} \quad \text{különben} \end{cases}$$

Végeredmény:

$$\int_{-\infty}^{4} f(x)dx = \int_1^4 \frac{1}{6}dx = \left[\frac{1}{6}x\right]_1^4 = 0,5$$