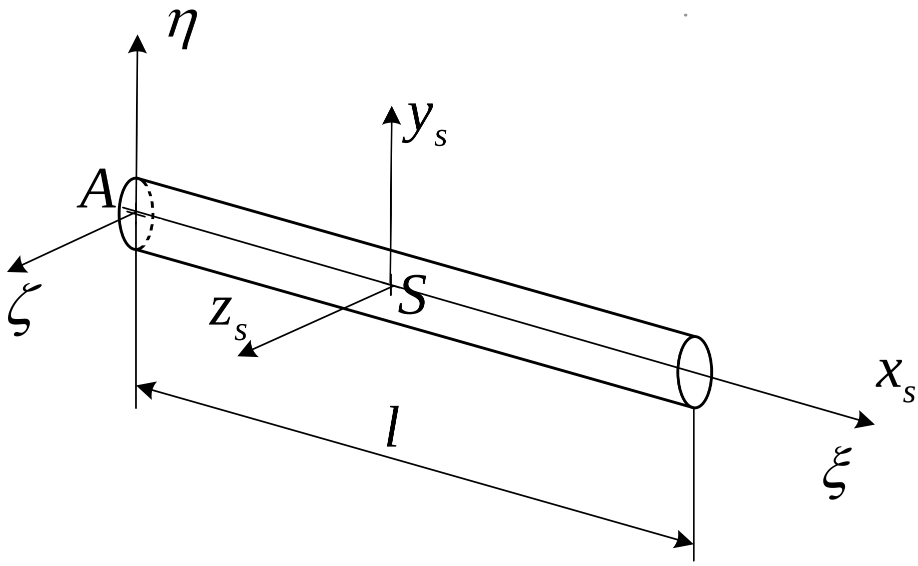
MECHANIKA-MOZGÁSTAN

TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKOK
(kidolgozta: Fehér Lajos)

A következőkben különböző merev testek tehetetlenségi nyomatékait fogjuk kiszámolni.

3.1. Példa: Pálca tehetetlenségi nyomatéka



$$J_y = J_z = \int_{(m)} x^2 dm = \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \underbrace{\left(\rho A dx\right)}_{dm} = \left[\frac{x^3}{3}\rho A\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \left[\frac{l^3}{8\cdot 3}\rho A - \left(-\frac{l^3}{8\cdot 3}\rho A\right)\right] =$$

$$= \rho A\left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24}\right) = \frac{l^3}{12}\rho A$$

A pálca teljes tömege: $m = l\rho A$

A pálca súlyponton átmenő y és z tengelyére számolt tehetetlenségi nyomatéka:

$$J_y = J_z = \frac{l^3}{12}\rho A = \underline{\underline{\frac{1}{12} m l^2}}$$

$$J_\eta = J_\zeta = \int_{(m)} x^2 dm = \int_{x=0}^{l} x^2 \underbrace{\left(\rho A dx\right)}_{dm} = \left[\frac{x^3}{3}\rho A\right]_0^l = \left[\frac{l^3}{3}\rho A - 0\right] = \frac{l^3}{3}\rho A$$

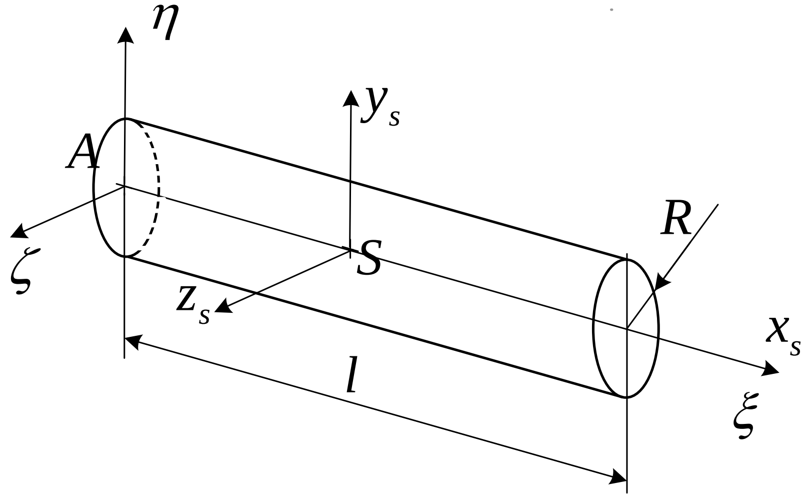
A pálca teljes tömege: $m = l\rho A$

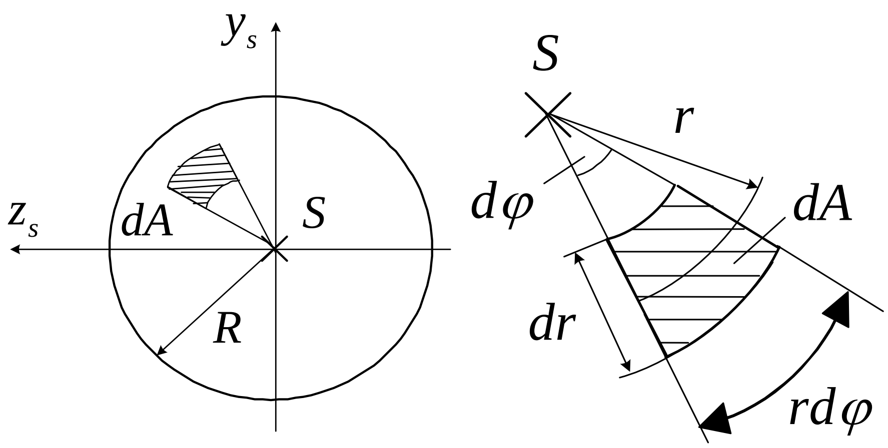
A pálca A ponton átmenő η és ζ tengelyére számolt tehetetlenségi nyomatéka:

$$J_\eta = J_\zeta = \frac{l^3}{3}\rho A = \underline{\underline{\frac{1}{3} m l^3}}$$

Steiner tétellel számolva ugyan ezt az eredményt kapnánk.

3.2. Példa: Rúd, tárcsa, kerék tehetetlenségi nyomatéka





A rúd, tárcsa súlyponton átmenő *x* tengelyére számolt tehetetlenségi nyomatéka:

$$J_x = \int\limits_{(m)} (y^2+z^2)dm = \int\limits_{(V)} (y^2+z^2)\underbrace{\rho\, dV}_{dm} = \int\limits_{(V)} r^2 \underbrace{\rho\, dV}_{dm} = \int\limits_{x=-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \int\limits_{r=0}^{R} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} r^2\, \rho \underbrace{r\, d\varphi\, dr\, dx}_{dV} = \rho\, 2\pi l \int\limits_{r=0}^{R} r^3 dr =$$

$$= \rho\, 2\pi l \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \rho\, 2\pi l \left[\frac{R^4}{4} - 0\right] = \rho\, \pi l \frac{R^4}{2} = \frac{1}{2}\underbrace{R^2\, \pi\, l}_{=V}\, \rho\, R^2 = \frac{1}{2} V \rho\, R^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} m\, R^2}}$$

A rúd, tárcsa súlyponton átmenő *y* és *z* tengelyére számolt tehetetlenségi nyomatéka:

$$J_y = J_z = \int\limits_{(m)} (x^2+y^2)dm = \int\limits_{(m)} (x^2+z^2)dm = \int\limits_{(V)} x^2 \underbrace{\rho\, dV}_{dm} + \int\limits_{(V)} z^2 \underbrace{\rho\, dV}_{dm} = *$$

$$\int\limits_{(V)} x^2 \rho\, dV = \int\limits_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \rho A dx = \rho A \int\limits_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \rho A \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \rho A \left[\frac{l^3}{8\cdot 3} - \left(-\frac{l^3}{8\cdot 3}\right)\right] = \rho A 2 \frac{l^3}{24} =$$

$$= \rho A \frac{l^3}{12} = \underbrace{\rho A l}_{m} \frac{l^2}{12} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$\int_{(V)} z^2 \rho\, dV = \int_{(A)} z^2 \underbrace{\rho\, l dA}_{dV} = \rho\, l \int_{(A)} z^2 dA = \rho\, l\, I_y = \rho\, l\, \frac{D^4 \pi}{64} = \rho\, l\, \frac{(2R)^4 \pi}{64} = \rho\, l\, \frac{16R^4 \pi}{64} = \rho\, l\, \frac{R^4 \pi}{4} =$$

$$= \underbrace{\rho\, l \pi R^2}_{m} \frac{R^2}{4} = \frac{1}{4} m R^2$$

A rúd, tárcsa súlyponton átmenő *y* és *z* tengelyére számolt tehetetlenségi nyomatéka így:

$$* = J_y = J_z = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm = \int_{(V)} x^2 \underbrace{\rho\, dV}_{dm} + \int_{(V)} z^2 \underbrace{\rho\, dV}_{dm} = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m R^2 = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{12} 3 m R^2 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{12} m \left(3R^2 + l^2\right)}}$$

A rúd, kerék *A* ponton átmenő η és ζ tengelyére számolt tehetetlenségi nyomatéka:

$$J_\eta = J_\varsigma = \int_{(m)} (\xi^2 + \eta^2) dm = \int_{(m)} (\xi^2 + \zeta^2) dm = \int_{(V)} \xi^2 \rho\, dV + \int_{(V)} \zeta^2 \rho\, dV = *$$

$$\int_{(V)} \xi^2 \rho\, dV = \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \xi^2 \rho A d\xi = \rho A \int_{\xi=0}^{l} \xi^2 d\xi = \rho A \left[\frac{\xi^3}{3}\right]_l^l = \rho A \left[\frac{l^3}{3} - 0\right] = \rho A \frac{l^3}{3} =$$

$$= \underbrace{\rho A l}_{m} \frac{l^2}{3} = \frac{1}{3} m l^2$$

$$\int_{(V)} \zeta^2 \rho\, dV = \int_{(A)} \zeta^2 \underbrace{\rho\, l dA}_{dV} = \rho\, l \int_{(A)} \zeta^2 dA = \rho\, l\, I_\eta = \rho\, l\, \frac{D^4 \pi}{64} = \rho\, l\, \frac{(2R)^4 \pi}{64} = \rho\, l\, \frac{16R^4 \pi}{64} = \rho\, l\, \frac{R^4 \pi}{4} =$$

$$= \underbrace{\rho\, l \pi R^2}_{m} \frac{R^2}{4} = \frac{1}{4} m R^2$$

A rúd, kerék *A* ponton átmenő η és ζ tengelyére számolt tehetetlenségi nyomatéka így:

$$* = J_\eta = J_\varsigma = \int_{(m)} (\xi^2 + \zeta^2) dm = \int_{(V)} \xi^2 \underbrace{\rho\, dV}_{dm} + \int_{(V)} \zeta^2 \underbrace{\rho\, dV}_{dm} = \frac{1}{3} m l^2 + \frac{1}{4} m R^2 = \frac{1}{12} 4 m l^2 + \frac{1}{12} 3 m R^2 =$$

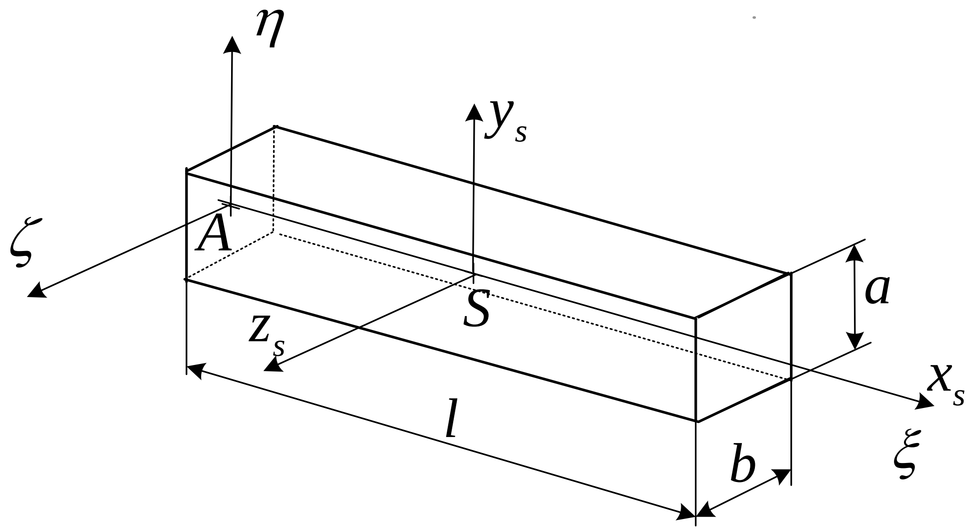
$$= \underline{\underline{\frac{1}{12} m \left(3R^2 + 4l^2\right)}}$$

Steiner tétellel ellenőrizve:

$$J_\eta = J_\varsigma = J_y + m\left(x_{SA}^2 + z_{SA}^2\right) = \frac{1}{12} m \left(3R^2 + l^2\right) + m\left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 0\right) = \frac{1}{12} m 3R^2 + \frac{1}{12} m l^2 + m \frac{l^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{12} m 3R^2 + \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{12} 3 m l^2 = \frac{1}{12} m 3R^2 + \frac{1}{12} 4 m l^2 = \underline{\underline{\frac{1}{12} m \left(3R^2 + 4l^2\right)}}$$

3.3. Példa: Hasáb tehetetlenségi nyomatéka



A hasáb súlyponton átmenő x tengelyére számolt tehetetlenségi nyomatéka:

$$J_x = \int_{(m)} \left(y^2+z^2\right)dm = \int_{(V)} \left(y^2+z^2\right)\underbrace{\rho dV}_{dm} = \int_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{y=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(y^2+z^2\right)\rho \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV} =$$

$$= \rho \int_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{y^3}{3}+z^2 y\right]_{y=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx\,dz = \rho \int_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{a^3}{8\cdot 3}+z^2\frac{a}{2}-\left(-\frac{a^3}{8\cdot 3}-z^2\frac{a}{2}\right)\right] dx\,dz =$$

$$= \rho \int_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{a^3}{12}+z^2 a\right] dx\,dz = \rho \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{a^3}{12}z+\frac{z^3}{3}a\right]_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx =$$

$$= \rho \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{a^3}{12}\frac{b}{2}+\frac{b^3}{8\cdot 3}a-\left(-\frac{a^3}{12}\frac{b}{2}-\frac{b^3}{8\cdot 3}a\right)\right] dx = \rho \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{a^3 b}{12}+\frac{ab^3}{12}\right] dx = \rho\left[\frac{a^3 b}{12}x+\frac{ab^3}{12}x\right]_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} =$$

$$= \rho\left[\frac{a^3 b}{12}\frac{l}{2}+\frac{ab^3}{12}\frac{l}{2}-\left(-\frac{a^3 b}{12}\frac{l}{2}-\frac{ab^3}{12}\frac{l}{2}\right)\right] = \rho\left[\frac{a^3 b}{12}l+\frac{ab^3}{12}l\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\underbrace{\rho abl}_{m}\left[a^2+b^2\right] = \underline{\underline{\frac{1}{12}m\left[a^2+b^2\right]}}$$

A hasáb súlyponton átmenő *y* tengelyére számolt tehetetlenségi nyomatéka:

$$J_y = \int_{(m)} \left(x^2+z^2\right) dm = \int_{(V)} \left(x^2+z^2\right) \underbrace{\rho dV}_{dm} = \int_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{y=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(x^2+z^2\right)\rho \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV} =$$

$$= \rho \int_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[x^2 y + z^2 y\right]_{y=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx\,dz = \rho \int_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[x^2\frac{a}{2} + z^2\frac{a}{2} - \left(-x^2\frac{a}{2} - z^2\frac{a}{2}\right)\right] dx\,dz =$$

$$= \rho \int_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[x^2 a + z^2 a\right] dx\,dz = \rho \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[x^2 az + \frac{z^3}{3} a\right]_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx =$$

$$= \rho \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[x^2 a\frac{b}{2} + \frac{b^3}{8\cdot 3} a - \left(-x^2 a\frac{b}{2} - \frac{b^3}{8\cdot 3} a\right)\right] dx = \rho \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[x^2 ab + \frac{b^3}{12} a\right] dx = \rho\left[\frac{x^3}{3} ab + \frac{b^3}{12} ax\right]_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} =$$

$$= \rho\left[\frac{l^3}{8\cdot 3} ab + \frac{b^3}{12} a\frac{l}{2} - \left(-\frac{l^3}{8\cdot 3} ab - \frac{b^3}{12} a\frac{l}{2}\right)\right] = \rho\left[\frac{l^3}{12} ab + \frac{b^3}{12} al\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\underbrace{\rho abl}_{m}\left[l^2+b^2\right] = \underline{\underline{\frac{1}{12} m\left[l^2+b^2\right]}}$$

A hasáb súlyponton átmenő *z* tengelyére számolt tehetetlenségi nyomatéka:

$$J_z = \int_{(m)} \left(x^2+y^2\right) dm = \int_{(V)} \left(x^2+y^2\right) \underbrace{\rho dV}_{dm} = \int_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{y=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(x^2+y^2\right)\rho \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV} =$$

$$= \rho \int_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx\,dz = \rho \int_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[x^2\frac{a}{2} + \frac{a^3}{8\cdot 3} - \left(-x^2\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8\cdot 3}\right)\right] dx\,dz =$$

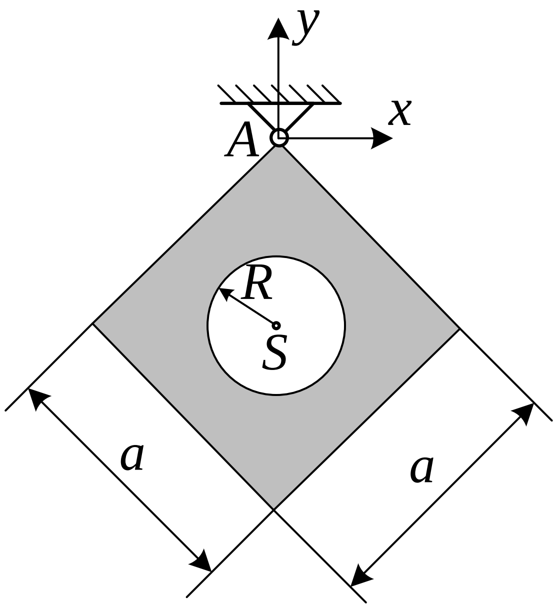
$$= \rho \int_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[x^2 a + \frac{a^3}{12}\right] dx\,dz = \rho \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[x^2 az + \frac{a^3}{12} z\right]_{z=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx =$$

$$= \rho \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[x^2 a\frac{b}{2} + \frac{a^3}{12}\frac{b}{2} - \left(-x^2 a\frac{b}{2} - \frac{a^3}{12}\frac{b}{2}\right)\right] dx = \rho \int_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[x^2 ab + \frac{a^3}{12} b\right] dx = \rho\left[\frac{x^3}{3} ab + \frac{a^3}{12} bx\right]_{x=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} =$$

$$= \rho\left[\frac{l^3}{8\cdot 3} ab + \frac{a^3}{12} b\frac{l}{2} - \left(-\frac{l^3}{8\cdot 3} ab - \frac{a^3}{12} b\frac{l}{2}\right)\right] = \rho\left[\frac{l^3}{12} ab + \frac{a^3}{12} bl\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\underbrace{\rho abl}_{m}\left[l^2+a^2\right] = \underline{\underline{\frac{1}{12} m\left[l^2+a^2\right]}}$$

3.4. Példa: Tehetetlenségi nyomaték



Adott: Az ábrán látható test, ami az *A* ponton átmenő *z* tengely körül végez lengő mozgást. A méretei az ábrán láthatóak a test vastagsága 12 mm. A test anyaga alumínium, sűrűsége $2700\dfrac{kg}{m^3}$.

$$a = 50mm,\quad R = 10mm,\quad v = 12mm,\quad \rho = 2700\frac{kg}{m^3}$$

Feladat:

a) Mekkora az ábrán látható merev test tehetetlenségi nyomatéka az *A* ponton átmenő *z* tengelyre?

Az alap négyzet lemez tömege: $m_{négyzet} = \rho V_{négyzet} = \rho a^2 v = \dfrac{2700}{10^9}50^2 \cdot 12 = 0,081\,kg$

A kifúrt henger tömege: $m_{henger} = \rho V_{henger} = \rho R^2 \pi v = \dfrac{2700}{10^9}10^2 \cdot 3{,}1415 \cdot 12 \simeq 0,01018\,kg$

$$J_z = J_z^{négyzet} - J_z^{henger}$$

Az *S* ponton átmenő és az *A* ponton átmenő *z* tengelyek távolsága:

átló hossza: $d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, így a tengelyek távolsága $\dfrac{d}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Steiner tétel alapján a négyzet tehetetlenségi nyomatéka a z tengelyre:

$$J_z^{négyzet} = \frac{1}{12} m_{négyzet} \left[a^2 + a^2\right] + m_{négyzet} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{12} 0,081\left[50^2 + 50^2\right]}_{=33,75} + \underbrace{0,081\left(\frac{50\sqrt{2}}{2}\right)^2}_{=101,25} =$$

$$= 33,75 + 101,25 = 135\ kgmm^2 = 135 \cdot 10^{-6}\ kgm^2$$

Steiner tétel alapján a kifúrt henger tehetetlenségi nyomatéka a z tengelyre:

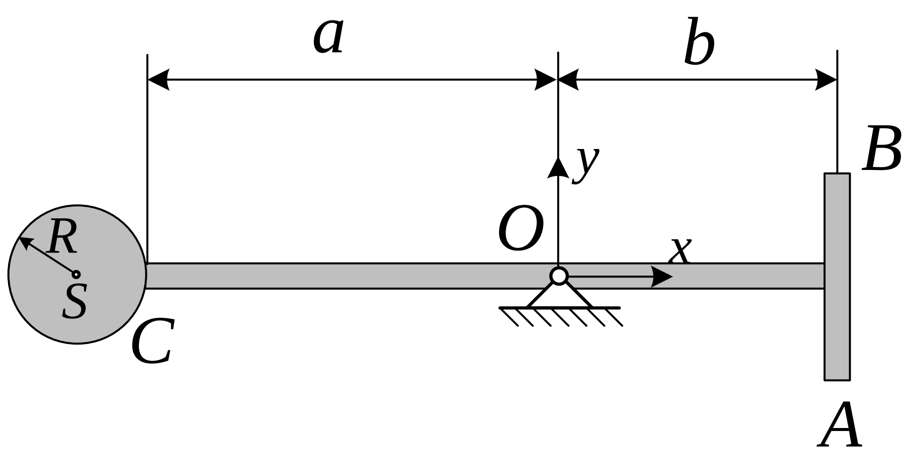
$$J_z^{henger} = \frac{1}{2} m_{henger} R^2 + m_{henger} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} 0,01018 \cdot 10^2 + 0,01018 \left(\frac{50\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0,509 + 12,725 =$$

$$= 13,234\ kgmm^2 = 13,234 \cdot 10^{-6} kgm^2$$

A test tehetetlenségi nyomatéka az A ponti z tengelyre így:

$$J_z = J_z^{négyzet} - J_z^{henger} = 135 \cdot 10^{-6} - 13,234 \cdot 10^{-6} = 121,766 \cdot 10^{-6}\ kgm^2$$

3.5. Példa: Tehetetlenségi nyomaték



Adott: Az ábrán látható test. A szerkezet bal oldalán lévő tárcsa tömege 4 kg. A rudak tömegei 2kg/m.

$a = 800mm, \quad b = 500mm, \quad R = 200mm$

Feladat:

a) Mekkora legyen az AB rúdszakasz hossza (L), hogy a test egyensúlyban legyen?
b) Mekkora az (a) feladatrészben meghatározott mérettel) ábrán látható merev test tehetetlenségi nyomatéka az O ponton átmenő z tengelyre?

a)

$$\vec{g}\left(\left(a+R\right)\cdot m_{tarcsa}+a\cdot 2\cdot\frac{a}{2}\right)=\vec{g}\left(b\cdot 2\cdot\frac{b}{2}+L\cdot 2\cdot b\right)$$

$$\vec{g}\left(\left(800+200\right)\cdot 4+800\cdot 2\cdot\frac{800}{2}\right)=\vec{g}\left(500\cdot 2\cdot\frac{500}{2}+L\cdot 2\cdot 500\right)$$

$$L=\frac{1000\cdot 4+800\cdot 800-500\cdot 500}{2\cdot 500}=\frac{4000+640000-250000}{1000}=\frac{394000}{1000}=\underline{\underline{394mm}}$$

Az AB rúdszakasz hossza $L=394mm$ kell legyen, hogy a szerkezet súlypontja az origóra essen.

b)

A szerkezet tehetetlenségi nyomatéka a z tengelyre:

$$J_z=J_z^{tárcsa}+J_z^{rúd1}+J_z^{rúd2}=$$

$$=\left[\frac{1}{2}m_{tarcsa}R^2+m_{tarcsa}\left(R+a\right)^2\right]+\left[\frac{1}{12}m_{rúd1}\left(a+b\right)^2+m_{rúd1}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]+\left[\frac{1}{12}m_{rúd2}L^2+m_{rúd2}b^2\right]=$$

$$=\left[\frac{1}{2}4\cdot 0,2^2+4\left(0,2+0,2\right)^2\right]+$$

$$+\left[\frac{1}{12}\left(0,8+0,5\right)\cdot 2\cdot\left(0,8+0,5\right)^2+\left(0,8+0,5\right)\cdot 2\cdot\left(0,8-\frac{0,8+0,5}{2}\right)^2\right]+$$

$$+\left[\frac{1}{12}0,394\cdot 2\cdot 0,394^2+0,394\cdot 2\cdot 0,5^2\right]\cong 4,08+0,53+12,2\cong\underline{\underline{16,81\,kgm^2}}$$