Mátrixok

2015. június 18.

1. **Feladat:** Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $\mathbf{2A}$, $-\mathbf{3B}$, $\mathbf{2A}-\mathbf{3B}$,$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ és $(\mathbf{B}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}}$ mátrixokat.

Megoldás: A definíciók alapján

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+3 & 0+0 & -3+1 \\ 2+4 & 1+1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-3 & 0-0 & -3-1 \\ 2-4 & 1-1 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{2A} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot(-3) \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{3B} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -3 \\ -12 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{2A}-\mathbf{3B} = \mathbf{2A}+(-\mathbf{3B}) = \begin{pmatrix} 2-9 & 0+0 & -6-3 \\ 4-12 & 2-3 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -9 \\ -8 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{B}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Feladat:** Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$, $\mathbf{5A}+\mathbf{B}-\mathbf{7C}$, $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}-\mathbf{4B}-\mathbf{6C}^{\mathbf{T}}$, mátrixokat.

Megoldás:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3+2-1 & -2+1+5 \\ 7+0-1 & 0+0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{5A}+\mathbf{B}-\mathbf{7C} = \begin{pmatrix} 15+2+7 & -10+1-35 \\ 35+0+7 & 0+0+56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -44 \\ 42 & 56 \end{pmatrix}$$

Mivel

$$\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C^T} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

ezért

$$\mathbf{A^T} - \mathbf{4B} - \mathbf{6C^T} = \begin{pmatrix} 3-8+6 & 7-4+6 \\ -2-0-30 & 0-0+48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -32 & 48 \end{pmatrix}$$

3. **Vizsgafeladat:** Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

   Határozzuk meg $\mathbf{3}((\mathbf{2A}-\mathbf{B})-(\mathbf{A}-\mathbf{3B}))$ mátrixot.

   Megoldás:

$$\mathbf{3}\left((\mathbf{2A}-\mathbf{B})-(\mathbf{A}-\mathbf{3B})\right) = \mathbf{3}(\mathbf{2A}-\mathbf{B}-\mathbf{A}+\mathbf{3B}) = \mathbf{3A}+\mathbf{6B} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -12 & 0 \\ 0 & 15 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 42 & 18 \\ 12 & 0 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 30 & 18 \\ 12 & 15 & -27 \end{pmatrix}$$

4. **Feladat:** Határozzuk meg $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $(\mathbf{AB})\mathbf{A}$, $\mathbf{A}(\mathbf{BA})$ és $\mathbf{A^2}$ mátrixokat, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Megoldás: Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ 2×2-es mátrixok, a sorok és oszlopok száma azonos, a szorzások elvégezhetőek.

		2	1
		0	0
3	-2	**6**	**3**
7	0	**14**	**7**

tehát $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$

		3	-2
		7	0
2	1	**13**	**-4**
0	0	**0**	**0**

tehát $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vegyük észre, hogy $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, azaz a mátrixok szorzása nem kommutatív.

		3	-2
		7	0
6	3	**39**	**-12**
14	7	**91**	**-28**

tehát $(\mathbf{AB})\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 39 & -12 \\ 91 & -28 \end{pmatrix}$

		13	-4
		0	0
3	-2	**39**	**-12**
7	0	**91**	**-28**

tehát $\mathbf{A}(\mathbf{BA}) = \begin{pmatrix} 39 & -12 \\ 91 & -28 \end{pmatrix}$

Vegyük észre, hogy $\mathbf{ABA} = \mathbf{A}(\mathbf{BA}) = (\mathbf{AB})\mathbf{A}$, azaz teljesül a mátrixok szorzásra vonatkozó asszociatív tulajdonság.

		3	-2
		7	0
3	-2	**-5**	**-6**
7	0	**21**	**-14**

tehát $\mathbf{A^2} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 21 & -14 \end{pmatrix}$

5. **Feladat:** Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg azt az $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre $\mathbf{2A} + \mathbf{X} = \mathbf{5B}$ teljesül.

Megoldás: Az egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{X} = \mathbf{5B} - \mathbf{2A} = \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 35 & -10 \\ 45 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 8 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 35 & -18 \\ 39 & 1 \end{pmatrix}$$

6. **Feladat:** Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Határozzuk meg $\mathbf{AB} + \mathbf{C}$, $\mathbf{AB} + \mathbf{B}$, $\mathbf{CB} + \mathbf{A}$ és $\mathbf{BC} + \mathbf{A^T}$ mátrixokat.

Megoldás: A mátrixok különböző típusúak, ezért első lépésben mindig meg kell nézni, hogy vajon a kijelölt művelet elvégezhető-e?

$\mathbf{AB} + \mathbf{C}$ vizsgálata:

$$\underset{(2\times\mathbf{3})}{\mathbf{A}} \; \underset{(\mathbf{3}\times 2)}{\mathbf{B}} = \underset{(2\times 2)}{\mathbf{AB}}$$

Mivel $\mathbf{A}$ mátrix oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}$ mátrix sorainak számával, azaz a belső indexek azonosak, a szorzás elvégezhető, a külső indexek pedig meghatározzák a szorzatmátrix típusát.

Valamint

$$\underset{(2\times 2)}{\mathbf{AB}} + \underset{(2\times 2)}{\mathbf{C}} = \underset{(2\times 2)}{\mathbf{AB} + \mathbf{C}}$$

azaz $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok azonos típusúak, ezért $\mathbf{AB} + \mathbf{C}$ művelet elvégezhető.

Készítsük el $\mathbf{AB}$ szorzáshoz a táblázatot.

			9	0
			8	6
			7	9
1	2	3	**46**	**39**
4	5	6	**118**	**84**

tehát $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 46 & 39 \\ 118 & 84 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{AB}+\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 46 & 39 \\ 118 & 84 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 47 & 38 \\ 118 & 85 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{AB}+\mathbf{B}$ vizsgálata:

Mivel

$$\underset{(2\times 2)}{\mathbf{AB}} + \underset{(3\times 2)}{\mathbf{B}}$$

A két mátrix típusa különböző, az összeadás nem végezhető el.

$(\mathbf{BA})^{\mathbf{2}}$ vizsgálata:

$$\underset{(3\times \mathbf{2})}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(\mathbf{2}\times 3)}{\mathbf{A}} = \underset{(3\times 3)}{\mathbf{BA}}$$

A belső indexek azonosak, **BA** szorzat létezik. A művelet eredménye egy négyzetes mátrix, így $(\mathbf{BA})^{\mathbf{2}}$ művelet is elvégezhető.

		1 4	2 5	3 6
9	0	**9**	**18**	**27**
8	6	**32**	**46**	**60**
7	9	**43**	**59**	**75**

$$\text{tehát } \mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 32 & 46 & 60 \\ 43 & 59 & 75 \end{pmatrix}$$

			9 32 43	18 46 59	27 60 75
9	18	27	**1818**	**2583**	**3348**
32	46	60	**4340**	**6232**	**8124**
43	59	75	**5500**	**7913**	**10326**

$$\text{tehát } (\mathbf{BA})^{\mathbf{2}}=\begin{pmatrix} 1818 & 2583 & 3348 \\ 4340 & 6232 & 8124 \\ 5500 & 7913 & 10326 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{CB}+\mathbf{A}$ vizsgálata:

Mivel

$$\underset{(2\times \mathbf{2})}{\mathbf{C}} \cdot \underset{(\mathbf{3}\times 2)}{\mathbf{B}}$$

a belső indexek nem egyeznek meg, a művelet nem végezhető el.

$\mathbf{BC}+\mathbf{A^T}$ vizsgálata:

Mivel

$$\underset{(3\times \mathbf{2})}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(\mathbf{2}\times 2)}{\mathbf{C}} = \underset{(3\times 2)}{\mathbf{BC}}$$

és

$$\underset{(3\times 2)}{\mathbf{BC}} + \underset{(3\times 2)}{\mathbf{A^T}} = \underset{(3\times 2)}{\mathbf{BC}+\mathbf{A^T}}$$

a művelet elvégezhető.

Számolás:

		1	-1
		0	1
9	0	**9**	**-9**
8	6	**8**	**-2**
7	9	**7**	**2**

tehát $\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 8 & -2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

Az eredmény:

$$\mathbf{BC} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 8 & -2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 10 & 3 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

7. **Feladat:** Határozzuk meg $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, és $\mathbf{CA}$ szorzatokat,ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás: Először nézzük meg a szorzások elvégezhetőek-e.

Mivel

$$\begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ (3 \times \mathbf{1}) & (\mathbf{1} \times 3) \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{AB} \\ (3 \times 3) \end{matrix}$$

a belső indexek azonosak a szorzás elvégezhető.

	1	1	3
4	**4**	**4**	**12**
0	**0**	**0**	**0**
-1	**-1**	**-1**	**-3**

tehát $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Mivel

$$\begin{matrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \\ (1 \times \mathbf{3}) & (\mathbf{3} \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{BA} \\ (1 \times 1) \end{matrix}$$

a belső indexek azonosak, a szorzás elvégezhető.

			4
			0
			-1
1	1	3	**1**

tehát $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

Mivel

$$\begin{matrix} \mathbf{C} & \mathbf{A} \\ (2 \times \mathbf{3}) & (\mathbf{3} \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{CA} \\ (2 \times 1) \end{matrix}$$

a belső indexek azonosak, a szorzás elvégezhető.

			4
			0
			-1
0	-2	1	**-1**
-1	0	1	**-5**

tehát $\mathbf{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

8. **Feladat:** Határozzuk meg $\mathbf{AA^T}$ és $\mathbf{A^TA}$ mátrixokat, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Megoldás: A belső indexek megegyeznek, a műveletek elvégezhetőek.

$$\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AA^T} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A^TA} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 26 \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogy $\mathbf{AA^T} \neq \mathbf{A^TA}$, de mindkettő szimmetrikus.

9. **Feladat:** Határozza meg az $\mathbf{A} \cdot \mathbf{1}$ és $\mathbf{1^T} \cdot \mathbf{A}$ mátrixokat, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 10 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 10 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

A művelet eredménye: az $\mathbf{A}$ mátrix soraiban lévő elemek összege.

$$\mathbf{1^TA} = (1; 1; 1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 10 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} = (15; -4; 8; -3)$$

A művelet eredménye: az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopaiban lévő elemek összege.

10. **Feladat:** Végezzük el az alábbi műveleteket $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e_3}$ és $\mathbf{e_1^T} \cdot \mathbf{A}$, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A művelet eredménye: kiemeltük a mátrix 3. oszlopát.

$$\mathbf{e_1^TA} = (1; 0) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (2; -1; 3)$$

A művelet eredménye: kiemeltük a mátrix első sorát.

11. **Feladat:** Végezzük el a következő szorzást, majd értelmezzük a művelet eredményét:

$$\mathbf{e_2^T} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{1}$$

Megoldás:

$$(0;1;0) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1;3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

A művelet eredménye: kiemeltük a mátrix 2. sorát, majd a sor elemeit összeadtuk.

12. **Feladat:** Mutassuk meg, hogy $(\mathbf{AB})^\mathbf{T} = \mathbf{B^T A^T}$, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 14 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{AB})^\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B^T A^T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}$$

Valóban teljesül, hogy $(\mathbf{AB})^\mathbf{T} = \mathbf{B^T A^T}$

13. **Feladat:** Végezze el a következő szorzást: $\mathbf{A^2} \cdot \mathbf{e_2}$, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Végeredmény:

$$\mathbf{A^2} \cdot \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} -20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

14. **Feladat:** Határozza meg az $\mathbf{A^T A} \cdot \mathbf{1}$ mátrixot, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Végeredmény:

$$\mathbf{A^T A} \cdot \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \end{pmatrix}$$

15. **Feladat:** Határozza meg az $\mathbf{e_4^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{1}$ szorzat eredményét, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 3 \\ 0 & 6 \\ 7 & 11 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Végeredmény: $\mathbf{e_4^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = 4$

16. **Feladat:** Határozza meg az $\mathbf{1^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e_2}$ szorzat eredményét, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 3 \\ 0 & 6 \\ 7 & 11 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Végeredmény: $\mathbf{1^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e_2} = 19$

17. **Feladat:** Határozza meg az $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{e_3} - \mathbf{e_4})$ szorzat eredményét, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 & 2 \\ 12 & -10 & 16 & 14 \\ 8 & 17 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

Végeredmény:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{e_3} - \mathbf{e_4}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$$

18. **Feladat:** Határozza meg az $\mathbf{b^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d}$ mátrixot, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 3 & 5 \\ 14 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 11 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Végeredmény: $\mathbf{b^T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = -380$

1. **Vizsgafeladat:** Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Határozzuk meg $(\mathbf{A} + \mathbf{A^2})^\mathbf{2}$ mátrixot.

Megoldás: Először határozzuk meg $\mathbf{A^2}$ mátrixot.

			1	-1	1
			-1	2	0
			0	-1	1
1	-1	1	**2**	**-4**	**2**
-1	2	0	**-3**	**5**	**-1**
0	-1	1	**1**	**-3**	**1**

$$\mathbf{A}+\mathbf{A^2}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-4&2\\-3&5&-1\\1&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5&3\\-4&7&-1\\1&-4&2\end{pmatrix}$$

Végül határozzuk meg $(\mathbf{A}+\mathbf{A^2})^\mathbf{2}$ mátrixot.

			3	-5	3
			-4	7	-1
			1	-4	2
3	-5	3	**32**	**-62**	**20**
-4	7	-1	**-41**	**73**	**-21**
1	-4	2	**21**	**-41**	**11**

Az eredmény: $(\mathbf{A}+\mathbf{A^2})^\mathbf{2}=\begin{pmatrix}32&-62&20\\-41&73&-21\\21&-41&11\end{pmatrix}$

2. **Vizsgafeladat:** Legyen $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3&2&1\\1&-1&0\\3&-2&-1\end{pmatrix}$ és $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5&-3&2\\0&4&0\\1&3&2\end{pmatrix}$.

Határozzuk meg $\mathbf{AB}-\mathbf{B^2}$ mátrixot.

Megoldás: Mivel

			5	-3	2
			0	4	0
			1	3	2
-3	2	1	**-14**	**20**	**-4**
1	-1	0	**5**	**-7**	**2**
3	-2	-1	**14**	**-20**	**4**

			5	-3	2
			0	4	0
			1	3	2
5	-3	2	**27**	**-21**	**14**
0	4	0	**0**	**16**	**0**
1	3	2	**7**	**15**	**6**

Tehát

$$\mathbf{AB}-\mathbf{B^2}=$$

$$=\begin{pmatrix}-14&20&-4\\5&-7&2\\14&-20&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}27&-21&14\\0&16&0\\7&15&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-41&41&-18\\5&-23&2\\7&-35&-2\end{pmatrix}$$

Egyszerűbb a számolás, ha észrevesszük, hogy $\mathbf{AB}-\mathbf{B^2}=(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{B}$.

3. **Vizsgafeladat:** Határozzuk meg $\mathbf{AB}$ és $\mathbf{AC}$ mátrixokat, ha

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&4&1&0\\2&1&1&1\\1&-2&1&2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0&7&3&2\\3&-2&-1&-1\\0&1&3&4\end{pmatrix}$$

Megoldás:

			1	4	1	0
			2	1	1	1
			1	-2	1	2
2	-3	-5	**-9**	**15**	**-6**	**-13**
-1	4	5	**12**	**-10**	**8**	**14**
1	-3	-4	**-9**	**9**	**-6**	**-11**

			0	7	3	2
			3	-2	-1	-1
			0	1	3	4
2	-3	-5	**-9**	**15**	**-6**	**-13**
-1	4	5	**12**	**-10**	**8**	**14**
1	-3	-4	**-9**	**9**	**-6**	**-11**

Tehát

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} -9 & 15 & -6 & -13 \\ 12 & -10 & 8 & 14 \\ -9 & 9 & -6 & -11 \end{pmatrix}$$

De ebből nem következik $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ egyenlőség.

4. **Vizsgafeladat:** Határozzuk meg $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ és $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ mátrixokat, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Először nézzük meg, hogy a művelet elvégezhető-e.

$$\underset{(3\times\mathbf{2})}{\mathbf{A}} \quad \underset{(\mathbf{2}\times\mathbf{4})}{\mathbf{B}} \quad \underset{(\mathbf{4}\times 3)}{\mathbf{C}} = \underset{(3\times 3)}{\mathbf{ABC}}$$

Az egymás mellett lévő belső indexek megegyeznek, ezért a szorzások elvégezhetőek. Ebben az esetben használjuk fel, hogy a mátrixok szorzása asszociatív, azaz $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$, így elég csak $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ mátrixot kiszámolni.

Határozzuk meg $\mathbf{AB}$ szorzatot.

		2	1	0	0
		0	5	3	-1
1	-2	**2**	**-9**	**-6**	**2**
-2	2	**-4**	**8**	**6**	**-2**
0	3	**0**	**15**	**9**	**-3**

Határozzuk meg $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ mátrixot.

				1	1	1
				-3	0	1
				0	2	1
				-2	3	4
2	-9	-6	2	**25**	**-4**	**-5**
-4	8	6	-2	**-24**	**2**	**8**
0	15	9	-3	**-39**	**9**	**12**

Tehát

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{pmatrix} 25 & -4 & -5 \\ -24 & 2 & 8 \\ -39 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

5. **Feladat:** Határozzuk meg $\mathbf{AA^T}$ és $\mathbf{A^TA}$ mátrixokat, ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás: Egy négyzetes mátrix transzponáltja is vele azonos típusú négyzetes mátrix, így a szorzások elvégezhetőek.

			1	3	2
			2	-1	1
			1	0	3
1	2	1	**6**	**1**	**7**
3	-1	0	**1**	**10**	**5**
2	1	3	**7**	**5**	**14**

Tehát

$$\mathbf{AA^T} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 1 & 10 & 5 \\ 7 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

			1	2	1
			3	-1	0
			2	1	3
1	3	2	**14**	**1**	**7**
2	-1	1	**1**	**6**	**5**
1	0	3	**7**	**5**	**10**

$$\mathbf{A^TA} = \begin{pmatrix} 14 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogy szimmetrikus mátrixokat kaptunk, de $\mathbf{AA^T} \neq \mathbf{A^TA}$

6. **Vizsgafeladat** Egy utazási iroda 4 társasutazásra a hét első három napján különböző számú jegyet adott el. Ezeket az adatokat az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix mutatja:

	London	Párizs	Róma	Bécs
Hétfő	10	18	16	14
Kedd	12	16	12	12
Szerda	12	8	8	10

Az egyes utazások ára a táblázatban lévő sorrendnek megfelelően: $\mathbf{p^T} = (15; 10; 20, 5)$ pénzegység.
Végezzük el az alábbi műveleteket és értelmezzük az eredményeket:

$$\mathbf{Ap}, \mathbf{e_2^T A1}, \mathbf{Ae_3}, \mathbf{1^T Ap}.$$

Írja fel mátrixművelettel és számítsa ki, hogy mennyi volt a bécsi jegyek eladásából származó naponkénti bevétel!

Megoldás:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 18 & 16 & 14 \\ 12 & 16 & 12 & 12 \\ 12 & 8 & 8 & 10 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{A\mathbf{p} \quad \text{meghatározása}}$

Számolás táblázattal:

				15
				10
				20
				5
10	18	16	14	**720**
12	16	12	12	**640**
12	8	8	10	**470**

Tehát

$$\mathbf{Ap} = \begin{pmatrix} 10 & 18 & 16 & 14 \\ 12 & 16 & 12 & 12 \\ 12 & 8 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 720 \\ 640 \\ 470 \end{pmatrix}$$

Ap jelentése: a naponkénti bevételt. Azaz hénfőn 720 pénzegység, kedden 640 pénzegység, szerdán 470 pénzegység.

$\boxed{\mathbf{e_2^T A1} \quad \text{meghatározása}}$

Számolás táblázattal:

			10	18	16	14
			12	16	12	12
			12	8	8	10
0	1	0	**12**	**16**	**12**	**12**

				1
				1
				1
				1
12	16	12	12	**16**

Tehát

$$\mathbf{e_2^T A 1} = (0;1;0)\begin{pmatrix} 10 & 18 & 16 & 14 \\ 12 & 16 & 12 & 12 \\ 12 & 8 & 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 52$$

$\mathbf{e_2^T A 1}$ jelentése: kedden az iroda összesen 52 repülőjegyet adott el.

$\boxed{A\mathbf{e_3} \quad \text{meghatározása}}$

Számolás táblázattal:

				0
				0
				1
				0
10	18	16	14	**16**
12	16	12	12	**12**
12	8	8	10	**8**

Tehát

$$\mathbf{Ae_3} = \begin{pmatrix} 10 & 18 & 16 & 14 \\ 12 & 16 & 12 & 12 \\ 12 & 8 & 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{Ae_3}$ jelentése: naponta eladott repülőjegyet száma Rómába.

$\boxed{\mathbf{1^T Ap} \quad \text{meghatározása}}$

$$\mathbf{1^T Ap} = (1;1;1)\begin{pmatrix} 10 & 18 & 16 & 14 \\ 12 & 16 & 12 & 12 \\ 12 & 8 & 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix} = 1830$$

$\mathbf{1^T Ap}$ jelentése: a heti teljes bevétel.

A bécsi jegyek eladásából származó naponkénti bevétel:

$$(\mathbf{p^T e_4})\mathbf{Ae_4} = (15;10;20,5)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 18 & 16 & 14 \\ 12 & 16 & 12 & 12 \\ 12 & 8 & 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 5\begin{pmatrix} 10 & 18 & 16 & 14 \\ 12 & 16 & 12 & 12 \\ 12 & 8 & 8 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$$

7. **Vizsgafeladat**

Egy termelő a piacon négyféle gyümölcsöt árul. Az **A** mátrix mutatja, hogy a hét egyes napjain mennyit adott el a különféle gyümölcsökből.

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat
Szilva	1	5	6	6	7	8
Körte	4	3	4	5	7	7
Őszibarack	3	4	2	3	10	9
Ringló	2	1	4	5	8	12

A táblázat az eladott mennyiséget kg-ban mutatja. Az egyes gyümölcsfajták kilogrammonkénti árát (a táblázatbeli sorrendnek megfelelően) az árvektor tartalmazza, amely a következő:

$$\mathbf{p^T} = (100; 120; 130; 90).$$

Végezzük el az alábbi műveleteket és értelmezzük az eredményeket!

a) $\mathbf{p^T A}$ *b*) $\mathbf{e_1{}^T A}$ *c*) $\mathbf{Ae_3}$ *d*) $\mathbf{A(e_5 - e_1)}$ *e*) $\mathbf{A1}$ *f*) $\mathbf{p^T A1}$ *g*) $\mathbf{1^T A}$

Megoldás:

$$\mathbf{p^T A} = (100; 120; 130; 90) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 10 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1150; & 1470; & 1700; & 2040; & 3560; & 3890; \end{pmatrix}$$

$\mathbf{p^T A}$ jelentése: a naponkénti teljes bevétel.

$$\mathbf{e_1{}^T A} = (1; 0; 0; 0) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 10 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix} = (1; 5; 6; 6; 7; 8)$$

$\mathbf{e_1{}^T A}$ jelentése: szilvából az eladott naponkénti mennyiség kg-ban megadva.

$$\mathbf{Ae_3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 10 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{Ae_3}$ jelentése: szerdán az eladott gyümölcsök mennyisége kg-ban megadva

$$\mathbf{A(e_5 - e_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 10 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}(\mathbf{e_5} - \mathbf{e_1})$ jelentése: pénteken mennyivel több gyümölcsöt adtak el , mint hétfőn

$$\mathbf{A1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 10 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 30 \\ 31 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A1}$ = gyümölcsönként a heti eladott mennyiség kg-ban kifejezve

$$\mathbf{p^T A1} = 13\,810$$

$\mathbf{p^T A1}$ jelentése: a heti teljes bevétel Ft-ban.

$$\mathbf{1^T A} = (1;1;1;1) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 10 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix} = (10;13;16;19;32;36)$$

$\mathbf{1^T A}$ = naponkénti összes eladott gyömölcs mennyisége kg-ban megadva.

8. **Vizsgafeladat** Egy étteremben négyféle levesből eladott adagok számát a hét első három napján az alábbi **A** mátrix mutatja:

	Rántott leves	Zöldségleves	Paradicsomleves	Csontleves
Hétfő	20	30	5	10
Kedd	30	20	10	10
Szerda	25	30	20	20

Az egyes levesek ára: $\mathbf{p^T} = (5;7;10;12)$ pénzegység.

(a) Mennyi a leves forgalom naponként pénzegységben?

(b) Mennyi a leves forgalom összesen a 3 nap alatt?

(c) Számítsa ki és magyarázza meg a jelentését: $\mathbf{1^T A}$.

(d) Számítsa ki és magyarázza meg a jelentését: $\mathbf{Ae_2} - \mathbf{Ae_3}$.

9. **Vizsgafeladat** Három étteremben négyféle ételből egy napon eladott adagok számát mutatja az alábbi **A** mátrix:

	I. vendéglő	II. vendéglő	III. vendéglő
1. étel	20	10	30
2. étel	30	10	40
3. étel	50	20	30
4. étel	40	25	20

Az egyes ételek ára: 600 Ft, 500 Ft, 800 Ft, 400 Ft.

(a) Mennyi az egyes vendéglők forgalma Ft-ban?

(b) Mennyi az egyes ételekből eladott adagok száma a három vendéglőben együttesen?

(c) Mennyi az összes étel forgalom Ft-ban?

10. **Vizsgafeladat** Egy utazási iroda 4 társasutazásra a hét első három napján különböző számú jegyet adott el. Ezeket az adatokat az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix mutatja:

	Párizs	Berlin	Varsó	Amszterdam
Hétfő	16	18	16	14
Kedd	14	16	12	12
Szerda	12	8	8	10

Az egyes utazások ára: $\mathbf{p^T} = (9; 6; 7; 8)$ pénzegység.
Írja fel mátrixművelettel és számítsa ki, hogy:

(a) mennyi volt az utazási iroda bevétele naponta;

(b) három nap alatt az egyes városokba hány jegyet adtak el!

Számítsa ki és magyarázza meg a jelentését:

(a) $\mathbf{e_2^T A 1}$

(b) $(\mathbf{1}; -\mathbf{1}; \mathbf{0})\mathbf{Ap}$.