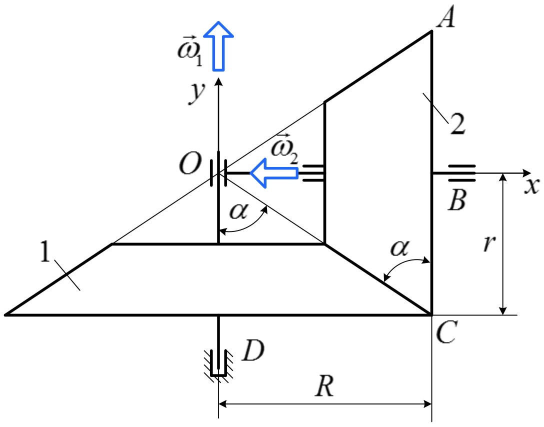
MECHANIKA-MOZGÁSTAN
(kidolgozta: Fehér Lajos)

3.1. Példa: Kúpfogaskerék



Tündi a mérnökhallgató egy gyárlátogatáson lát egy kúpfogaskerekes hajtást. Felvetődik benne a kérdés, milyen lenne A pont sebessége, ha a nagyobb fogaskerék áll, a kisebb pedig a nagyobbon legördülve, a saját tengelye körül állandó szögsebességgel forog. Mivel sikerült teljesítenie a mozgástan tárgyat és mivel imádja a mechanikát gyorsan nekilát megoldani a feladatot.

Adott: Az ábrán látható kúpfogaskerék hajtás és mechanikai modellje. Az 1 jelű kúpfogaskerék áll a 2 jelű pedig az 1 jelűn legördülve saját tengelye körül $\vec{\omega}_2$ állandó szögsebességgel forog. Adott továbbá:

$$r = 50mm, \quad R = 100mm, \quad \omega_2 = 10\frac{rad}{s}$$

Feladat:

a) Milyen mozgást végez a 2 jelű fogaskerék?
b) Mekkora és milyen irányú az A pont sebessége?
c) Egy perc alatt hány fordulatot tesz meg a bolygókerék az álló függőleges OD tengely körül

Feladat megoldása:

a) A 2 jelű fogaskerék egyidejűleg forog az OD függőleges és az OB vízszintes tengely körül $\vec{\omega}_2$ illetve $\vec{\omega}_2$ szögsebességgel. A gördülés az osztókúpon történik, ennek az OC egyenesen lévő pontjai pillanatnyilag állnak, azaz a 2 jelű fogaskerék e körül végez elemi forgómozgást.

b) Az A pont sebességének meghatározása:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_{sz}$$

$$\vec{v}_{aA} = \vec{v}_{rA} + \vec{v}_{szA}$$

$$\vec{v}_{rA} = \underbrace{\vec{v}_B}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{BA} = -\omega_2 \vec{i} \times r\vec{j} = -\omega_2 r\vec{k} \ {}^{m}\!/_{s}$$

$$\vec{v}_{szA} = \underbrace{\vec{v}_O}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{OC} = \omega_1 \vec{j} \times R\vec{i} = -\omega_1 R\vec{k} \ {}^{m}\!/_{s}$$

$$\vec{v}_{aA} = \vec{v}_{rA} + \vec{v}_{szA} = -\omega_2 r\vec{k} - \omega_1 R\vec{k} = \left(-\omega_2 r - \omega_1 R\right)\vec{k} \ {}^{m}\!/_{s}$$

ahol az áttétel miatt: $\omega_1 R = \omega_2 r \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \dfrac{r}{R}\omega_2$

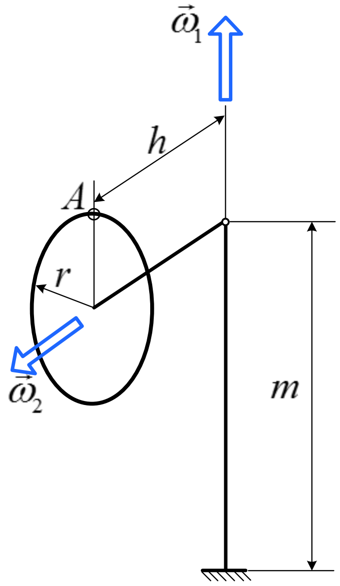
$$\vec{v}_{aA} = \left(-\omega_2 r - \omega_1 R\right)\vec{k} = \left(-\omega_2 r - \frac{r}{R}\omega_2 R\right)\vec{k} = \left(-2\omega_2 r\right)\vec{k} = \left(-2\cdot 10\cdot 0{,}05\right)\vec{k} = \underline{\underline{\left(-1\vec{k}\right) {}^{m}\!/_{s}}}$$

Másik megoldási módszer:

A két szögsebesség vektor eredője: $\vec{\omega}_{ER} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \dfrac{r}{R}\omega_2 \vec{j} - \omega_2 \vec{i} = -\omega_2 \vec{i} + \dfrac{r}{R}\omega_2 \vec{j}$

$$\vec{v}_A = \underbrace{\vec{v}_O}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_{ER} \times \vec{r}_{OA} = \left(-\omega_2 \vec{i} + \frac{r}{R}\omega_2 \vec{j}\right) \times \left(R\vec{i} + r\vec{j}\right) = -\omega_2 r\vec{k} - \frac{r}{R}\omega_2 R\vec{k} = -2\omega_2 r\vec{k} = \underline{\underline{\left(-1\vec{k}\right) {}^{m}\!/_{s}}}$$

3.2. Példa: Asztali ventillátor



Júliusban a 30°C-os hősében Tündi a mérnökhallgató, hogy elterelje a társaság figyelmét a kánikuláról látva az asztalon álló ventillátort feldob egy műszaki feladatot. „Meg tudja mondani valaki, hogy mekkora és milyen irányú lesz a lapát felső pontjának sebessége az kiválasztott pillanatban?” És akkor az asztali ventillátorra mutat, ami a képen látható állásban van éppen. A társaság jogász és közgazdász tagjai összehúzott szemöldökkel néznek a lányra. A társaság többi mérnök tagja sajnos még nem jutott el eddig a tárgyig, így Tündinek magának kell megoldani a feladatot.

Adott: Az ábrán látható asztali ventillátor lapátok fordulatszáma n_2 a függőleges tengely körül a ventilátor fej pedig n_1 fordulatszámmal forog. Adott továbbá:

$$R = 50mm, \quad h = 100mm, \quad m = 300mm, \quad n_1 = 10\frac{f}{p}, \quad n_2 = 1200\frac{f}{p}$$

Feladat:

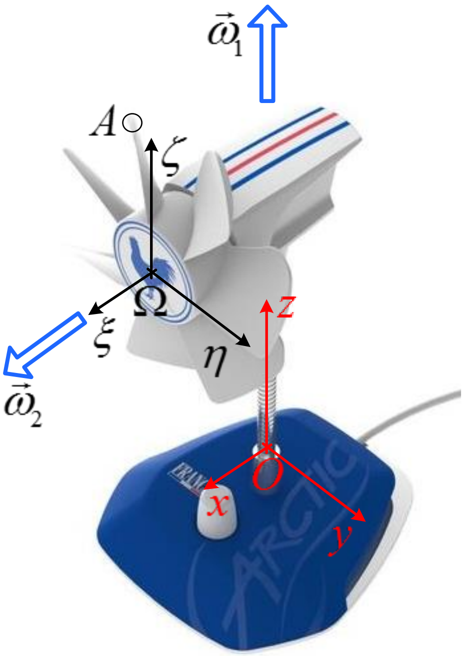
a) Mekkora és milyen irányú az A pont sebessége a fenti ábrán jelölt pillanatban?

Feladat megoldása:

$$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = \frac{2\pi 10}{60} = 1,05\frac{rad}{s}, \qquad \omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60} = \frac{2\pi 1200}{60} = 125,66\frac{rad}{s}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_{sz}$$

$$\vec{v}_{aA} = \vec{v}_{rA} + \vec{v}_{szA}$$



$$\vec{v}_{rA} = \vec{0}\, {}^{m}\!/_{s}$$

$$\vec{v}_\Omega = \underbrace{\vec{v}_O}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{O\Omega} = \left(\omega_1\vec{k}\right)\times\left(h\vec{i} + m\vec{k}\right) = \left(\omega_1 h\,\vec{j}\right) =$$

$$= \left(1,05\cdot 0,1\vec{j}\right) = \left(0,105\vec{j}\right){}^{m}\!/_{s}$$

$$\vec{v}_{szA} = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{\Omega A} = \vec{v}_\Omega + \left(\omega_2\vec{i}\right)\times\left(R\vec{k}\right) = \left(\omega_1 h\,\vec{j} - \omega_2 R\,\vec{j}\right) =$$

$$= \left(1,05\cdot 0,1 - 125,66\cdot 0,05\right)\vec{j} = \left(0,105 - 6,283\right)\vec{j} = \left(-6,178\vec{j}\right){}^{m}\!/_{s}$$

$$\vec{v}_{aA} = \vec{v}_{rA} + \vec{v}_{szA} = \vec{0} + \left(-6,178\vec{j}\right) = \underline{\underline{\left(-6,178\vec{j}\right){}^{m}\!/_{s}}}$$

Másik megoldási módszer:

Megjegyzés: ebben az esetben az x, y, z koordináta rendszer origóját a két szögsebesség vektor metszéspontjába kell felvennünk. Így $\vec{r}_{OA} = \left(h\vec{i} + R\vec{k}\right)m$

A két szögsebesség vektor eredője:

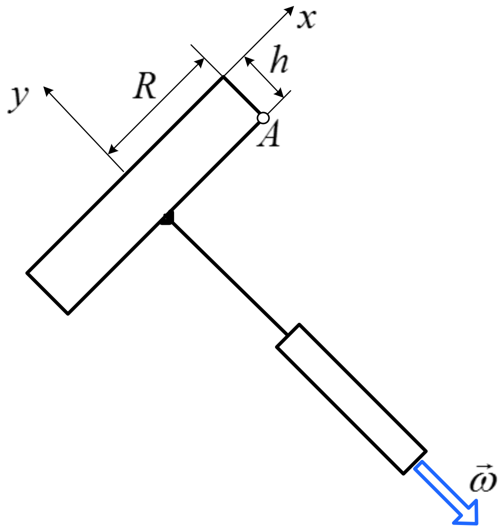
$$\vec{\omega}_{ER} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_1\vec{k} + \omega_2\vec{i} = \left(125,66\vec{i} + 1,05\vec{k}\right)\frac{rad}{s}$$

$$\vec{v}_A = \underbrace{\vec{v}_O}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_{ER} \times \vec{r}_{OA} = \left(\omega_2\vec{i} + \omega_1\vec{k}\right)\times\left(h\vec{i} + R\vec{k}\right) = -\omega_2 R\vec{j} + \omega_1 h\vec{j} =$$

$$= \left(-125,66\cdot 0,05 + 1,05\cdot 0,1\right)\vec{j} = \underline{\underline{\left(-6,178\vec{j}\right){}^{m}\!/_{s}}}$$

A két végeredmény megegyezik.

3.3. Példa: Dugóhúzó



Adott: Az ábrán látható szerkezet (dugóhúzó). A dugóhúzót $n = 60\frac{f}{p}$ fordulatszámmal csavarjuk a dugóba (gyorsan, mert szomjasak vagyunk). A dugóhúzó méretei az ábrán láthatóak, menetemelkedése $m = 1mm$. Adott továbbá:

$$R = 40mm, \quad h = 20mm, \quad m = 1mm, \quad n = 30\frac{f}{p}$$

Feladat:

a) Mekkora és milyen irányú az A pont sebessége?

Feladat megoldása:

$$\omega\left[\frac{rad}{s}\right] = n\left[\frac{ford}{p}\right]\cdot\frac{1}{60}\left[\frac{p}{s}\right]\cdot\frac{2\pi}{1}\left[\frac{rad}{ford}\right] = \frac{2\pi n}{60}\left[\frac{rad}{s}\right]$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi 30}{60} = 3{,}14\frac{rad}{s}, \qquad \vec{\omega} = \left(-3{,}14\vec{j}\right)\frac{rad}{s}$$

Sebességátszámító képlet:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}$$

Origó sebessége:

A menetemelkedés $m = 1mm$ vagyis 1 körülfordulás során 1 mm-t mozdul lefelé az O pont.

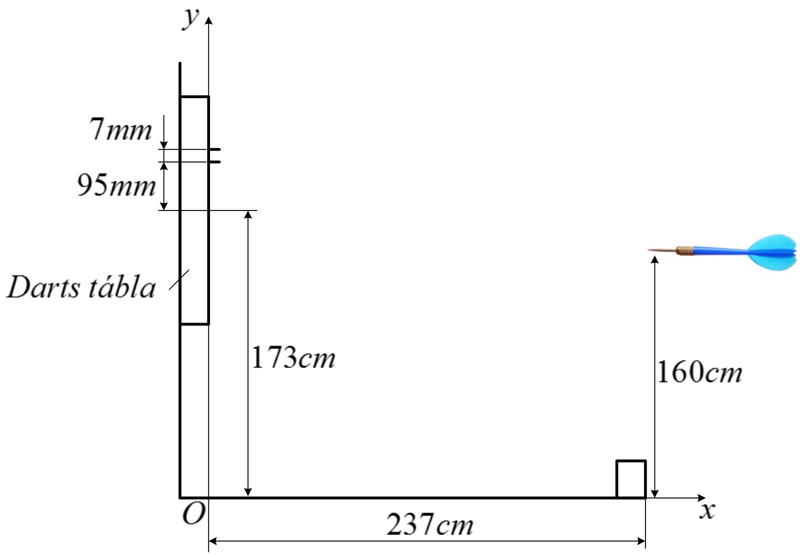
$$v_O = nm = 30\cdot 1 = 30\left[\frac{mm}{p}\right] = 30\left[\frac{mm}{p}\right]\cdot\frac{1}{1000}\left[\frac{m}{mm}\right]\cdot\frac{1}{60}\left[\frac{p}{s}\right] = 0{,}0005\frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_O = \left(-0{,}0005\vec{j}\right)\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

$$\vec{r}_{OA} = \left(40\vec{i} - 20\vec{j}\right)m$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega}\times\vec{r}_{OA} = \left(-0{,}0005\vec{j}\right) + \left(-3{,}14\vec{j}\right)\times\left(40\vec{i} - 20\vec{j}\right) = \underline{\underline{\left(-0{,}0005\vec{j} + 125{,}6\vec{k}\right)\,{}^{m}\!/\!{}_{s}}}$$

3.4. Példa: Darts



Jani a kocsma koronázatlan királya 3 sör után már nem dobja olyan stabilan a triplákat dartsban, így vesztésre áll. Ekkor jön segítségére Tündi a mérnökhallgató, aki gyorsan kiszámolja Janinak, hogyan dobja el a nyilakat, hogy azok a tripla húszas mezőbe landoljanak.

Adott:

$$\vec{g} = \left(-10\vec{j}\right)\frac{m}{s^2}, \quad \vec{r}_0 = \left(2{,}37\vec{i} + 1{,}6\vec{j}\right)m, \quad \vec{r}_{1a} = \left(1{,}825\vec{j}\right)m, \quad \vec{r}_{1f} = \left(1{,}832\vec{j}\right)m,$$

Feladat:

a) Mekkora és milyen irányú legyen a nyíl kezdő sebessége, amit Jani eldob, hogy merőlegesen a tripla húszas mezőben landoljon? *(ha a nyilat tömegpontként modellezzük!)*

Feladat megoldása:

$$\vec{a} = \vec{g} = \left(-10\,j\right)\frac{m}{s^2} = \acute{a}lland\acute{o}$$

$$\vec{v}\left(t\right) = \vec{v}_o + \vec{g}t$$

$$\vec{r}\left(t\right) = \vec{r}_0 + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

1. eset: a nyíl az alsó pontban esik a tripla húszas mezőbe

$$\vec{v}\left(t\right) = \vec{v}_o + \vec{g}t_a$$

$$\left.\begin{aligned} v_{1xa} &= v_{oxa} \\ v_{1ya} &= 0 = v_{oya} - 10t_a \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3)\ v_{oya} = 10t_a$$

$$1)\quad x_{1a} = r_{0x} + v_{oxa}t_a \qquad\qquad 0 = 2{,}37 + v_{oxa}t_a$$

$$2)\quad y_{1a} = r_{0y} + v_{oya}t_a - \frac{1}{2}10t_a^2 \qquad\qquad 1{,}825 = 1{,}6 + v_{oya}t_a - 5t_a^2$$

2)-be visszahelyettesítve a 3)-as egyenletet:

$$1,825 = 1,6 + 10t_a^2 - 5t_a^2$$

$$0 = 5t_a^2 - 0,225 \;\Rightarrow\; t_{a12} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 4 \cdot 5 \cdot 0,225}}{2 \cdot 5} = 0,2121s$$

$$v_{oya} = 10t_a = 10 \cdot 0,2121 = 2,121\, m/s$$

$$0 = 2,37 + v_{oxa}t_a \;\Rightarrow\; v_{oxa} = -\frac{2,37}{0,2121} = -11,17\, m/s$$

A nyíl kezdő sebessége, hogy a mező alsó pontjába csapódjon be:

$$\vec{v}_{oa} = \vec{v}_{oxa} + \vec{v}_{oya} = \underline{\underline{\left(-11,17\vec{i} + 2,121\vec{j}\right) m/s}}$$

2. eset: a nyíl az felső pontban esik a tripla húszas mezőbe

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{g}t_a$$

$$\left.\begin{aligned} v_{1xf} &= v_{oxf} \\ v_{1yf} &= 0 = v_{oyf} - 10t_f \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3)\; v_{oyf} = 10t_f$$

$$1)\quad x_{1f} = r_{0x} + v_{oxf}t_f \qquad\qquad 0 = 2,37 + v_{oxf}t_f$$

$$2)\quad y_{1f} = r_{0y} + v_{oyf}t_f - \frac{1}{2}10t_f^2 \qquad\qquad 1,832 = 1,6 + v_{oyf}t_f - 5t_f^2$$

2)-be visszahelyettesítve a 3)-as egyenletet:

$$1,832 = 1,6 + 10t_f^2 - 5t_f^2$$

$$0 = 5t_f^2 - 0,232 \;\Rightarrow\; t_{f12} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 4 \cdot 5 \cdot 0,232}}{2 \cdot 5} = 0,2154s$$

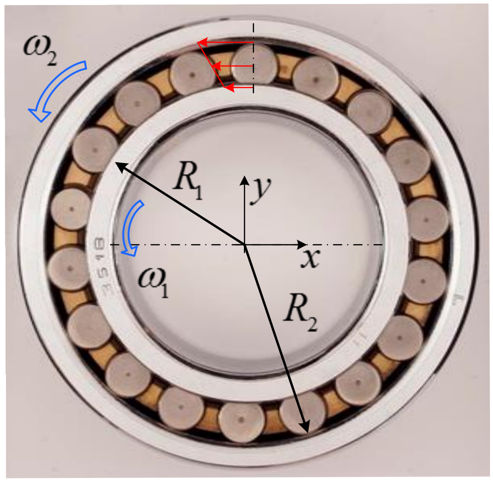
$$v_{oyf} = 10t_f = 10 \cdot 0,2154 = 2,154\, m/s$$

$$0 = 2,37 + v_{oxf}t_f \;\Rightarrow\; v_{oxf} = -\frac{2,37}{0,2154} = -11,00\, m/s$$

A nyíl kezdő sebessége, hogy a mező felső pontjába csapódjon be:

$$\vec{v}_{oa} = \vec{v}_{oxa} + \vec{v}_{oya} = \underline{\underline{\left(-11,00\vec{i} + 2,154\vec{j}\right) m/s}}$$

3.5. Példa: Görgőscsapágy



Az ábrán látható görgőscsapágy belső gyűrűje ω_1 a külső gyűrűje pedig ω_2 szögsebességgel forog az ábrán bejelölt irányokba, köztük a hengeres görgők csúszásmentesen gördüléssel mozognak.

Adott:

$R_1, R_2, \omega_1, \omega_2$

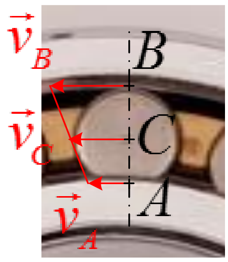
Feladat:

a) Mekkora lesz a görgő C középpontjának $\vec{v}_C$ sebessége?

b) Határozza meg a görgő ω szögsebességét saját geometriai tengelye körül!

c) Mi a feltétele annak, hogy a görgők tisztán haladó mozgást végezzenek?

Feladat megoldása:



a)

$$\vec{v}_A = \underbrace{\vec{v}_O}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{OA} = \omega_1 \vec{k} \times R_1 \vec{j} = -R_1 \omega_1 \vec{i} \ m/s$$

$$\vec{v}_B = \underbrace{\vec{v}_O}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{OB} = \omega_2 \vec{k} \times R_2 \vec{j} = -R_2 \omega_2 \vec{i} \ m/s$$

$$\vec{v}_C = \frac{\vec{v}_B + \vec{v}_A}{2} = \frac{-R_2\omega_2\vec{i} + -R_1\omega_1\vec{i}}{2} = \frac{-R_1\omega_1 - R_2\omega_2}{2}\vec{i} \ m/s$$

b)

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AC}$$

$$\frac{-R_1\omega_1 - R_2\omega_2}{2}\vec{i} = -R_1\omega_1\vec{i} + \omega\vec{k} \times \left(\frac{R_2 - R_1}{2}\right)\vec{j}$$

$$\frac{-R_1\omega_1 - R_2\omega_2}{2}\vec{i} = -R_1\omega_1\vec{i} - \omega\left(\frac{R_2 - R_1}{2}\right)\vec{i} \qquad /\cdot\vec{i}$$

$$\frac{-R_1\omega_1 - R_2\omega_2}{2} = -R_1\omega_1 - \omega\left(\frac{R_2 - R_1}{2}\right)$$

$$\omega\left(\frac{R_2 - R_1}{2}\right) = -R_1\omega_1 + \frac{R_1\omega_1 + R_2\omega_2}{2}$$

$$\omega = \left(\frac{R_2\omega_2 - R_1\omega_1}{R_2 - R_1}\right)\frac{rad}{s}$$

c)

Tisztán haladó mozgás feltétele, ha $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}_C$

Ha $\vec{\omega}_1$ *és* $\vec{\omega}_2$ vektorok iránya megegyezik akkor az A, B, C pontok sebesség vektorainak iránya megegyező lesz, a nagyságuk pedig egyenlő ha

$$R_1\omega_1 = R_2\omega_2$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Ha ez teljesül akkor a görgő tisztán haladó mozgást fog végezni.

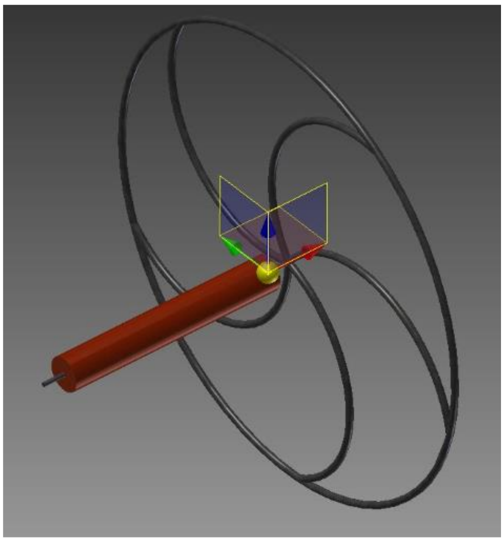
Ha $\vec{\omega}_1$ *és* $\vec{\omega}_2$ vektorok iránya ellentétes akkor az A, B pontok sebesség vektorainak iránya ellentétes lesz, a nagyságuk pedig egyenlő ha

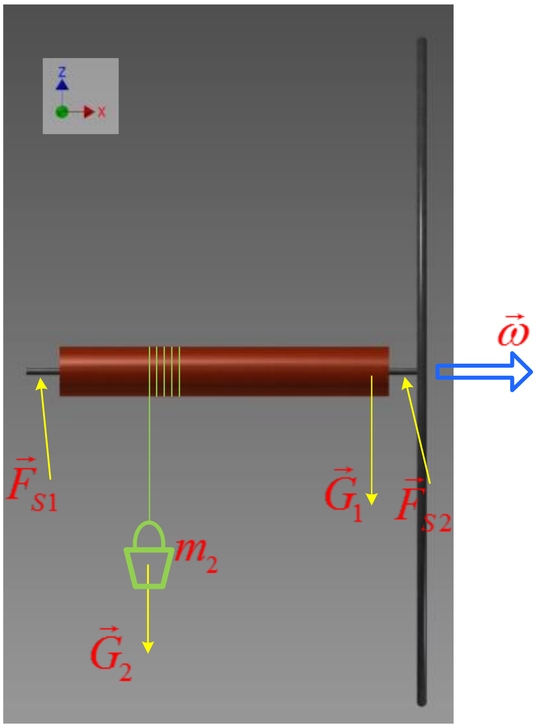
$$R_1\omega_1 = R_2\omega_2$$

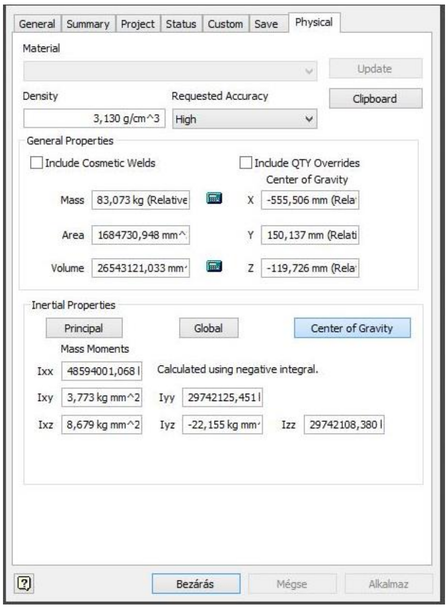
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Viszont ebben az esetben a görgő a C ponton átmenő tengely körül fog tisztán forgómozgást végezni.

3.6. Példa: Kerekes kút







Adott az ábrán látható szerkezet (kerekes kút). Állandó n fordulatszámmal forgatva húzzuk fel a vödör vizet, aminek tömege m_2. Hirtelen abbahagyjuk a tekerést, akkor hány métert emelkedik még a vödör?

Adott: $m_2 = 15kg, \quad n = 30\dfrac{f}{p}$

és az S pontra számított tehetetlenségi tenzor CAD program alapján:

$$\underline{\underline{J}}_S = \begin{bmatrix} 48594001,1 & 3,773 & 8,679 \\ 3,773 & 29742125,45 & -22,155 \\ 8,679 & -22,155 & 29742108,38 \end{bmatrix} kgmm^2$$

Feladat:

a) Mekkora lesz az ε szöglassulás?
b) Hány métert emelkedik még a vödör?

Feladat megoldása:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi 30}{60} = 3{,}14\frac{rad}{s}$$

Energiatétel:

$$\dot{E} = P$$

$$E = \frac{1}{2}J_{S1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$v_2 = R_1\omega_1 = R_1\dot{q}_1$$

$$a_2 = R_1\varepsilon_1 = R_1\ddot{q}_1$$

$$E = \frac{1}{2}\left(J_{S1} + m_2 R_1^2\right)\omega_1^2$$

$$\dot{E} = \left(J_{S1} + m_2 R_1^2\right)\omega_1\varepsilon_1$$

$$P = \vec{F}_{S1}\underbrace{\vec{v}_{S1}}_{=\vec{0}} + \vec{F}_{S2}\underbrace{\vec{v}_{S2}}_{=\vec{0}} + \vec{G}_2\vec{v}_2 = m_2\vec{g}\vec{v}_2 = -m_2 g R_1\omega_1$$

$$\left(J_{S1} + m_2 R_1^2\right)\omega_1\varepsilon_1 = -m_2 g R_1\omega_1$$

$$\varepsilon_1 = \frac{-m_2 g R_1}{\left(J_{S1} + m_2 R_1^2\right)} = \frac{-15\cdot 10\cdot 0{,}075}{48{,}594 + 15\cdot 0{,}075^2} = \underline{\underline{-0{,}2311\frac{rad}{s^2}}}$$

Munkatétel:

$$E_2 - E_1 = W_{12} = \int P dv = \int F dr$$

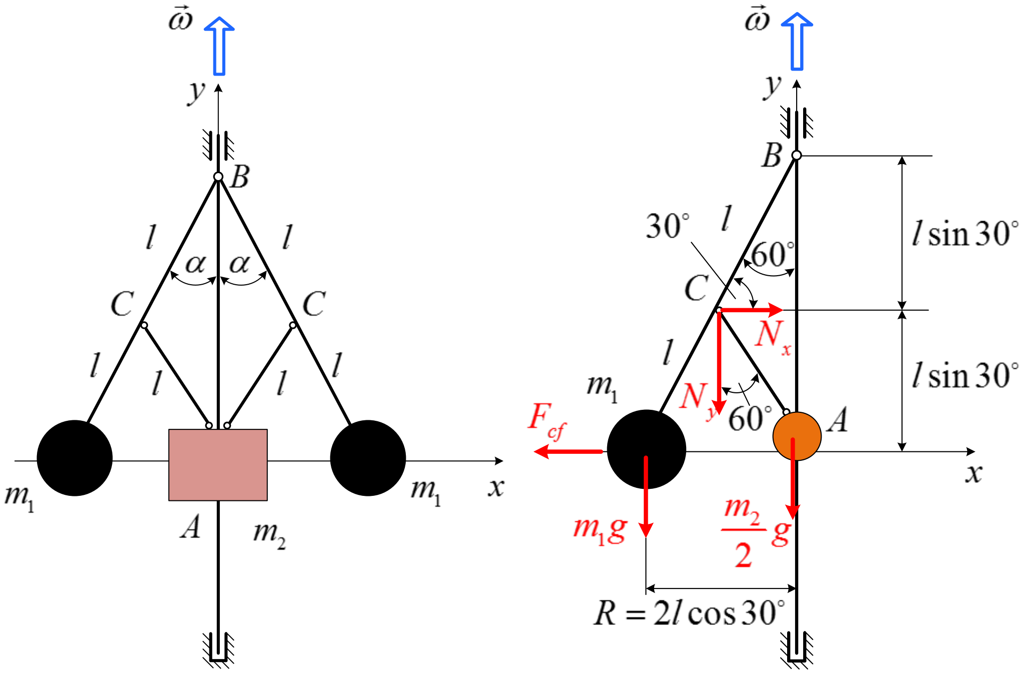
$$E_2 = \frac{1}{2}J_{S1}\underbrace{\omega_2^2}_{=0} + \frac{1}{2}m_2\underbrace{v_2^2}_{=0} = 0$$

$$E_1 = \frac{1}{2}J_{S1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$-\frac{1}{2}\left(J_{S1} + m_2 R_1^2\right)\omega_1^2 = \int -m_2 g dr = -m_2 g\Delta r$$

$$\Delta r = \frac{\frac{1}{2}\left(J_{S1} + m_2 R_1^2\right)\omega_1^2}{m_2 g} = \frac{\frac{1}{2}\left(48{,}594 + 15\cdot 0{,}075^2\right)3{,}14^2}{15\cdot 10} = \frac{\frac{1}{2}48{,}678375\cdot 3{,}14^2}{15\cdot 10} = \underline{\underline{1{,}6m}}$$

3.7. Példa: Centrifugál regulátor (kidolgozta: dr. Nagy Zoltán)



Adott az ábrán látható centrifugál regulátor méretei és a kapcsolódó tömegek. A rudak tömegét a számítás során hanyagoljuk el!

Adott:

$m_1 = 1kg, \quad m_2 = 10kg, \quad l = 0,2m, \quad \alpha = 60^\circ$

Feladat:

a) Mekkora ω szögsebesség mellett lesz az ábrán vázolt α szög 60°-os?

Feladat megoldása:

A szerkezet szimmetrikus, így elég annak felét vizsgálni.

A C pontban a csuklóra ható belső erő.

$$N_y = \frac{m_2}{2} g = 50N$$

$$\frac{N_x}{N_y} = tg60^\circ \quad \Rightarrow \quad N_x = N_y tg60^\circ = N_y\sqrt{3}$$

$$F_{cf} = m_1 a_n = m_1 \frac{v^2}{R} = m_1 \frac{R^2\omega^2}{R} = m_1 R\omega^2 = m_1\left(2l\cos 30^\circ\right)\omega^2$$

A $2l$ hosszúságú rúd adott ω szögsebesség esetén egyensúlyban van, így felírhatunk egy nyomatéki egyenletet a B ponton átmenő síkra merőleges tengelyre:

$$M_b = 0 = -F_{cf}\,2l\sin 30^\circ + m_1 g\,2l\cos 30^\circ + N_x l\sin 30^\circ + N_y l\cos 30^\circ$$

$$F_{cf}\,2l\sin 30^\circ = m_1 g\,2l\cos 30^\circ + N_x l\sin 30^\circ + N_y l\cos 30^\circ$$

$$m_1 R\omega^2\,2l\sin 30^\circ = m_1 g\,2l\cos 30^\circ + N_y\sqrt{3}l\sin 30^\circ + N_y l\cos 30^\circ$$

$$m_1 2l\cos 30^\circ \omega^2 2l\sin 30^\circ = m_1 g 2l\cos 30^\circ + N_y\sqrt{3}l\sin 30^\circ + N_y l\cos 30^\circ$$

$$m_1 2l\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 2l\frac{1}{2} = m_1 g 2l\frac{\sqrt{3}}{2} + N_y\sqrt{3}l\frac{1}{2} + N_y l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

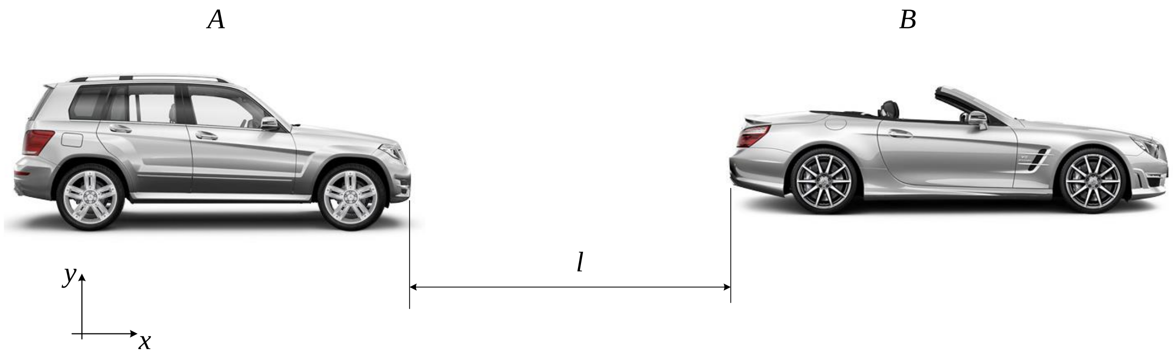
$$m_1 2l\omega^2 l = m_1 g 2l + N_y l + N_y l$$

$$m_1\omega^2 l = m_1 g + N_y$$

$$m_1\omega^2 l = m_1 g + \frac{m_2}{2}g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 g + \frac{m_2}{2}g}{m_1 l}} = \sqrt{\frac{1\cdot 10 + 5\cdot 10}{1\cdot 0,2}} = \sqrt{300} = \underline{\underline{17,32\frac{rad}{s}}}$$

3.8. Példa: Autó



Adott:

$$v_A = 90 \, {km}/{h}, \quad v_B = 90 \, {km}/{h}, \quad a_A = 4 \, {m}/{s^2}$$

Feladat:

Az A és B autók egymást követve azonos sebességgel haladnak. Ha az A autó elkezd fékezni és a B jármű tovább halad konstans sebességgel, akkor milyen messze lesz a két jármű egymástól mikor A éppen megállt?

Feladat megoldása:

$$\vec{v}_A = \left(90\vec{i}\right) {km}/{h} = \left(\frac{90}{3,6}\vec{i}\right) {m}/{s} = \left(25\vec{i}\right) {m}/{s}$$

$$\vec{v}_B = \left(90\vec{i}\right) {km}/{h} = \left(\frac{90}{3,6}\vec{i}\right) {m}/{s} = \left(25\vec{i}\right) {m}/{s}$$

$$\vec{a}_A = \left(-4\vec{i}\right) {m}/{s^2}$$

$$\vec{a}_A = \left(-4\vec{i}\right)\frac{m}{s^2} = \acute{a}lland\acute{o}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{a}_A t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}_A t^2$$

Megállásig eltelt idő:

$$\underbrace{\vec{v}_1}_{=\vec{0}} = \underbrace{\vec{v}_0}_{=\vec{v}_A} + \vec{a}_A t_1 \qquad / \cdot \vec{i}$$

$$0 = v_A - a_A t_1 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{v_A}{a_A}$$

Megállásig megtett út:

$$\vec{r}_1 = \underbrace{\vec{r}_0}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{v}_o}_{=\vec{v}_A} t_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_A t_1^2 \qquad / \cdot \vec{i}$$

$$r_1 = v_A t_1 - \frac{1}{2} a_A t_1^2 = v_A \frac{v_A}{a_A} - \frac{1}{2} a_A \left(\frac{v_A}{a_A} \right)^2 = \frac{v_A^2}{a_A} - \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{a_A} = \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{a_A}$$

A B autó ez idő alatt megtett távolsága:

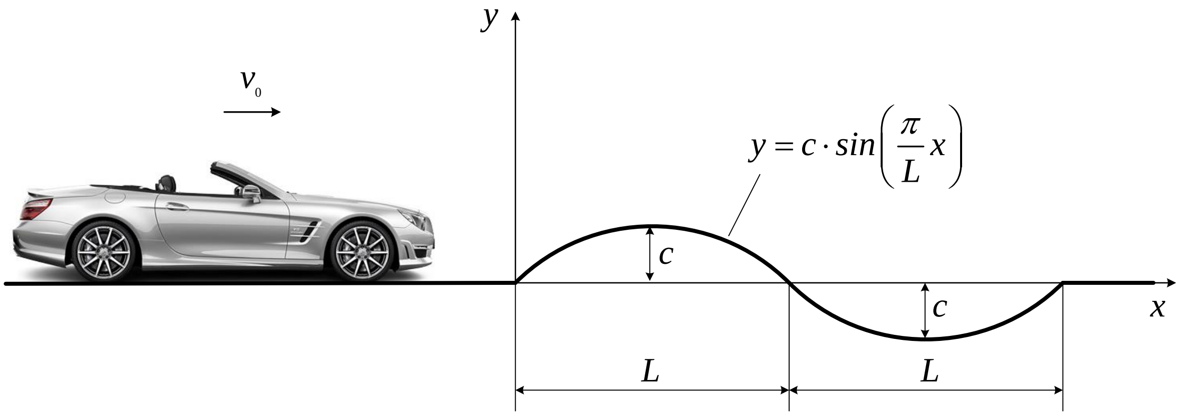
$$r_1 = v_B t_1 = v_B \frac{v_A}{a_A}$$

A két autó közötti távolság:

$$r_{AB} = r_B - r_A = v_B \frac{v_A}{a_A} - \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{a_A} = 25 \frac{25}{4} - \frac{1}{2} \frac{25^2}{4} = 156,25 - 78,125 = \underline{\underline{78,125 m}}$$

plusz eredetileg a két autó közötti követési távolság.

3.9. Példa: Autó



Az autó konstans v_0 sebességgel halad egy felújítás alatt lévő úton. Az út egy szakasza a felújítás miatt egy szinusz függvényhez hasonlít, az alakja $y = 0{,}5\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ függvénnyel írható le.

Adott:

$$v_0 = 90\,{}^{km}\!/\!_{h} = 25\,{}^{m}\!/\!_{s}, \qquad y = c\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) = 0{,}5\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

Feladat:

Határozza meg a rázós szakaszon való áthaladás során mennyi lesz a sebesség vektor x és y koordinátája, ha a v_0 nagysága állandó!

Feladat megoldása:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = \frac{\pi}{L}\dot{x}\left(c\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right)$$

$$v_y = \frac{\pi}{L}v_x\left(c\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right)$$

A sebesség nagysága nem változik, így:

$$v_0^2 = v_x^2 + v_y^2$$

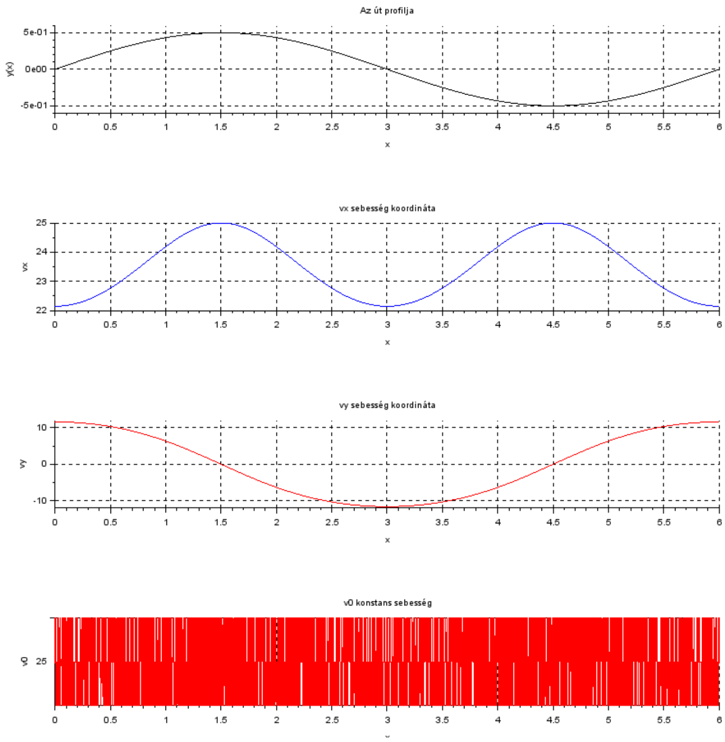
$$v_0^2 = v_x^2 + \left[\frac{\pi}{L}v_x\left(c\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right)\right]^2 = v_x^2\left[1 + \left(\frac{\pi}{L}c\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right]$$

$$v_x^2 = \frac{v_0^2}{\left[1 + \left(\frac{\pi}{L}c\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right]}$$

$$v_x = \sqrt{\frac{v_0^2}{\left[1+\left(\frac{\pi}{L}c\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right]}} = v_0\left[1+\left(\frac{\pi}{L}c\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$v_y = \frac{\pi}{L}v_x\left(c\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right) = \frac{\pi}{L}v_0\left[1+\left(\frac{\pi}{L}c\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\left(c\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right)$$

Ábrázoljuk a sebesség vektor *x* és *y* koordinátákat az úthibán való áthaladás során pl. Scilab programmal:



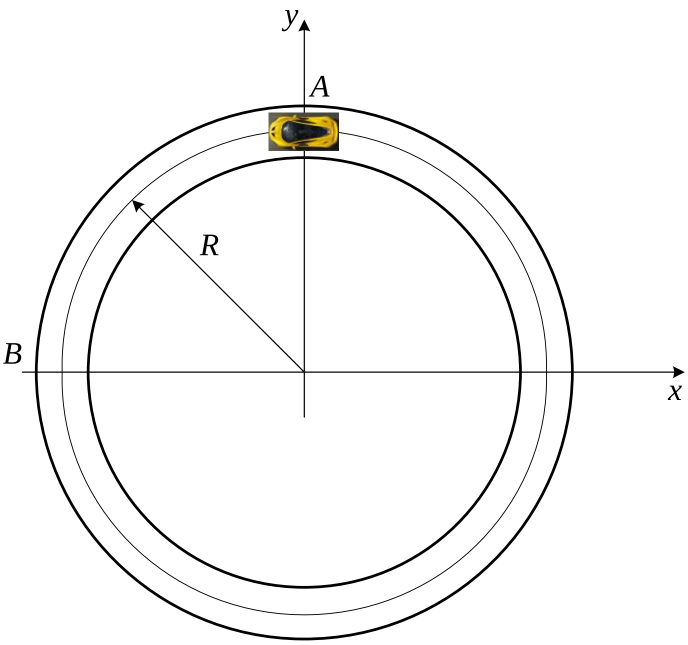
Scilab program kód:

```
// Rossz úton áthaladás konstans v0 nagyságú sebességgel.
// az úthibát sinus fv-el írjuk le.
//  y=c*(sin(x*(%pi)/L))
//
clear; clc;
L=3;    //m
c=0.5;  //m
v0=25;  //m/s
x=0:0.001:(2*L);
//
function y=f1(x)
   y=c*(sin(x*(%pi)/L));
endfunction
//
function vx=f2(x)

vx=v0*(1+((c*%pi/L)^2)*(cos(x*%pi/L)).^2).^(
-0.5);
endfunction
//
function vy=f3(x)

vy=(v0*(1+((c*%pi/L)^2)*(cos(x*%pi/L)).^2).^(
-0.5))*(%pi/L).*(c*cos(x*%pi/L));
endfunction
//
// Maximum és minimum értékek kiiratása
maxy=max(f1(x))
miny=min(f1(x))
maxvx=max(f2(x))
minvx=min(f2(x))
maxvy=max(f3(x))
minvy=min(f3(x))
//
// Eredmények kirajzoltatása
subplot(4,1,1)
plot2d(x,f1(x),1)
xtitle(" Az út profilja "," x ","y(x)")
xgrid(1)
//
subplot(4,1,2)
plot2d(x,f2(x),2)
xtitle(" vx sebesség koordináta"," x ","vx")
xgrid(1)
//
subplot(4,1,3)
plot2d(x,f3(x),5)
xtitle(" vy sebesség koordináta "," x ","vy")
xgrid(1)
//
subplot(4,1,4)
plot2d(x,sqrt(((f2(x)).^2)+((f3(x)).^2)),5)
xtitle(" v0 konstans sebesség "," x "," v0 ")
xgrid(1)
```

3.10. Példa: Autó körpályán



Egy autó állandó v_0 sebességgel halad egy kör alakú pályán, aminek R a sugara. Az A pontot elérve az autó gyorsítani kezd $a_t = \left(\frac{4}{3} v^{\frac{1}{4}}\right) m/s^2$ függvény szerint.

Adott:

$$v_0 = 16\, m/s, \qquad R = 200m, \qquad a_t = \left(\frac{4}{3} v^{\frac{1}{4}}\right) m/s^2$$

Feladat:

a) Határozza meg az autó sebességét és gyorsulását, amikor az a *B* ponthoz ér!
b) Határozza meg mennyi idő szükséges, míg az autó az, *A* pontból a *B* pontba ér!!

Feladat megoldása:

$$a_t = \left(\frac{4}{3} v^{\frac{1}{4}}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = a_t$$

$$dv = a_t dt$$

$$dv = \left(\frac{4}{3} v^{\frac{1}{4}}\right) dt$$

$$\int_{v_0=16}^{v} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{v^{\frac{1}{4}}}\right) dv = \int_0^t dt$$

$$\left[\frac{3}{4} \cdot \frac{v^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}\right]_{16}^{v} = \left[v^{\frac{3}{4}}\right]_{16}^{v} = \left[t\right]_0^t$$

$$v^{\frac{3}{4}} - 8 = t \quad \Rightarrow \quad v = (t+8)^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$ds = vdt$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (t+8)^{\frac{4}{3}} dt$$

$$s = \left[\frac{(t+8)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} \right]_0^t = \left[\frac{3}{7}(t+8)^{\frac{7}{3}} \right]_0^t$$

$$s = \frac{3}{7}(t+8)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{7}(0+8)^{\frac{7}{3}} = \frac{3}{7}(t+8)^{\frac{7}{3}} - 54,86$$

A megtett út:

$$s = \frac{\pi}{2} \cdot 200 = 100\pi = 314,15926m$$

$$314,15926 = \frac{3}{7}(t+8)^{\frac{7}{3}} - 54,86$$

Az egyenletet megoldva pl.: wxMaxima programmal vagy www.wolframalpha.com oldalon.

$$t_1 = \underline{\underline{10,1079s}}$$

A többi megoldás komplex.

B pontnál az autó sebessége, gyorsulása:

$$v = (t+8)^{\frac{4}{3}} = (10,1079+8)^{\frac{4}{3}} \cong 47,55 \, m/s$$

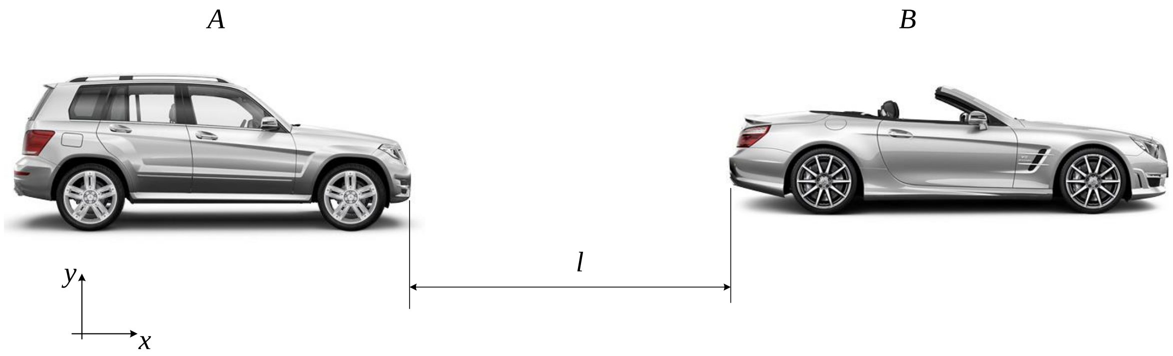
$$a_t = \left(\frac{4}{3} \cdot 47,55^{\frac{1}{4}} \right) \cong 3,5 \, m/s^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_B{}^2}{R} = \frac{47,55^2}{200} \cong 11,305 \, m/s^2$$

$$\vec{v}_B = \underline{\underline{(-47,55\vec{j}) \, m/s}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_n + \vec{a}_t = \underline{\underline{(11,305\vec{i} - 3,5\vec{j}) \, m/s^2}}$$

3.11. Példa: 1, 2, 3, másodperces szabály



Az A és B autók egymást követve azonos sebességgel haladnak (a) lakott területen belül, b) lakott területen kívül és c) autópályán). Mekkora követési távolságot hagyjon A autó vezetője, hogy száraz úton biztonságosan meg tudjon állni, ha B autó hírtelen fékezne? Száraz úton az elérhető maximális lassulás értékét vegyük $7{,}5\, m/s^2$ és a reakcióidő és a fékkésedelmi idő összege 1 másodperc legyen (ez idő alatt a jármű sebessége nem csökken).

Adott:

$v_a = 50\, km/h, \quad v_b = 90\, km/h, \quad v_c = 130\, km/h, \quad a_0 = 7{,}5\, m/s^2$

Feladat:

a) Rajzoljuk meg a fékezés egyszerűsített foronómiai görbéit!

b) Határozza meg melyik szabályt (1, 2, 3, másodperces szabály) alkalmazhatjuk biztonsággal!

Feladat megoldása:

$v_a = 50\, km/h = \frac{50}{3{,}6} = 13{,}89\, m/s$ ►►► $\vec{v}_a = (13{,}89\vec{i})\, m/s$

$v_b = 90\, km/h = \frac{90}{3{,}6} = 25\, m/s$ ►►► $\vec{v}_b = (25\vec{i})\, m/s$

$v_c = 130\, km/h = \frac{130}{3{,}6} = 36{,}12\, m/s$ ►►► $\vec{v}_c = (36{,}12\vec{i})\, m/s$

$a_0 = 7{,}5\, m/s^2$ ►►► $\vec{a}_0 = (-7{,}5\vec{i})\, m/s^2$

$t_0 = 0\, s$

$t_1 = 1\, s$

$t_2 = ?$

$s_1 = ?$

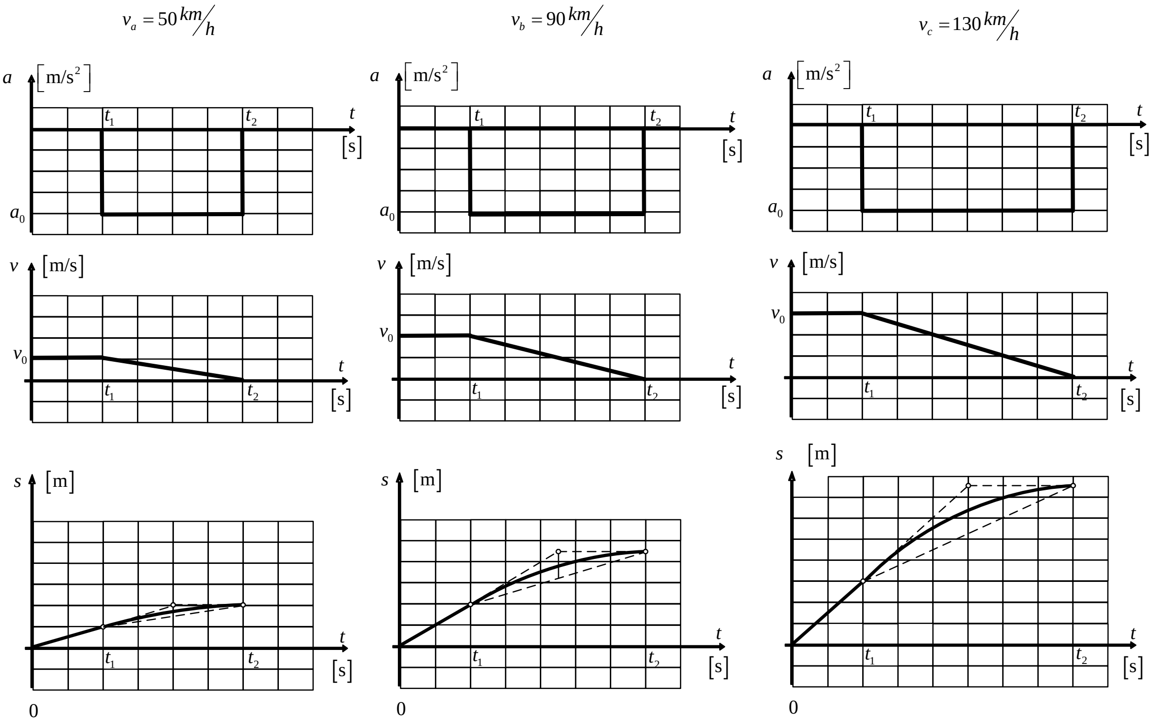
$s_2 = ?$

$$\vec{a}_0 = \left(-7,5\vec{i}\right)\frac{m}{s^2} = \acute{a}lland\acute{o}$$

$$\vec{v}\left(t\right) = \vec{v}_o + \vec{a}_0 t$$

$$\vec{r}\left(t\right) = \vec{r}_0 + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2$$

Fékezés egyszerűsített foronómiai görbéi:



Megállásig eltelt idő:

$$\vec{v}\left(t_2\right) = \vec{v}_2 = \vec{0} = \vec{v}_o + \vec{a}_0 t_{12}$$

A megállásig eltelt idő a reakció idő, a fékkésedelmi idő és a fékezési idő összege:

$$t_2 = t_1 + t_{12}$$

a) lakott területen belül	b) lakott területen kívül	c) autópályán
$\vec{0} = \vec{v}_a + \vec{a}_0 t_{12}$	$\vec{0} = \vec{v}_b + \vec{a}_0 t_{12}$	$\vec{0} = \vec{v}_c + \vec{a}_0 t_{12}$
$\vec{0} = 13,89\vec{i} + \left(-7,5\vec{i}\right)t_{12} \quad /\cdot\vec{i}$	$\vec{0} = 25\vec{i} + \left(-7,5\vec{i}\right)t_{12} \quad /\cdot\vec{i}$	$\vec{0} = 36,12\vec{i} + \left(-7,5\vec{i}\right)t_{12} \quad /\cdot\vec{i}$
$t_{12} = \frac{13,89}{7,5} = \underline{\underline{1,852s}}$	$t_{12} = \frac{25}{7,5} = \underline{\underline{3,333s}}$	$t_{12} = \frac{36,12}{7,5} = \underline{\underline{4,816s}}$
$t_2 = t_1 + t_{12} = 1 + 1,852 = = \underline{\underline{2,852s}}$	$t_2 = t_1 + t_{12} = 1 + 3,333 = = \underline{\underline{4,333s}}$	$t_2 = t_1 + t_{12} = 1 + 4,816 = = \underline{\underline{5,816s}}$

Fékút: (a féknyomás felépülésétől a megállásig megtett út, amíg ténylegesen lassul az autó)

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}_2 = \vec{r}_0 + \vec{v}_o t_{12} + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t_{12}^{\ 2}$$

a) lakott területen belül	b) lakott területen kívül
$\vec{r}_{12} = \vec{v}_a t_{12} + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t_{12}^{\ 2}$	$\vec{r}_{12} = \vec{v}_b t_{12} + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t_{12}^{\ 2}$
$\left(s_{12}\vec{i}\right) = \left(13{,}89\vec{i}\right)\cdot 1{,}852 + \frac{1}{2}\left(-7{,}5\vec{i}\right)1{,}852^2 \quad /\cdot\vec{i}$	$\left(s_{12}\vec{i}\right) = \left(25\vec{i}\right)\cdot 3{,}333 + \frac{1}{2}\left(-7{,}5\vec{i}\right)3{,}333^2 \quad /\cdot\vec{i}$
$s_{12} = 13{,}89\cdot 1{,}852 - \frac{7{,}5\cdot 1{,}852^2}{2} =$ $= \underline{\underline{12{,}86m}}$	$s_{12} = 25\cdot 3{,}333 - \frac{7{,}5\cdot 3{,}333^2}{2} =$ $= \underline{\underline{41{,}67m}}$
c) autópályán	
$\vec{r}_{12} = \vec{v}_c t_{12} + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t_{12}^{\ 2}$	
$\left(s_{12}\vec{i}\right) = \left(36{,}12\vec{i}\right)\cdot 4{,}816 + \frac{1}{2}\left(-7{,}5\vec{i}\right)4{,}816^2 \quad /\cdot\vec{i}$	
$s_{12} = 36{,}12\cdot 4{,}816 - \frac{7{,}5\cdot 4{,}816^2}{2} =$ $= \underline{\underline{86{,}98m}}$	

Fékút meghatározásának másik lehetősége:

$$\vec{v}_2 = \vec{0} = \vec{v}_o + \vec{a}_0 t$$

$$0 = v_o - a_0 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_o}{a_0}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2$$

$$s_{12} = v_o t - \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$s_{12} = v_o \frac{v_o}{a_0} - \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{v_o}{a_0}\right)^2$$

$$s_{12} = \frac{v_o^{\ 2}}{a_0} - \frac{1}{2}\frac{v_o^{\ 2}}{a_0}$$

$$s_{12} = \underline{\underline{\frac{v_o^{\ 2}}{2a_0}}}$$

Tehát a fékút a sebességgel négyzetesen arányos, így kétszer akkora sebességhez négyszer akkora fékút adódik.

Féktávolság: (az észleléstől a megállásig megtett út)

$$s_2 = s_1 + s_{12}$$

A reakció idő és a fékkésedelmi idő alatt megtett út:

$$s_1 = v_0 \cdot t_1$$

a) lakott területen belül	b) lakott területen kívül	c) autópályán
$s_2 = s_1 + s_{12}$	$s_2 = s_1 + s_{12}$	$s_2 = s_1 + s_{12}$
$s_1 = v_a \cdot t_1 = 13,89 \cdot 1 = 13,89m$	$s_1 = v_b \cdot t_1 = 25 \cdot 1 = 25m$	$s_1 = v_c \cdot t_1 = 36,12 \cdot 1 = 36,12m$
$s_2 = 13,89 + 12,86 = \underline{\underline{26,75m}}$	$s_2 = 25 + 41,67 = \underline{\underline{66,67m}}$	$s_2 = 36,12 + 86,98 = \underline{\underline{123,1m}}$

Na igen számoltunk, de mi a válasz a b) kérdésre? Akkor nézzük…

1 másodperces szabály:
Vagyis, ha az elöl haladó autót 1 másodpercnyi távolságra követjük az adott sebességen. Lakott területen belül ez 13,89 m távolságnak felel meg. ($l = 13,89m$)
Amikor B autó fékez A jelű csak a B féklámpájának felvillanásakor érzékeli, hogy neki is fékeznie kell. Vagyis amikor B autó már $7,5 \, m/s^2$ lassulással fékez onnantól 12,86m fékútra van szüksége a megálláshoz. Az A jelű autónak a B féklámpájának felvillanásától számítva pedig 26,75m féktávolság szükséges a megálláshoz. Így a két jármű a megállás pillanatában ütközni fog. (Ugyan ez érvényes lakott területen kívül és autópályán is.)

► 1 másodperces szabály nem jó.

a) lakott területen belül	b) lakott területen kívül	c) autópályán
$\left(s_{fékút} + s_{követési\,távolság}\right) - s_{féktávolság}$	$\left(s_{fékút} + s_{követési\,távolság}\right) - s_{féktávolság}$	$\left(s_{fékút} + s_{követési\,távolság}\right) - s_{féktávolság}$
$\left(12,86 + 13,89\right) - 26,75 = 0m$	$\left(41,67 + 25\right) - 66,67 = 0m$	$\left(86,98 + 36,12\right) - 123,1 = 0m$

2 másodperces szabály:
Vagyis, ha az elöl haladó autót 2 másodpercnyi távolságra követjük az adott sebességen. Lakott területen belül ez 27,78 m távolságnak felel meg. ($l = 27,78m$)
Az előzőek alapján a követési távolság és a fékút összegéből ki kell vonni a féktávolságot és megkapjuk a két jármű távolságát a megállás pillanatában (lásd táblázat).

► 2 másodperces szabály jó.

a) lakott területen belül	b) lakott területen kívül	c) autópályán
$\left(s_{fékút} + s_{követési\,távolság}\right) - s_{féktávolság}$	$\left(s_{fékút} + s_{követési\,távolság}\right) - s_{féktávolság}$	$\left(s_{fékút} + s_{követési\,távolság}\right) - s_{féktávolság}$
$\left(12,86 + 27,78\right) - 26,75 =$ $= 13,89m$	$\left(41,67 + 50\right) - 66,67 =$ $= 25m$	$\left(86,98 + 72,24\right) - 123,1 =$ $= 36,12m$

3 másodperces szabály:
Vagyis, ha az elöl haladó autót 3 másodpercnyi távolságra követjük az adott sebességen. Lakott területen belül ez 41,67 m távolságnak felel meg. ($l = 41,67m$)
Az előzőek alapján a követési távolság és a fékút összegéből ki kell vonni a féktávolságot és megkapjuk a két jármű távolságát a megállás pillanatában (lásd táblázat).

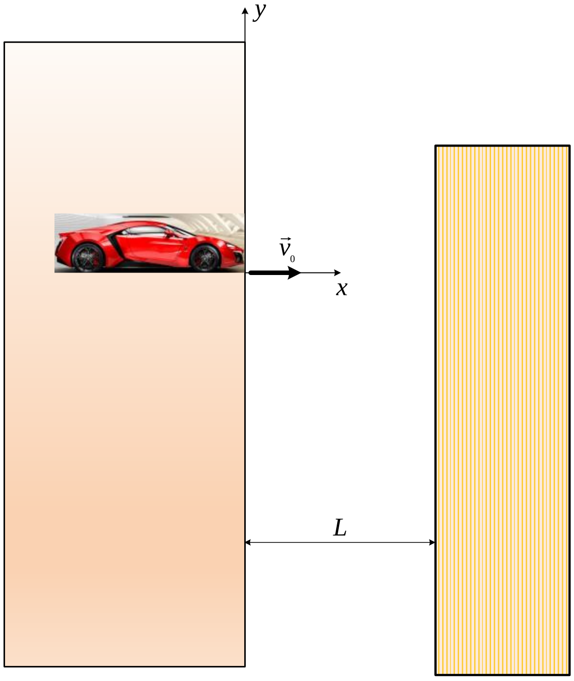
► 3 másodperces szabály jó.

a) lakott területen belül	b) lakott területen kívül	c) autópályán
$\left(s_{fékút} + s_{követési\,távolság}\right) - s_{féktávolság}$	$\left(s_{fékút} + s_{követési\,távolság}\right) - s_{féktávolság}$	$\left(s_{fékút} + s_{követési\,távolság}\right) - s_{féktávolság}$
$\left(12,86 + 41,67\right) - 26,75 =$ $= 27,78m$	$\left(41,67 + 75\right) - 66,67 =$ $= 50m$	$\left(86,98 + 108,36\right) - 123,1 =$ $= 72,24m$

Ne feledjük, hogy a fent számolt eset száraz körülményekre érvényes és arra, hogy a hátul haladó fokozott figyelemmel vezet és fékezés esetén a hátul haladó jármű lassulása megegyezik az elöl haladóéval. Tehát a fenti eset egy ideálisnak nevezhető állapotnak felel meg.

A féktávolságot befolyásolja:
- Jármű sebessége
- Útviszonyok (száraz, nedves, jeges)
- Fékberendezés, gumiabroncsok állapota
- Reakcióidő (fáradtság, kimerültség, alkoholos-, gyógyszeres befolyásoltság)

3.12. Példa: Fast and furious 7 / Halálos iramban 7



Mechanikai modell

A 2015-ben megjelent Halálos iramban 7 mozifilmben az egyik jelenetben a főhősök átugratnak egy Lykan Hypersport sportautóval az Abu Dhabiban található egyik Etihad toronyból a másikba. A Lykan Hypersport sportautó tömege 1400kg, a tornyok távolsága 45m. Mivel az Etihad tornyokban nincs sebességkorlátozás, így két ugrási sebességet nézzünk meg 110 km/h és 150km/h.

Adott:

$$m = 1400kg, \qquad L = 45m, \qquad v_{0a} = 110\, {}^{km}\!/_{h}, \qquad v_{0b} = 150\, {}^{km}\!/_{h}$$

Feladat:

a) Határozza meg, hány méterrel lejjebb csapódik be az autó a másik toronyba! (ha az ugratást ferde hajításként modellezzük)

Feladat megoldása:

$$\vec{a}=\vec{g}=\left(-9,81\vec{j}\right)\frac{m}{s^2}=állandó$$

$$\vec{v}\left(t\right)=\vec{v}_o+\vec{g}t$$

$$\vec{r}\left(t\right)=\vec{r}_0+\vec{v}_o t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$v_{0a}=110\,{}^{km}\!/_{h}=30,55\,{}^{m}\!/_{s} \qquad \vec{v}_{0a}=\left(30,55\vec{i}\right){}^{m}\!/_{s}$$

$$v_{0b}=150\,{}^{km}\!/_{h}=41,66\,{}^{m}\!/_{s} \qquad \vec{v}_{0b}=\left(41,66\vec{i}\right){}^{m}\!/_{s}$$

$$\vec{r}_1=\underbrace{\vec{r}_0}_{=\vec{0}}+\vec{v}_o t_1+\frac{1}{2}\vec{g}t_1^{\,2}$$

$$\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}\right)=\left(v_o\vec{i}\right)t_1-\frac{1}{2}\left(g\vec{j}\right)t_1^{\,2} \qquad \cdot/\vec{i},\vec{j}$$

1) $x_1=v_o t_1$

$$t_{1a}=\frac{x_1}{v_{oa}}=\frac{45m}{30,55\,{}^{m}\!/_{s}}=1,473s \qquad t_{1b}=\frac{x_1}{v_{ob}}=\frac{45m}{41,66\,{}^{m}\!/_{s}}=1,0802s$$

2) $y_1=-\frac{1}{2}gt_1^{\,2}$

$$y_{1a}=-\frac{1}{2}\cdot 9,81\cdot 1,473^2=\underline{\underline{-10,64m}} \qquad y_{1b}=-\frac{1}{2}\cdot 9,81\cdot 1,0802^2=\underline{\underline{-5,723m}}$$

Becsapódási sebesség:

$$\vec{v}_1=\vec{v}_o+\vec{g}t_1$$

$$\left(v_{1x}\vec{i}+v_{1y}\vec{j}\right)=\left(v_o\vec{i}\right)-\left(g\vec{j}\right)t_1 \qquad \cdot/\vec{i},\vec{j}$$

1) $v_{1x}=v_o$

2) $v_{1y}=-gt_1$

1) $v_{1ax}=v_{oa}=30,55\,{}^{m}\!/_{s}$

$v_{1bx}=v_{ob}=41,66\,{}^{m}\!/_{s}$

2) $v_{1ay}=-gt_{1a}=-9,81\cdot 1,473=-14,45\,{}^{m}\!/_{s}$

$v_{1by}=-gt_{1b}=-9,81\cdot 1,0802=-10,597\,{}^{m}\!/_{s}$

$$\vec{v}_{1a}=\left(30,55\vec{i}-14,45\vec{j}\right){}^{m}\!/_{s} \qquad \left|\vec{v}_{1a}\right|=\sqrt{30,55^2+\left(-14,45\right)^2}\cong 33,8\,{}^{m}\!/_{s}=121,68\,{}^{km}\!/_{h}$$

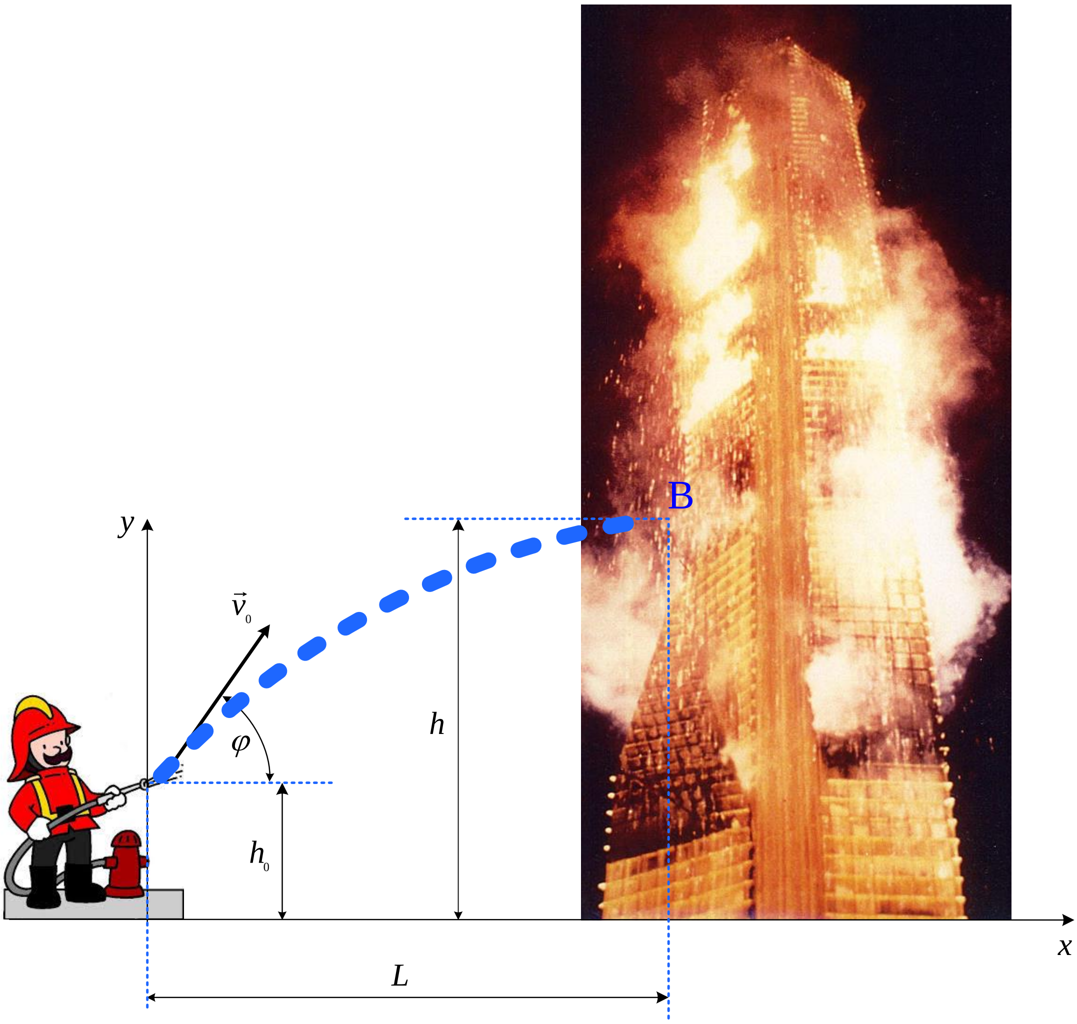
$$\vec{v}_{1b}=\left(41,66\vec{i}-10,597\vec{j}\right){}^{m}\!/_{s}$$

$$\left|\vec{v}_{1b}\right|=\sqrt{41,66^2+\left(-10,597\right)^2}\cong 43\,{}^{m}\!/_{s}=154,8\,{}^{km}\!/_{h}$$

Becsapódás szöge:

$$\alpha=arctg\frac{\left|v_{1y}\right|}{\left|v_{1x}\right|} \qquad \alpha_a=arctg\frac{\left|-14,45\right|}{\left|30,55\right|}=25,31^\circ \qquad \alpha_b=arctg\frac{\left|-10,597\right|}{\left|41,66\right|}=14,27^\circ$$

3.13. Példa: Bajusz tüzet olt



Sajnos baleset történt és kigyullad egy lakóház. A tüzet lánglovagok igyekeznek oltani, köztük Józsi (alias Bajusz) is. Józsi a tűzoltó fecskendőt 1 méter magasan tartja, az épület 30 méter távolságra van tőle és az oltási magasság 9 méter. A tűzoltó fecskendőből kilépő víz sebessége $v_0 = 20\, m/s$.

Adott:

$v_0 = 20\, m/s$, $h_0 = 1m$, $h = 9m$, $L = 30m$

Feladat:

a) Határozza meg, milyen szögben $(\varphi = ?)$ tartsa Bajusz a tűzoltó fecskendőt, hogy a víz elérje a 9 méteres oltási magasságot. (ha ferde hajításként modellezünk)

Feladat megoldása:

$$\vec{a} = \vec{g} = \left(-10\vec{j}\right)\frac{m}{s^2} = állandó$$

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_o+\vec{g}t$$

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_o t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\vec{r}_B=\vec{r}_0+\vec{v}_o t_B+\frac{1}{2}\vec{g}{t_B}^2$$

$$\vec{r}_0=(1\vec{j})m$$

$$\vec{v}_o=20(\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j})\,{}^{m}\!/_{s}$$

$$\vec{r}_B=(30\vec{i}+9\vec{j})m$$

$$(30\vec{i}+9\vec{j})=(1\vec{j})+20(\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j})t_B+\frac{1}{2}(-10\vec{j}){t_B}^2 \qquad \cdot/\vec{i},\vec{j}$$

1) egyenlet

$$30=20\cos\varphi t_B \quad\Rightarrow\quad t_B=\frac{30}{20\cos\varphi}$$

2) egyenlet

$$9=1+20\sin\varphi t_B-\frac{10}{2}{t_B}^2$$

Visszahelyettesítve 1)-et a 2)-be:

$$9=1+20\sin\varphi\frac{30}{20\cos\varphi}-\frac{10}{2}\left(\frac{30}{20\cos\varphi}\right)^2 \qquad \cdot/\cos^2\varphi$$

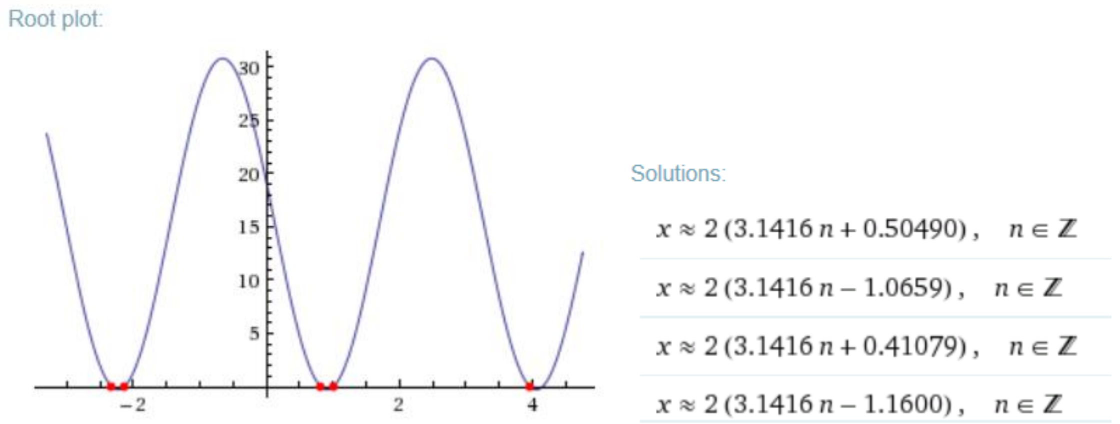
$$8\cos^2\varphi=30\sin\varphi\cos\varphi-\frac{10}{2}\left(\frac{30}{20}\right)^2$$

$$8\cos^2\varphi=30\sin\varphi\cos\varphi-\frac{10}{2}\left(\frac{30}{20}\right)^2$$

$$8\cos^2\varphi=30\sin\varphi\cos\varphi-11,25$$

$$8\cos^2\varphi-30\sin\varphi\cos\varphi+11,25=0$$

Az egyenletet megoldva pl.: wxMaxima programmal vagy www.wolframalpha.com oldalon.



$$n = 0$$

$$\varphi_1 = 1,0098 rad = \frac{1,0098}{3,1415} \cdot 180 = \underline{\underline{57,86^\circ}}$$

$$\varphi_1 = 0,82159 rad = \frac{0,82159}{3,1415} \cdot 180 = \underline{\underline{47,07^\circ}}$$

2. módszer:

$$8\cos^2\varphi + 11,25 = 30\sin\varphi\cos\varphi \qquad / \sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$$

$$8\cos^2\varphi + 11,25 = 30\cos\varphi\sqrt{1-\cos^2\varphi} \qquad /\,\hat{}2$$

$$\left(8\cos^2\varphi + 11,25\right)^2 = \left(30\cos\varphi\sqrt{1-\cos^2\varphi}\right)^2$$

$$64\cos^4\varphi + 180\cos^2\varphi + 126,5625 = 900\cos^2\varphi\left(1-\cos^2\varphi\right)$$

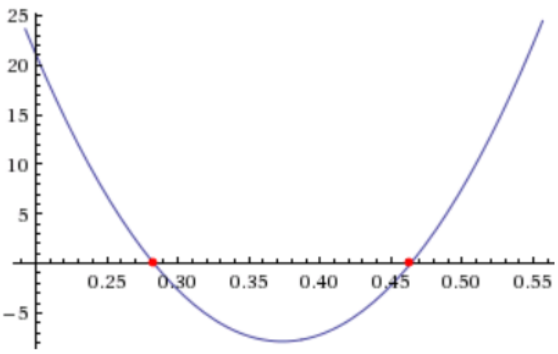
$$64\cos^4\varphi + 180\cos^2\varphi + 126,5625 = 900\cos^2\varphi - 900\cos^4\varphi$$

$$964\cos^4\varphi - 720\cos^2\varphi + 126,5625 = 0 \qquad / z = \cos^2\varphi$$

$$964z^2 - 720z + 126,5625 = 0$$

$$z_1 = 0,283048$$

$$z_2 = 0,46384$$



$$\cos\varphi_1 = \sqrt{z_1} = 0,532022555 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \arccos\sqrt{z_1} \cong \underline{\underline{57,86^\circ}}$$

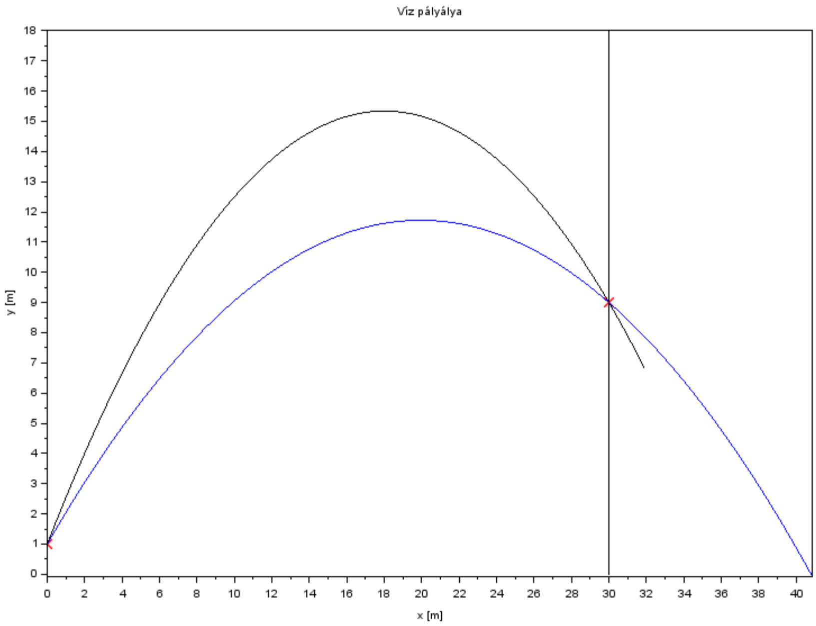
$$\cos\varphi_2 = \sqrt{z_2} = 0,68105800 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \arccos\sqrt{z_2} \cong \underline{\underline{47,07^\circ}}$$

Ábrázoljuk a két pályagörbét pl. Scilab programmal:

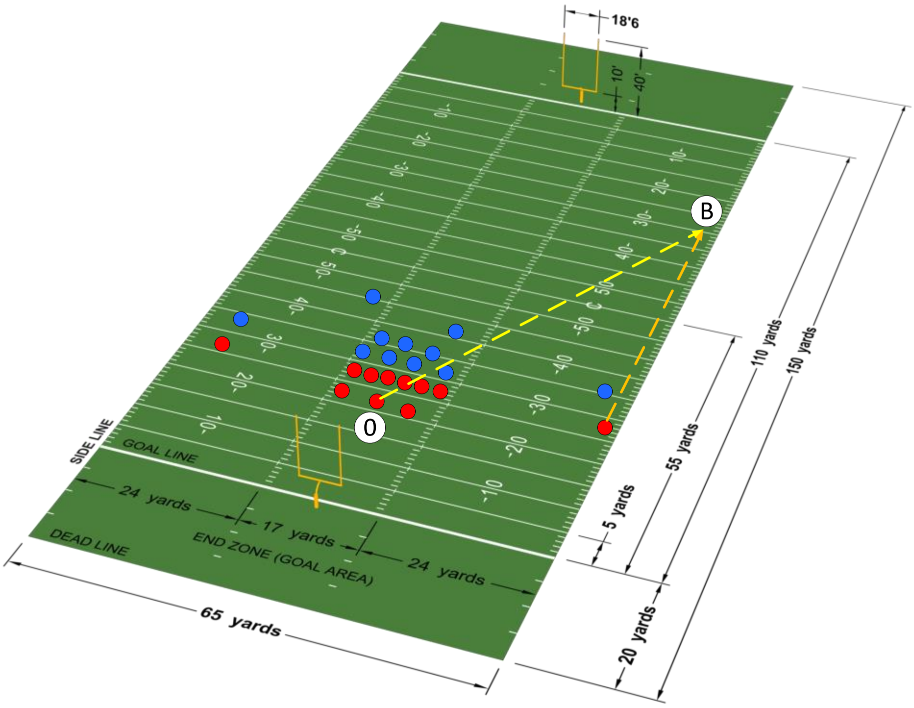
Scilab programkód:

```
//TŰZOLTÓ FECSKENDŐ PÉLDA / MOZGÁSTAN /
//
//20150630
//
clear;
usecanvas(%F);
//
v0=20;     // m/s kezdő sebesség
L=30;      // m távolság
h=9;       // m magasság
// kezdeti hely
r0x=0;     // m
r0y=1;     // m
// locsoló szöge - a feladat megolása
fi1=1.0098;  // rad
fi2=0.82159;  // rad
// kezdeti sebesség x,y koordinátája
v0x1=v0*cos(fi1);
v0y1=v0*sin(fi1);
```

```
v0x2=v0*cos(fi2);
v0y2=v0*sin(fi2);
//
// idő
t=0:0.01:3;
//
//A ház külseje - egy konstans egyenes
q=L*ones(1,21);
w=0:1:20;
//
function y1=f1(t)
   y1=r0x+v0x1*t;
endfunction
//
function y2=f2(t)
   y2=r0y+v0y1*t-0.5*10*(t^2);
endfunction
//
function y3=f3(t)
   y3=r0x+v0x2*t;
endfunction
//
function y4=f4(t)
   y4=r0y+v0y2*t-0.5*10*(t^2);
endfunction
//
// Eredmények kirajzoltatása
plot(L,h,"xr")
plot(r0x,r0y,"xr")
plot2d(q,w,rect=[0,0,40,18])
plot(f1(t),f2(t),"k")
plot(f3(t),f4(t))
xtitle(" Víz pályálya "," x [m]","y [m]")
//
```



3.14. Példa: Amerikai foci



Amerikai focimeccsen a pirosan a következő playben dobójátékot hívnak és az irányító a szélső futónak fogja dobni a labdát. A futónak hogy a megfelelő B pozícióba érjen 40 métert kell futnia. A play hívása után (mikor a futó elindul) 2 másodperccel később az irányító a megbeszélt B helyre dobja a labdát, 45°-os szög alatt. Kérdés, hogy mennyi ideje van a futónak hogy a B pozícióba érjen?

Adott:

$$\alpha = 45^\circ, \qquad t_0 = 2s, \qquad L = 40m, \qquad L_0 = 5m, \quad y_B = 0m$$

Feladat:

a) Kérdés, hogy mennyi ideje van a futónak hogy a B pozícióba érjen?
b) Határozza meg, mekkora lesz a futó átlagsebessége, ha éppen eléri és el tudja kapni a labdát. (ha ferde hajításként modellezünk)

Feladat megoldása:

$$\vec{a} = \vec{g} = \left(-10\vec{j}\right)\frac{m}{s^2} = \acute{a}lland\acute{o}$$

$$\vec{v}\left(t\right) = \vec{v}_o + \vec{g}t$$

$$\vec{r}\left(t\right) = \vec{r}_0 + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Ismeretlenek: x_B - a dobás hossza, t_B - az eltelt idő, amíg a labda a B helyzetbe ér, v_0 - a dobás kezdősebességének nagysága, $\vec{v}_B$ - a labda sebessége az elkapás pillanatában.

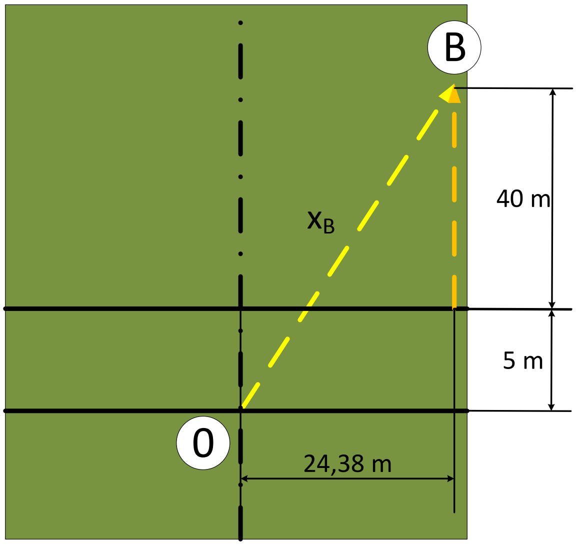
A megoldáshoz a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$v_{Bx} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_{By} = v_0 \sin\alpha - g t_B$$

$$x_B = x_0 + v_{ox} t_B$$

$$y_B = y_0 + v_{0y} t_B - \frac{1}{2} g t_B^{\,2}$$



A dobás hossza a fenti ábra alapján: $x_B = \sqrt{45^2 + 24,38^2} = 51,18m$

Behelyettesítve az ismert adatokat a fenti egyenletekbe:

$$v_{Bx} = v_0 \cos 45^\circ$$

$$v_{By} = v_0 \sin 45^\circ - 10 t_B$$

$$51,18 = 0 + v_0 \cos 45^\circ \, t_B \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{51,18}{t_B \cos 45^\circ}$$

$$0 = 0 + v_0 \sin 45^\circ \, t_B - \frac{1}{2} 10 t_B^{\,2} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{51,18}{t_B \cos 45^\circ} \sin 45^\circ \, t_B - \frac{1}{2} 10 t_B^{\,2} \quad \Rightarrow$$

$t_B = \sqrt{\dfrac{51,18 \cdot \sin 45^\circ}{5 \cdot \cos 45^\circ}} = \sqrt{\dfrac{51,18}{5}} = 3,199s$ - az eltelt idő, amíg a labda a B helyzetbe ér

$v_0 = \dfrac{51,18}{t_B \cos 45^\circ} = \dfrac{51,18}{3,199 \cos 45^\circ} = 22,63 \, m/s$ - a labda kezdősebességének nagysága.

A labda kezdő sebességvektora ezek alapján:

$$\vec{v}_0 = 22,63\left(\cos 45^\circ \vec{i} + \sin 45^\circ \vec{j}\right) = \left(16\vec{i} + 16\vec{j}\right) m/s$$

A futónak $\Delta t = t_0 + t_B = 2 + 3,199 = 5,199s$ áll a rendelkezésére, hogy a B pozícióba érjen.

A futó átlagsebessége, hogy éppen elkapja a labdát:

$$\Delta t = t_0 + t_B = 2 + 3,199 = 5,199s$$

$$\Delta s = L = 40m$$

$$\Delta v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{40}{5,199} \cong 7,69 \, m/s = 27,684 \, km/h$$

Ez 100m-es síkfutásra vetítve egy $t_{100m} = \dfrac{100}{7,69} \cong 13s$ sebességű futásnak felel meg.

3.15. Példa: Repülő sebessége

Egy repülő 5000 m magasan repül alkonyatkor. Számítsa ki milyen gyorsan kell repülnie ahhoz, hogy a nap ne bukjon a horizont alá! Vagyis a nap magassága az égbolton ne változzon.

Feladat megoldása:

Föld kerülete: 40075 km
Föld átmérője: d=12742 km
Föld sugara: r=6371 km

Föld fordulatszáma: n=1 fordulat/nap = 1/1440 fordulat/perc

Föld szögsebessége: $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi}{60}\frac{1}{1440} \cong 7,2722 \cdot 10^{-5}\ {rad}/{s}$

5000 m magasan lévő pont sebessége:

$$v = R\omega = (r+5000)\omega = (6371000+5000)\cdot 7,2722\cdot 10^{-5} = 463,675472\ {m}/{s}$$

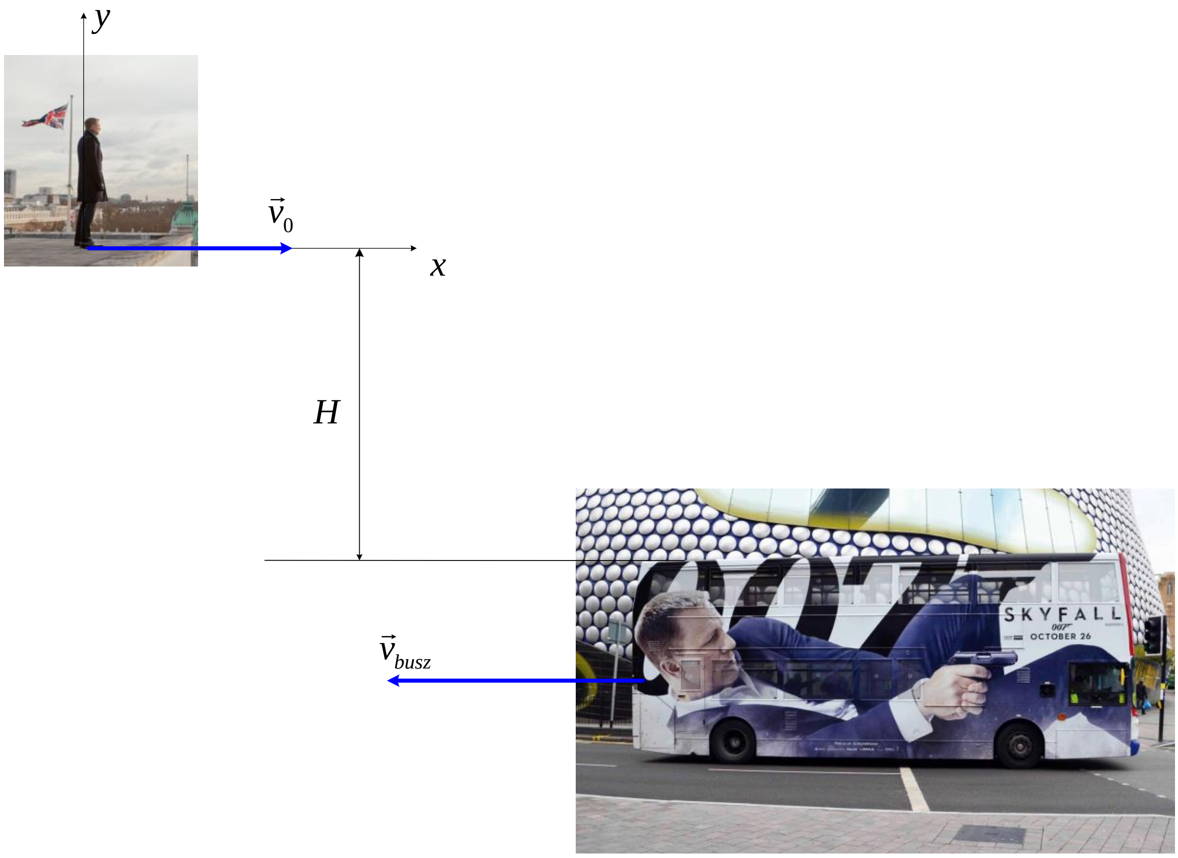
$$463,675472 \cdot 3,6 = 1669,23\ {km}/{h}$$

Hangsebesség: $1\,Mach \cong 1225\ {km}/{h}$

A repülő szükséges sebessége ahhoz, hogy a nap magassága ne változzon az égbolton:

$$\underline{\underline{1669,23\ {km}/{h} = 1,3626\ Mach}}$$

3.16. Példa: James Bond



James Bond 5 m-es magasságból egy busz tetejére szeretne ugrani.

Adott:

$$H = 5m, \qquad \vec{v}_0 = \left(0,5\,\vec{i}\right) {}^{m}\!/_{s}, \qquad v_{busz} = 50\, {}^{km}\!/_{h} = \frac{50}{3,6} \cong 13,889\, {}^{m}\!/_{s}$$

Feladat:

a) Határozza meg, hogy a busznak milyen messze kell lennie az ugrás helyétől (x irányú távolság) az ugrás pillanatában! (ha az ugratást ferde hajításként modellezzük)

Feladat megoldása:

Vektoregyenletek:

$$\vec{a} = \vec{g} = \left(-9,81\vec{j}\right)\frac{m}{s^2} = állandó$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{g}t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\vec{r}_A = \underbrace{\vec{r}_0}_{=\vec{0}} + \vec{v}_o t_1 + \frac{1}{2}\vec{g}t_A^{\,2}$$

$$\left(x_A\vec{i} + y_A\vec{j}\right) = \left(v_o\vec{i}\right)t_1 - \frac{1}{2}\left(g\vec{j}\right)t_A^{\,2} \qquad \cdot/\vec{i},\vec{j}$$

1) $x_A = v_o t_A$

$$x_A = v_o t_A = 0,5\cdot 1,00964 = \underline{\underline{0,50482m}}$$

2) $y_A = -\frac{1}{2}gt_A^{\,2}$

$$t_A^{\,2} = \frac{y_A}{-\frac{g}{2}} = \frac{-5}{-\frac{9,81}{2}} = 1,019368s^2 \quad \Rightarrow \quad t_A = \sqrt{1,019368} = \underline{\underline{1,00964s}}$$

Becsapódási sebesség:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_o + \vec{g}t_A$$

$$\left(v_{Ax}\vec{i} + v_{Ay}\vec{j}\right) = \left(v_o\vec{i}\right) - \left(g\vec{j}\right)t_A \qquad \cdot/\vec{i},\vec{j}$$

1) $v_{Ax} = v_o$

2) $v_{Ay} = -gt_A$

1) $v_{Ax} = v_o = 0,5\, m/s$

2) $v_{Ay} = -gt_A = -9,81\cdot 1,00964 = -9,9045684\, m/s$

$$\vec{v}_A = \left(0,5\vec{i} - 9,9045684\vec{j}\right) m/s$$

$$\left|\vec{v}_A\right| = \sqrt{0,5^2 + \left(-9,9045684\right)^2} \cong 9,9172\, m/s = 35,70192\, km/h$$

Busz távolsága az ugrás pillanatában:

A busz az ugrás időtartama t_A alatt a következő távolságot teszi meg:

$$x_{busz} = v_{busz}t_A = 13,889\cdot 1,00964 \cong 14,023m$$

Ahhoz, hogy Bond pont a busz elejére ugorjon a busznak a következő távolságra kell lennie:

$$x_{\max} = x_{busz} + x_A = 14,023 + 0,50482 = \underline{\underline{14,52782m}}$$