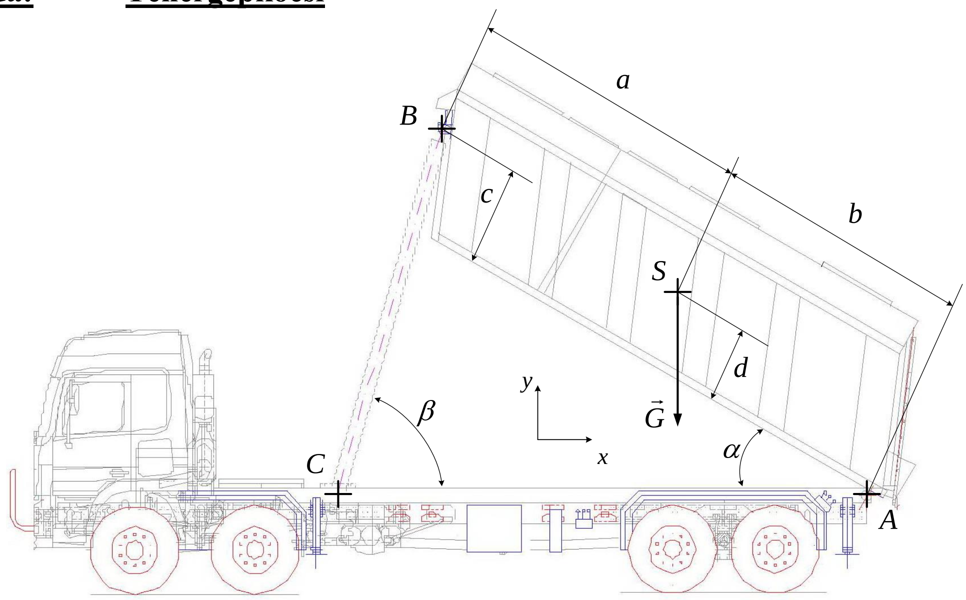
1.1. Példa: Tehergépkocsi



A képen látható tehergépkocsi az adott pozícióban tartja a rakományt.

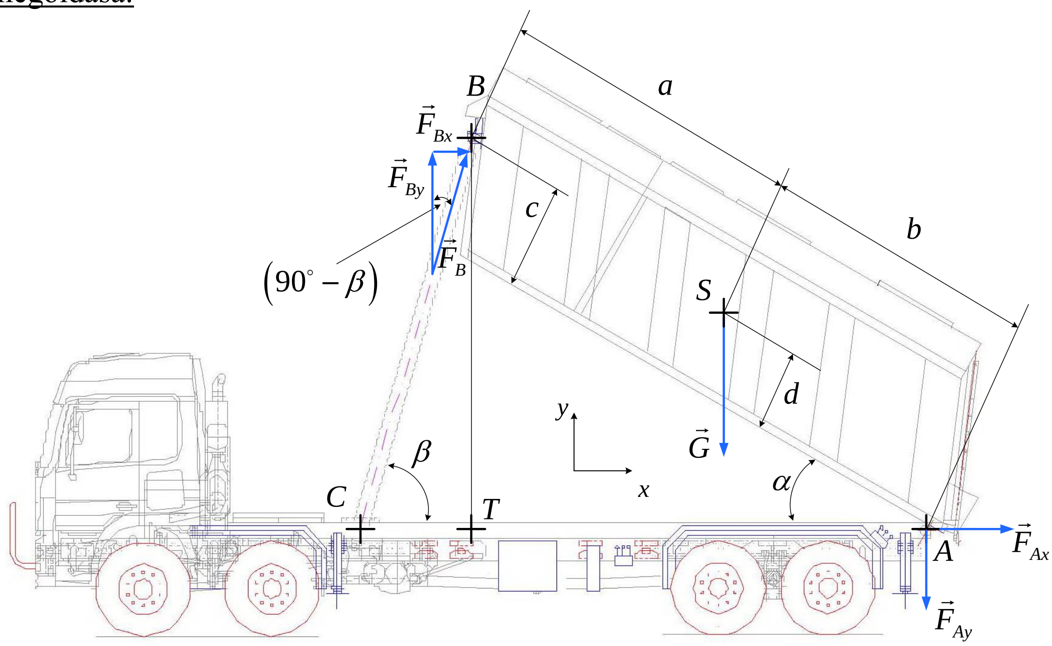
Adott:

$$\alpha = 30^\circ,\ \beta = 70^\circ,\ a = 3000mm,\ \ b = 2000mm,\ \ c = 800mm,\ \ d = 500mm,\ \vec{G} = \left(-100\,\vec{j}\right)kN$$

Feladat:

a) Mekkora erő lép fel a munkahengerben?

Feladat megoldása:



Statikai egyensúlyi egyenletek síkon:

$$\Sigma\vec{F}=\vec{0}=\vec{F}_{Ax}+\vec{F}_{Ay}+\vec{F}_B+\vec{G}$$

$$\vec{M}_A=\vec{0}=\vec{r}_{AB}\times\vec{F}_B+\vec{r}_{AS}\times\vec{G}$$

$$\vec{M}_A=\vec{0}=\vec{r}_{AB}\times\vec{F}_B+\vec{r}_{AS}\times\vec{G}$$

Szinusztétel az CB pontok távolságának meghatározására: $\left|\vec{r}_{CB}\right|=f+c$

$$\frac{\sin\beta}{(a+b)}=\frac{\sin\alpha}{f}\Rightarrow\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{(a+b)}{f}\Rightarrow f=\frac{(a+b)\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{(3000+2000)\sin 30^\circ}{\sin 70^\circ}=2660,4\ mm$$

Szinusztétel az AC pontok távolságának meghatározására: $\left|\vec{r}_{AC}\right|=e$

$$\frac{\sin\beta}{(a+b)}=\frac{\sin\left(180^\circ-(\alpha+\beta)\right)}{e}\Rightarrow\frac{\sin\beta}{\sin\left(180^\circ-(\alpha+\beta)\right)}=\frac{(a+b)}{e}\Rightarrow e=\frac{(a+b)\cdot\sin\left(180^\circ-(\alpha+\beta)\right)}{\sin\beta}=$$

$$=\frac{(3000+2000)\sin 80^\circ}{\sin 70^\circ}=\frac{5000\cdot 0,98481}{0,93969}=\frac{4924,05}{0,93969}=5240,1mm$$

A B pont magasságának meghatározása: $\left|\vec{r}_{TB}\right|=m_B$

$$\sin\beta=\frac{m_B}{c+f}\Rightarrow m_B=(c+f)\sin\beta=(800+2660,4)\sin 70^\circ=3460,4\cdot\sin 70^\circ=3251,7\ mm$$

Pitagorasz tétel az TC pontok távolságának meghatározására: $\left|\vec{r}_{TC}\right|=g$

$$(f+c)^2=g^2+m_B^2\Rightarrow g=\sqrt{(f+c)^2-m_B^2}=\sqrt{3460,4^2-3251,7^2}=1183,6mm$$

Ellenőrzés:

$$\cos\beta=\frac{g}{c+f}\Rightarrow g=(c+f)\cos\beta=(800+2660,4)\cos 70^\circ=3460,4\cdot\cos 70^\circ=1183,6\ mm$$

$$\left|\vec{r}_{AT}\right|=\left|\vec{r}_{AC}\right|-\left|\vec{r}_{TC}\right|=5240,1-1183,6=4056,5mm$$

$$\vec{r}_{AB}=\left|\vec{r}_{AT}\right|\vec{i}+\left|\vec{r}_{TB}\right|\vec{j}=\left(4056,5\vec{i}+3251,7\vec{j}\right)mm$$

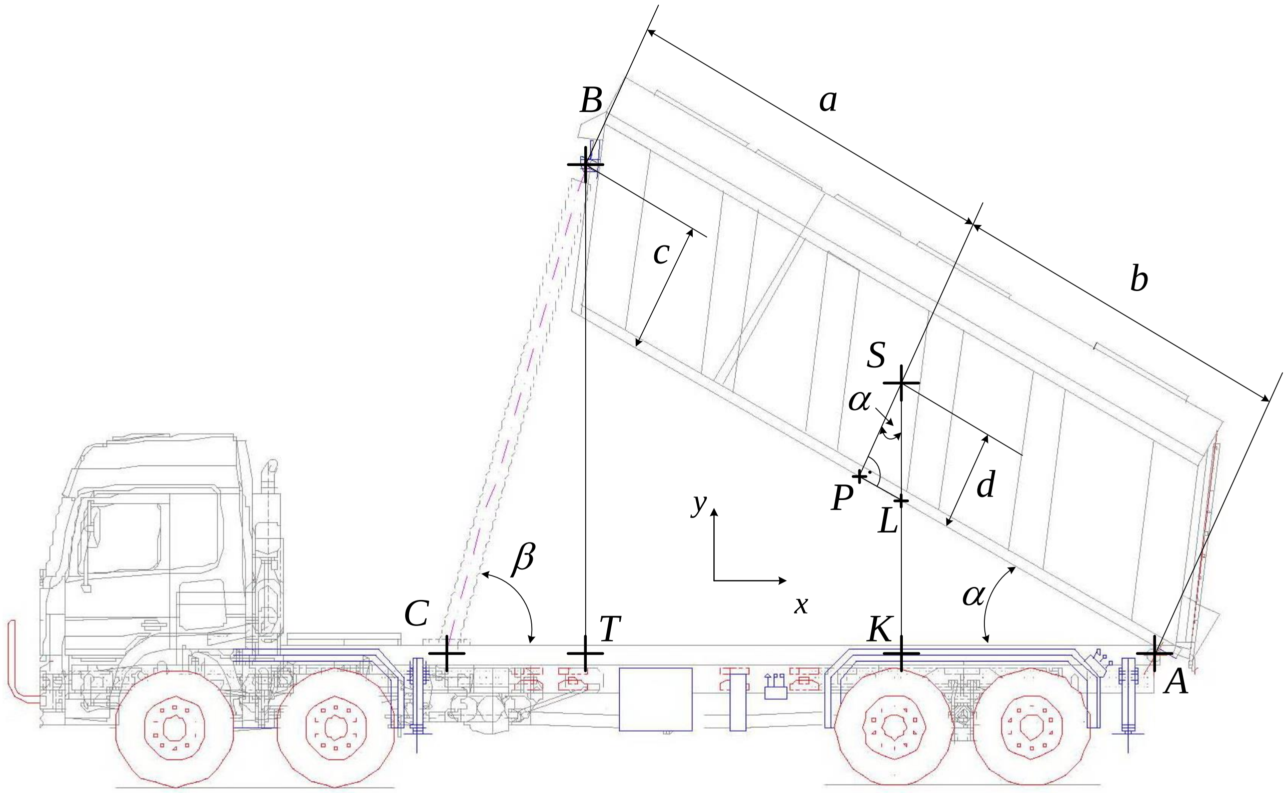
$$\cos\alpha=\frac{d}{\left|\vec{r}_{LS}\right|}\qquad\Rightarrow\qquad\left|\vec{r}_{LS}\right|=\frac{d}{\cos\alpha}=\frac{500}{\cos 30^\circ}=577,35mm$$

$$tg\alpha=\frac{\left|\vec{r}_{LP}\right|}{d}\qquad\Rightarrow\qquad\left|\vec{r}_{LP}\right|=d\ tg\alpha=500\cdot tg30^\circ=288,7mm$$

Szinusztétel az KL pontok távolságának meghatározására: $\left|\vec{r}_{KL}\right|$

$$\frac{\sin\alpha}{\left|\vec{r}_{KL}\right|}=\frac{\sin 90^\circ}{\left(b-\left|\vec{r}_{LP}\right|\right)}\Rightarrow\frac{\sin\alpha}{\sin 90^\circ}=\frac{\left|\vec{r}_{KL}\right|}{\left(b-\left|\vec{r}_{LP}\right|\right)}\Rightarrow\left|\vec{r}_{KL}\right|=\frac{\left(b-\left|\vec{r}_{LP}\right|\right)\cdot\sin\alpha}{\sin 90^\circ}=\frac{(2000-288,7)\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ}=$$

$$=\frac{(2000-288,7)\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ}=\frac{1711,3\cdot 0,5}{1}=855,65\ mm$$



Az AK pontok távolságának meghatározására: $\left|\vec{r}_{AK}\right|$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{r}_{AK}\right|}{\left(b-\left|\vec{r}_{LP}\right|\right)} \Rightarrow \left|\vec{r}_{AK}\right| = \left(b-\left|\vec{r}_{LP}\right|\right)\cos\alpha = \left(2000-288{,}7\right)\cos 30^\circ = 1711{,}3\cdot\cos 30^\circ = 1482mm$$

$$\vec{r}_{AS} = \left|\vec{r}_{AK}\right|\vec{i} + \left|\vec{r}_{KS}\right|\vec{j} = \left|\vec{r}_{AK}\right|\vec{i} + \left(\left|\vec{r}_{KL}\right| + \left|\vec{r}_{LS}\right|\right)\vec{j} = \left(-1482\vec{i} + \left(855{,}65+577{,}35\right)\vec{j}\right) = \left(-1482\vec{i} + 1433\vec{j}\right)mm$$

$$\vec{r}_{AS} = \left(-1482\vec{i} + 1433\vec{j}\right)mm$$

$$\vec{M}_A = \vec{0} = \vec{r}_{AB}\times\vec{F}_B + \vec{r}_{AS}\times\vec{G}$$

$$\vec{r}_{AB}\times\vec{F}_B = \left(4056{,}5\vec{i} + 3251{,}7\vec{j}\right)\times\left(F_{Bx}\vec{i} + F_{By}\vec{j}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4056{,}5 & 3251{,}7 & 0 \\ F_{Bx} & F_{By} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\left(4056{,}5\cdot F_{By} - 3251{,}7\cdot F_{Bx}\right)\vec{k}\right)kNmm$$

$$\vec{r}_{AS}\times\vec{G} = \left(-1482\vec{i} + 1433\vec{j}\right)\times\left(-100\vec{j}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1482 & 1433 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\left(-1482\cdot\left(-100\right) - 0\right)\vec{k}\right) = \left(148200\vec{k}\right)kNmm$$

$$\vec{M}_A = \vec{0} = \left(\left(4056{,}5\cdot F_{By} - 3251{,}7\cdot F_{Bx}\right)\vec{k}\right) + \left(-148200\vec{k}\right)$$

$$M_A = 0 = -r_{AC}F_{By} + r_{AK}G = -5240{,}1 \cdot F_{By} + 1482 \cdot G \Rightarrow F_{By} = \frac{1482 \cdot G}{5240{,}1} = \frac{148200}{5240{,}1} = \underline{\underline{28{,}282 kN}}$$

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} = \vec{F}_{Ay} + \vec{F}_{By} + \vec{G} \Rightarrow F_{Ay} = G - F_{By} = 100 - 28{,}282 = \underline{\underline{71{,}718 kN}}$$

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{Bx} + \vec{F}_{By} = F_B e_B = F_B \left(\cos\beta \vec{i} + \sin\beta \vec{j}\right)$$

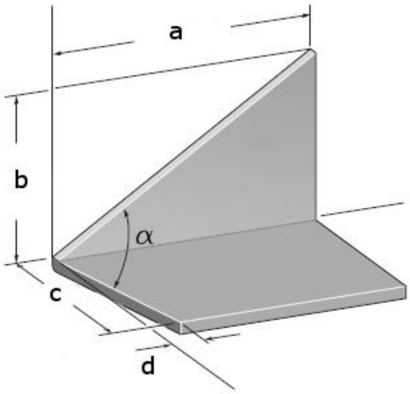
$$tg\beta = \frac{F_{By}}{F_{Bx}} \quad \Rightarrow \quad F_{Bx} = \frac{F_{By}}{tg\beta} = \frac{28{,}282}{tg70^\circ} = \underline{\underline{10{,}29381 kN}}$$

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} = \vec{F}_{Ax} + \vec{F}_{Bx} \Rightarrow F_{Ax} = -F_{Bx} = \underline{\underline{-10{,}29381 kN}}$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_B = \vec{F}_{Bx} + \vec{F}_{By} = \left(10{,}29381 \vec{i} + 28{,}282 \vec{j}\right) kN}}$$

$$\underline{\underline{\vec{F}_A = \vec{F}_{Ax} + \vec{F}_{Ay} = \left(-10{,}29381 \vec{i} + 71{,}718 \vec{j}\right) kN}}$$

1.2. Példa: Lemez



Határozzuk meg a képen látható lemez α szögét!

Adott:

$a = 400mm, \quad b = 260mm, \quad c = 320mm, \quad d = 50mm$

Feladat megoldása:

$$\vec{r}_1 = \left(400\vec{i} + 260\vec{j}\right)mm \qquad \left|\vec{r}_1\right| = \sqrt{400^2 + 260^2} = 477,0744mm$$

$$\vec{r}_2 = \left(50\vec{i} + 320\vec{k}\right)mm \qquad \left|\vec{r}_2\right| = \sqrt{50^2 + 320^2} = 323,8826mm$$

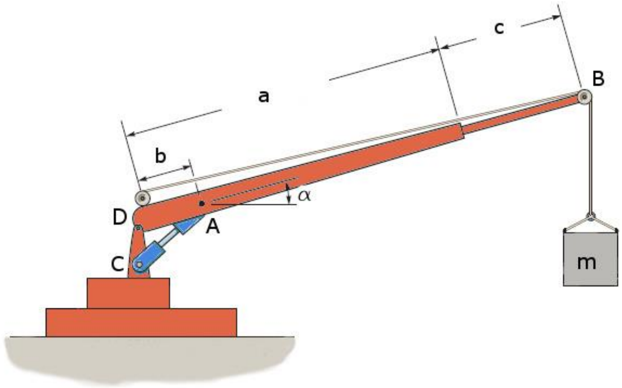
Skaláris szorzás:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \left|\vec{r}_1\right|\left|\vec{r}_2\right|\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1\right|\left|\vec{r}_2\right|}$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \left(400\vec{i} + 260\vec{j}\right)\cdot\left(50\vec{i} + 320\vec{k}\right) = 20000$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1\right|\left|\vec{r}_2\right|} = \frac{20000}{477,0744 \cdot 323,8826} = 0,129436 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(0,129436\right) = \underline{\underline{82,563^\circ}}$$

1.3. Példa: Daru



Az ábrán látható daru emelési szögtartománya $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$ kitolási tartománya pedig $0m \le c \le 6m$ A teher tömege 350 kg. Határozzuk meg a teher által kifejtett nyomatékot az A pontra!

Adott:

$$a = 10m, \quad b = 2m, \quad m = 350kg$$

Feladat megoldása:

$$\vec{G} = m\vec{g} = 350 \cdot \left(-10\vec{j}\right) = \left(-3500\vec{j}\right)N$$

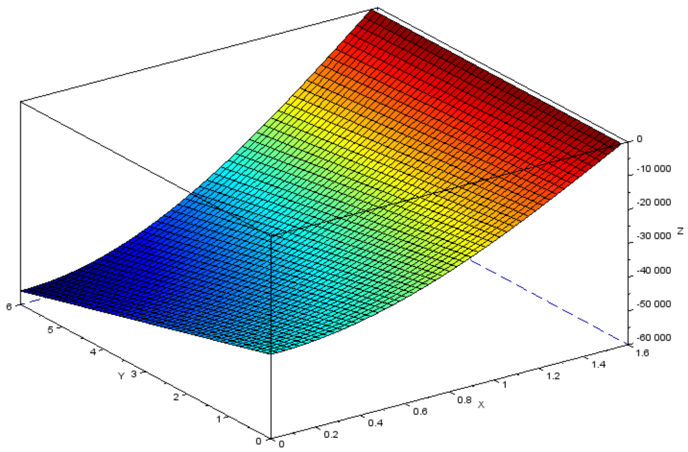
$$\left|\vec{G}\right| = G = 3500N$$

$$M_A = -G\left(a+c\right)\cos\alpha = -3500\left(10+c\right)\cos\alpha$$

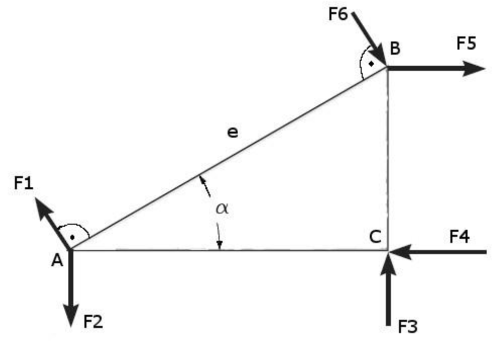
$$M_{A\max} = -G\left(a+c_{\max}\right)\cos 0^\circ = -3500\left(10+6\right)1 = 56000Nm = 56kNm$$

Scilab program kód a megoldásra tetszőleges pozícióban:

```
//Nyomaték meghatározás
//
clear;clc;
//
// Adatok
m=350; //kg
g=10;  //m/s2
a=10; //m
b=2; //m
felosztas=50;
c=linspace(0,6,felosztas);  //m
alfa=linspace(0,90*%pi/180,felosztas);  //fok átváltás radiánra
//
// Számolás
//Ma=-m*g*(a+c)*cos(alfa)
//
for i=1:felosztas
 for j=1:felosztas
  Ma(i,j)=-m*g*(a+c(i))*cos(alfa(j));
 end;
end
//
// Ábrázolás
xset("colormap",jetcolormap(100));
surf(alfa,c,Ma)
///
```



1.4. Példa: **Háromszög**



A fenti síkidomra az ábrán látható irányokban 6 db erő hat. Mekkora legyen az e méret, hogy a síkidomra 400 Nm nyomaték adódjon ki.

Adott:

$$\alpha = 30^\circ,\ F1 = 10N,\quad F2 = 20N,\ F3 = 20N,\ F4 = 80N,\ F5 = 80N,\ F6 = 10N$$

Feladat megoldása:

$$M_A = 400 = -e \cdot F6 - e\sin\alpha \cdot F5 + e\cos\alpha F3 = e\left[-F6 - \sin\alpha \cdot F5 + \cos\alpha F3\right]$$

$$e = \frac{M_A}{\left[-F6 - \sin\alpha \cdot F5 + \cos\alpha F3\right]} = \frac{400}{-10 - \sin 30^\circ \cdot 80 + \cos 30^\circ \cdot 20} = \frac{400}{-10 - 0{,}5 \cdot 80 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 20} =$$

$$= \frac{400}{-50 + 17{,}32} = \frac{400}{-32{,}68} = \underline{\underline{12{,}2399m}}$$

$$M_B = 400 = -e \cdot F1 - e\sin\alpha \cdot F4 + e\cos\alpha F2 = e\left[-F1 - \sin\alpha \cdot F4 + \cos\alpha F2\right]$$

$$e = \frac{M_A}{\left[-F1 - \sin\alpha \cdot F4 + \cos\alpha F2\right]} = \frac{400}{-10 - \sin 30^\circ \cdot 80 + \cos 30^\circ \cdot 20} = \frac{400}{-10 - 0{,}5 \cdot 80 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 20} =$$

$$= \frac{400}{-50 + 17{,}32} = \frac{400}{32{,}68} = \underline{\underline{12{,}2399m}}$$

$$M_C = 400 = -e\cos\alpha \cdot F1\cos\alpha - e\sin\alpha \cdot F6\sin\alpha - e\sin\alpha \cdot F5 + e\cos\alpha F2 =$$

$$= e\left[-\cos\alpha \cdot F1\cos\alpha - \sin\alpha \cdot F6\sin\alpha - \sin\alpha \cdot F5 + \cos\alpha F2\right]$$

$$e = \frac{M_A}{\left[-\cos\alpha \cdot F1\cos\alpha - \sin\alpha \cdot F6\sin\alpha - \sin\alpha \cdot F5 + \cos\alpha F2\right]} =$$

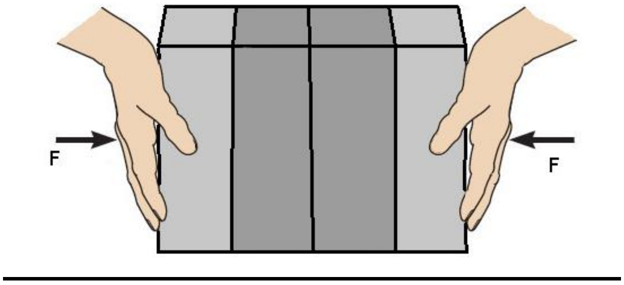
$$= \frac{400}{-10\cos 30^\circ \cos 30^\circ - 10\sin 30^\circ \sin 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot 80 + \cos 30^\circ \cdot 20} =$$

$$= \frac{400}{-10\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - 10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 - 0{,}5 \cdot 80 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 20} =$$

$$= \frac{400}{-7{,}5 - 2{,}5 - 40 + 17{,}32} = \frac{400}{-32{,}68} = \underline{\underline{12{,}2399m}}$$

Mivel 3 db erőpár hat a szerkezetre ezek nyomatékai a sík tetszőleges pontjára ugyan annyi lesz.

1.5. Példa: Súrlódás



Hány darab dobozt tudunk összefogni az ábrán látható módon, ha egy doboz tömege 0,5kg a nyugvásbeli súrlódási tényező a dobozok között 0.6 a dobozok és a kéz között 0,4 értékű. Az összeszorító erő nagysága 100N.

Adott:

$$m = 0,5kg, \quad g = 10\frac{m}{s^2}, \quad \mu_{01} = 0,6 \quad \mu_{02} = 0,4 \quad F = 100N$$

Feladat megoldása:

Két doboz közül a többi doboz kicsúszásának esete:

$$\sum F_y = 0 = -mg \cdot n_1 + 2F_S = -mg \cdot n_1 + 2\mu_{01}F_N = -mg \cdot n_1 + 2\mu_{01}F \quad \Rightarrow$$

$$n_1 = \frac{2\mu_{01}F}{mg} = \frac{2 \cdot 0,6 \cdot 100}{0,5 \cdot 10} = \frac{120}{5} = 24db$$

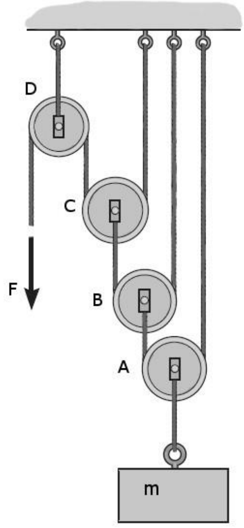
A két kéz közül az összes doboz kicsúszásának esete:

$$\sum F_y = 0 = -mg \cdot n_2 + 2F_S = -mg \cdot n_2 + 2\mu_{02}F_N = -mg \cdot n_2 + 2\mu_{02}F \quad \Rightarrow$$

$$n_2 = \frac{2\mu_{02}F}{mg} = \frac{2 \cdot 0,4 \cdot 100}{0,5 \cdot 10} = \frac{80}{5} = 16db$$

Tehát összesen 16 db dobozt tudunk összefogni.

1.6. Példa: Csigasor



A fenti csigasort mekkora F erővel kell megtartani hogy a 100 kg-os m tömeg nyugalomban maradjon.

Adott:

$m = 100kg$

Feladat megoldása:

$$\vec{G} = m\vec{g} = 100 \cdot \left(-10\vec{j}\right) = \left(-1000\vec{j}\right)N$$

$$\left|\vec{G}\right| = G = 1000N = 1kN$$

Ha a teljes szerkezet nyugalomban van akkor az egyes részeknek is nyugalomban kell lenniük.

A jelű csiga: $\sum F_y = 0 = -G + 2F_{Ay} \;\Rightarrow\; F_{Ay} = \dfrac{G}{2} = \dfrac{1000}{2} = 500N$

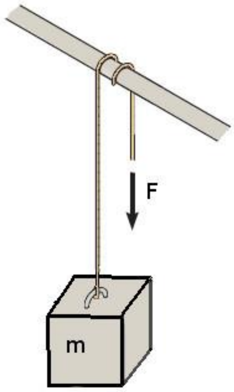
B jelű csiga: $\sum F_y = 0 = -F_{Ay} + 2F_{By} \;\Rightarrow\; F_{By} = \dfrac{F_{Ay}}{2} = \dfrac{G}{4} = \dfrac{500}{2} = 250N$

C jelű csiga: $\sum F_y = 0 = -F_{By} + 2F_{Cy} \;\Rightarrow\; F_{Cy} = \dfrac{F_{By}}{2} = \dfrac{G}{8} = \dfrac{250}{2} = 125N$

$$F = F_{Cy} = \frac{G}{8} = \underline{\underline{125N}}$$

$$\vec{F} = \underline{\underline{\left(-125j\right)N}}$$

1.7. Példa: Kötélsúrlódás



A fenti ábrán látható módon egy 150 kg tömegű test lóg egy kötélen. Határozzuk meg, mekkora kell legyen az F erő, hogy a **hasáb egyensúlyban legyen (ne mozduljon el lefelé)**, ha a kötelet csak átvetjük a rúdon, ha egyszer körbe tekerjük a rúdon (ahogy az ábrán látszik) illetve ha kétszer tekerjük körbe a rúdon. A nyugvásbeli súrlódási tényező a kötél és a rúd között 0,4 értékű.

Adott:

$m = 150kg, \quad \mu_0 = 0,4, \quad \beta = 180^\circ; \quad 360^\circ + 180^\circ = 540^\circ; \quad 2 \cdot 360^\circ + 180^\circ = 900^\circ$

Feladat megoldása:

Kötélsúrlódás alap összefüggése: $\boxed{\frac{F_2}{F_1} = e^{\mu_0 \beta} \quad F_2 > F_1}$

Ennél a feladatnál ez ilyen alakú lesz: $\frac{G}{F} = e^{\mu_0 \beta}$

$G = mg = 1500N$

1. eset: *kötelet csak átvetjük a rúdon*

$$F_1 = \frac{G}{e^{\mu_0 \beta}} = \frac{1500}{e^{0,4 \cdot 180 \frac{\pi}{180}}} = \frac{1500}{e^{0,4 \cdot \pi}} = \frac{1500}{e^{0,4 \cdot 3,1415}} = \frac{1500}{e^{1,2566}} = \frac{1500}{3,5135} = \underline{\underline{426,93N}}$$

2. eset: *egyszer körbe tekerjük a kötelet a rúdon*

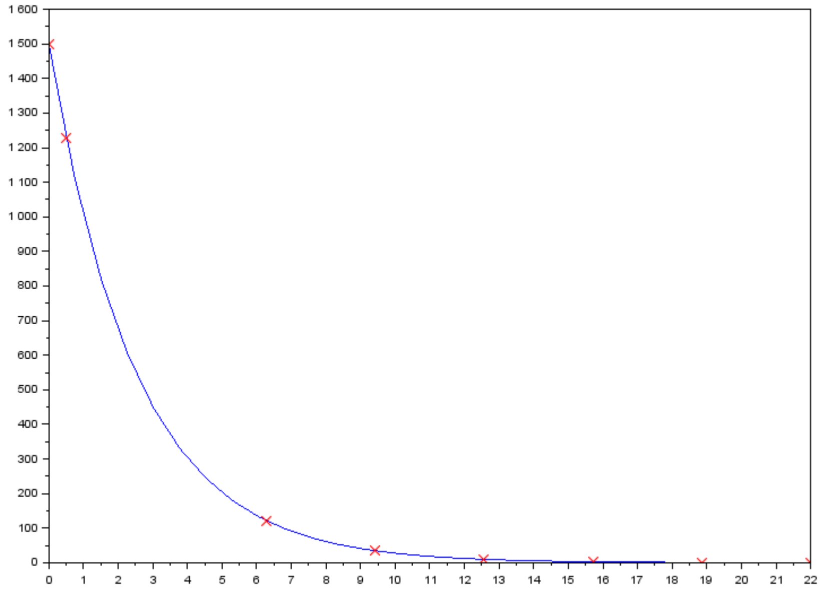
$$F_2 = \frac{G}{e^{\mu_0 \beta}} = \frac{1500}{e^{0,4 \cdot 540 \frac{\pi}{180}}} = \frac{1500}{e^{0,4 \cdot 3\pi}} = \frac{1500}{e^{0,4 \cdot 9,4245}} = \frac{1500}{e^{3,7698}} = \frac{1500}{43,3714} = \underline{\underline{34,585N}}$$

3. eset: *kétszer tekerjük körbe a kötelet a rúdon*

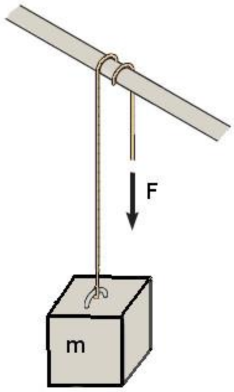
$$F_3 = \frac{G}{e^{\mu_0 \beta}} = \frac{1500}{e^{0,4 \cdot 900 \frac{\pi}{180}}} = \frac{1500}{e^{0,4 \cdot 5\pi}} = \frac{1500}{e^{6,283}} = \frac{1500}{535,39} = \underline{\underline{2,8N}}$$

Scilab program kód a megoldásra:

```
//Kötélsúrlódás
//
clear;clc;
//
// Adatok >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
m=150; //kg
g=10;  //m/s2
mu0=0.4, //nyugvásbeli súrlódási tényező
korul=[0 0.5 1 2 3 4 5 6]; //körül tekerés száma db
felosztas=30;
beta=linspace(0,(6*%pi)+%pi,felosztas);  //radian
//
// Számolás >>>>>>>>>>>>>>>>>>
//
for i=1:size(korul,2)
  if korul(i) < 1 then
    korulha(i)=korul(i);
  else
    korulha(i)=(korul(i).*%pi)+%pi;
  end
end
//
//
F1=(m*g)./(%e^(mu0*beta));
F2=(m*g)./(%e^(mu0*korulha'));
//
// Ábrázolás >>>>>>>>>>>>>>>>>>
plot(beta,F1)
plot(korulha,F2,"xr")
///
```



1.8. Példa: Kötélsúrlódás



A fenti ábrán látható módon egy 150 kg tömegű test lóg egy kötélen. Határozzuk meg, mekkora kell legyen az F erő, hogy a **hasábot felfelé tudjuk megmozdítani**, ha kötelet csak átvetjük a rúdon, ha egyszer körbe tekerjük a rúdon (ahogy az ábrán látszik) illetve ha kétszer tekerjük körbe a rúdon. A nyugvásbeli súrlódási tényező a kötél és a rúd között 0,4 értékű.

Adott:

$m = 150kg, \quad \mu_0 = 0,4, \quad \beta = 180^\circ; \quad 360^\circ + 180^\circ = 540^\circ; \quad 2 \cdot 360^\circ + 180^\circ = 900^\circ$

Feladat megoldása:

Kötélsúrlódás alap összefüggése: $\boxed{\frac{F_2}{F_1} = e^{\mu_0 \beta} \quad F_2 > F_1}$

Ennél a feladatnál ez ilyen alakú lesz: $\frac{F}{G} = e^{\mu_0 \beta}$

$G = mg = 1500N$

1. eset: *kötelet csak átvetjük a rúdon*

$$F_1 = Ge^{\mu_0 \beta} = 1500e^{0,4 \cdot 180 \frac{\pi}{180}} = 1500e^{0,4 \cdot \pi} = 1500e^{0,4 \cdot 3,1415} = 1500e^{1,2566} = 1500 \cdot 3,5135 = \underline{\underline{5270,25N}}$$

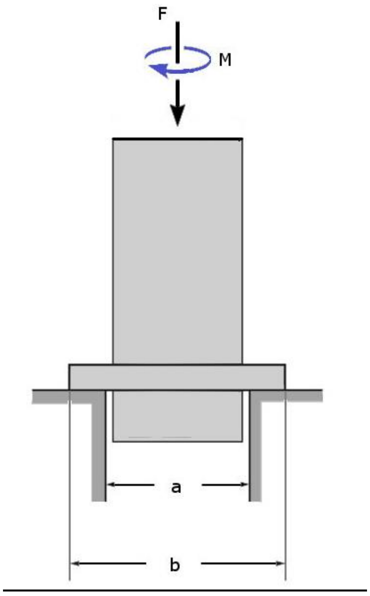
2. eset: *egyszer körbe tekerjük a kötelet a rúdon*

$$F_2 = Ge^{\mu_0 \beta} = 1500e^{0,4 \cdot 540 \frac{\pi}{180}} = 1500e^{0,4 \cdot 3\pi} = 1500e^{0,4 \cdot 9,4245} = 1500e^{3,7698} = 1500 \cdot 43,3714 = \underline{\underline{65057,1N}}$$

3. eset: *kétszer tekerjük körbe a kötelet a rúdon*

$$F_3 = Ge^{\mu_0 \beta} = 1500e^{0,4 \cdot 900 \frac{\pi}{180}} = 1500e^{0,4 \cdot 5\pi} = 1500e^{6,283} = 1500 \cdot 535,39 = \underline{\underline{803085N}}$$

1.9. Példa: Súrlódás



A fenti ábrán látható tengelyre F erő hat, amely konstans nyomáseloszlást okoz az érintkező felületeknél. Határozzuk meg az M nyomaték nagyságát, amelynél a tengely még nyugalomban marad.

Adott:

$$F = 100N, \quad \mu_0 = 0,5, \quad a = 80mm, \quad b = 120mm$$

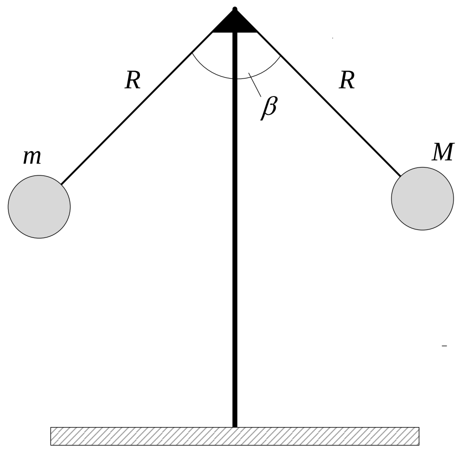
Feladat megoldása:

Alap összefüggés: $\boxed{M = \frac{2}{3}\mu_0 F\left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}\right) \quad R_2 > R_1}$

$$M = \frac{2}{3}\mu_0 F\left(\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(\frac{a}{2}\right)^3}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right) = \frac{2}{3}0,5\cdot 100\left(\frac{\left(\frac{120}{2}\right)^3 - \left(\frac{80}{2}\right)^3}{\left(\frac{120}{2}\right)^2 - \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right) = \frac{2}{3}0,5\cdot 100\left(\frac{152000}{2000}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}0,5\cdot 100\cdot 76 = 2533,33Nmm = \underline{\underline{2,5333Nm}}$$

1.10. Példa: Egyensúly



Adott a fenti ábrán látható szerkezet. Két rúd van összehegesztve β szöget bezárva a végeiken egy-egy tömeg, középen pedig egy rúddal alátámasztva. Határozza meg egyensúlyi helyzetben mekkora szöget zár be a két rúd, amin a tömegek vannak felfüggesztve, a függőleges rúddal!

Adott:

$m = 5kg, \quad M = 10kg, \quad \beta = 90^\circ, \quad R = 0,5m$

Feladat megoldása:

Nyomatéki egyensúlyi egyenlet az alátámasztási pontra felírva.

$$-MR\sin\alpha + mR\sin(\beta - \alpha) = 0$$

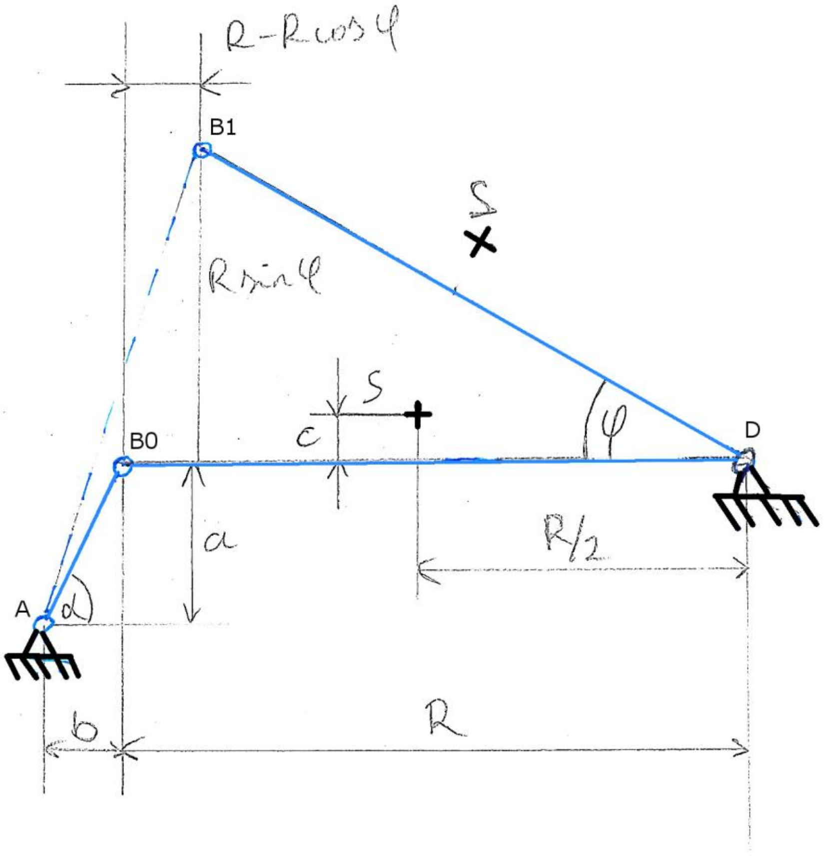
$$-MR\sin\alpha + mR\sin(90^\circ - \alpha) = 0$$

$$mR\sin(90^\circ - \alpha) = MR\sin\alpha$$

$$mR\cos(\alpha) = MR\sin\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = \frac{mR}{MR} = \frac{m}{M} = \frac{5}{10} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = 26,565^\circ}}$$

1.11. Példa: Pótkocsi



Adott a fenti ábrán látható pótkocsi modellje. A plató hossza R a rakomány súlypontja c magasságban van a plató résztől. Az A-B0 rúd a munkahenger modellje, amellyel a rakódóteret emelni lehet. A maximális emelési szög 45 fok. Határozzuk meg, hogy az emelés során mekkora támasztóerő lép fel a munkahengerben.

Adott:

$$a = 0,5m, \quad b = 0,4m, \quad c = 1m, \quad R = 10m, \quad m = 5t, \quad \varphi_0 = 0^\circ, \quad \varphi_{max} = 45^\circ$$

Feladat megoldása:

$$\vec{F}_A = F_A e_A = F_A\left(\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}\right)N$$

$$\vec{r}_{DB1} = R\left(-\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}\right)m$$

$$\vec{G} = m\vec{g} = \left(-50000\vec{j}\right)N$$

$$\vec{r}_{DS} = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + c^2}\left(-\cos\left(\varphi + arctg\frac{c}{R/2}\right)\vec{i} + \sin\left(\varphi + arctg\frac{c}{R/2}\right)\vec{j}\right)$$

$$\vec{M}_D = \vec{0} = \left(\vec{r}_{DB1} \times \vec{F}_A\right) + \left(\vec{r}_{DS} \times \vec{G}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\cos\varphi & R\sin\varphi & 0 \\ F_A\cos\alpha & F_A\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + c^2}\left(-\cos\left(\varphi + arctg\,\frac{c}{R/2}\right)\right) & \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + c^2}\,\sin\left(\varphi + arctg\,\frac{c}{R/2}\right) & 0 \\ 0 & -50000 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\cos\varphi & R\sin\varphi & 0 \\ F_A\cos\alpha & F_A\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\left(-R\cos\varphi\cdot F_A\sin\alpha - R\sin\varphi\cdot F_A\cos\alpha\right)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + c^2}\left(-\cos\left(\varphi + arctg\,\frac{c}{R/2}\right)\right) & \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + c^2}\,\sin\left(\varphi + arctg\,\frac{c}{R/2}\right) & 0 \\ 0 & -50000 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{k}\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + c^2}\left(-\cos\left(\varphi + arctg\,\frac{c}{R/2}\right)\right)(-50000)\right)$$

$$\vec{M}_D = \vec{0} = \vec{k}\left(-R\cos\varphi\cdot F_A\sin\alpha - R\sin\varphi\cdot F_A\cos\alpha\right) + \vec{k}\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + c^2}\left(\cos\left(\varphi + arctg\,\frac{c}{R/2}\right)\right)50000\right) \qquad /\cdot\vec{k}$$

$$F_A\left(r\cos\varphi\cdot\sin\alpha + R\sin\varphi\cdot\cos\alpha\right) = \left(\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + c^2}\left(\cos\left(\varphi + arctg\,\frac{c}{R/2}\right)\right)50000\right)$$

$$\boxed{F_A = \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + c^2}\left(\cos\left(\varphi + arctg\,\frac{c}{R/2}\right)\right)50000\right)}{\left(R\cos\varphi\cdot\sin\alpha + R\sin\varphi\cdot\cos\alpha\right)}}$$

$$\alpha(\varphi=0)=arctg\left(\frac{a}{b}\right)=arctg\left(\frac{0,5}{0,4}\right)=51,34^\circ$$

$$F_A(\varphi=0)=\frac{\left(\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+1^2}\left(\cos\left(0^\circ+\overbrace{arctg\frac{1}{5}}^{11,31^\circ}\right)\right)50000\right)}{\left(10\cos 0^\circ\cdot\sin 51,34^\circ+10\sin 0^\circ\cdot\cos 51,34^\circ\right)}=$$

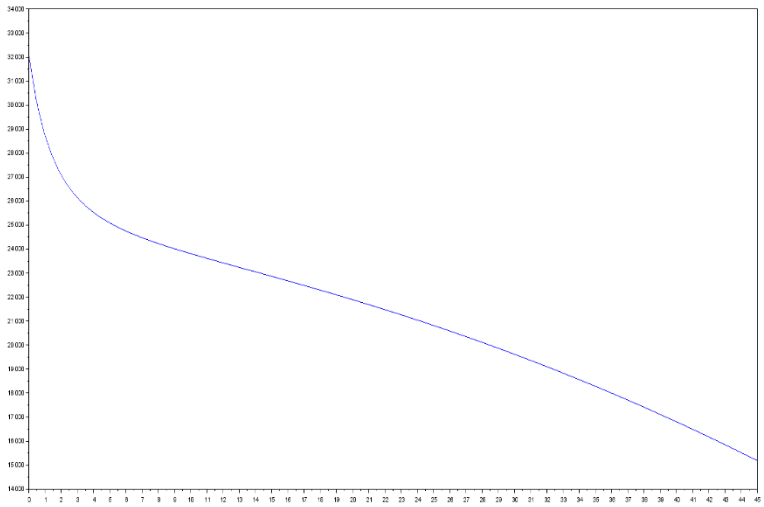
$$=\frac{50000\sqrt{26}\cos\left(11.31^\circ\right)}{10\left(1\cdot 0,7808667+0\right)}=\frac{249999,94}{7,808667}=\underline{\underline{32015,7N}}$$

$$\alpha(\varphi=45^\circ)=arctg\left(\frac{a+R\sin(45^\circ)}{b+\left(R-R\cos(45^\circ)\right)}\right)=arctg\left(\frac{0,5+10\sin(45^\circ)}{0,4+\left(10-10\cos(45^\circ)\right)}\right)=arctg\left(\frac{7,5710678}{3,328932}\right)=66,27^\circ$$

$$F_A(\varphi=45^\circ)=\frac{\left(\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+1^2}\left(\cos\left(45^\circ+\overbrace{arctg\frac{1}{5}}^{11,31^\circ}\right)\right)50000\right)}{\left(10\cos 45^\circ\cdot\sin 66,27^\circ+10\sin 45^\circ\cdot\cos 66,27^\circ\right)}=$$

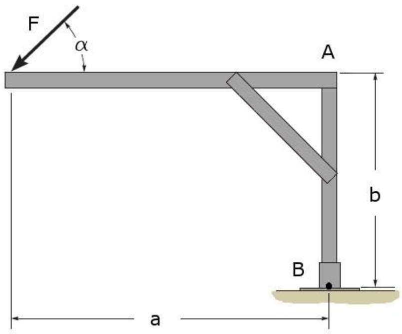
$$=\frac{50000\sqrt{26}\cos\left(56.31^\circ\right)}{10\left(0,6473223+0,2845897\right)}=\frac{141421,11}{9,318812}=\underline{\underline{15175,9N}}$$

Scilab program kód a megoldásra:



```
//Pótkocsi
//
clear; clc;
//
// Adatok >>>>>>>>>>>>>>>>>>
a=0.5 //m
b=0.4  //m
c=1  //m
R=10  //m
m=5; //t
g=10;  //m/s2
fimax=45  //fok
//
felosztas=100;
fi=linspace(0,(fimax*(%pi/180)),felosztas);  //radian
//
// Számolás >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
//
//G=[0 -m*1000*g];
//rDS=sqrt((R/2)^2+c^2).*[-cos(fi+atan(c/(R/2))*(180/%pi)); sin(fi+atan(c/(R/2))*(180/%pi))];
//FAvek=string(FA).*[cos(alf); sin(alf)]
//RDB1=R.*[-cos(fi); sin(fi)];
//
alfa=atan((a+R.*sin(fi))./(b+(R-R.*cos(fi))));
//
FA=sqrt((R/2)^2+c^2).*(cos(fi+atan(c/(R/2)))*m*1000*g)./(R.*cos(fi).*sin(alfa)+R.*sin(fi).*cos(alfa));
//
// Ábrázolás >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
plot(fi.*(180/%pi),FA)
///
```

1.12. Példa: Nyomaték



Adott a fenti ábrán látható szerkezet. Határozzuk meg α függvényében mekkora nyomaték hat az A és B pontokra.

Adott:

$$a = 5m,\quad b = 3m,\quad F = 10N,\quad \alpha_0 = 0^\circ,\quad \alpha_{\max} = 360^\circ$$

Feladat megoldása:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AF} \times \vec{F} = \left(-a\vec{i}\right)\times\left(-F\cos\alpha\vec{i} - F\sin\alpha\vec{j}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & 0 & 0 \\ -F\cos\alpha & -F\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} =$$

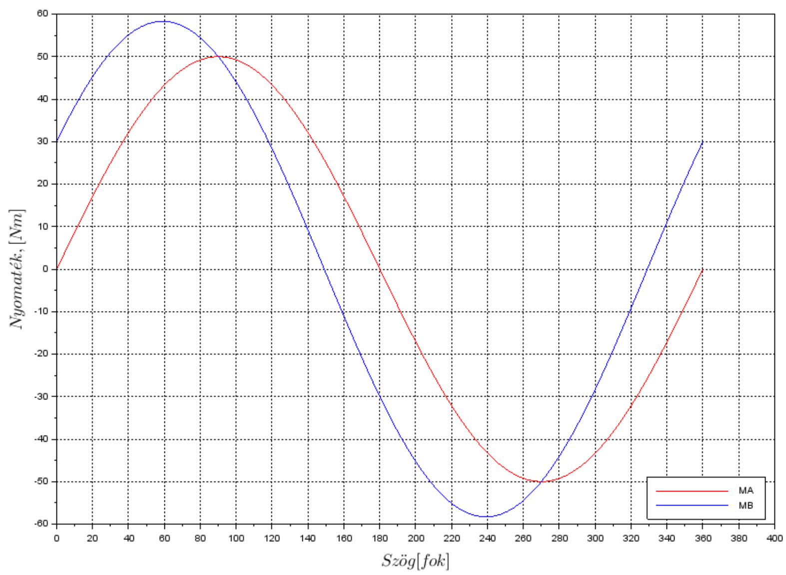
$$= \vec{k}\left[(-a)\cdot(-F\sin\alpha)\right] = a\cdot F\sin\alpha$$

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{BF} \times \vec{F} = \left(-a\vec{i} + b\vec{j}\right)\times\left(-F\cos\alpha\vec{i} - F\sin\alpha\vec{j}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & b & 0 \\ -F\cos\alpha & -F\sin\alpha & 0 \end{vmatrix} =$$

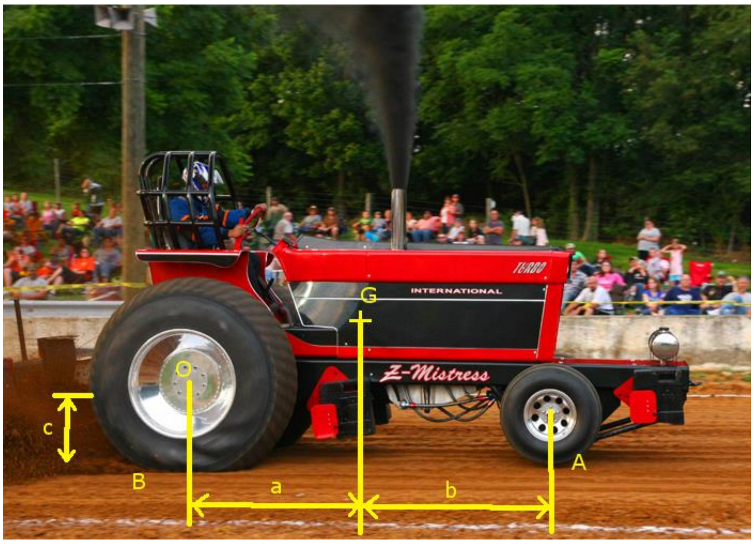
$$= \vec{k}\left[(-a)\cdot(-F\sin\alpha) - b\cdot(-F\cos\alpha)\right] = a\cdot F\sin\alpha + b\cdot F\cos\alpha$$

Scilab programkód a megoldásra:

```
//Nyomaték
//
clear; clc;
//
// Adatok >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
a=5 //m
b=3  //m
F=10  //N
alfa0=0
alfamax=360  //fok
felosztas=100;
alfa=linspace(alfa0,(alfamax*(%pi/180)),felosztas);
//radian
//
// Számolás >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
MA=a*F.*sin(alfa);
MB=a*F.*sin(alfa)+b*F.*cos(alfa);
// Ábrázolás >>>>>>>>>>>>>>>>>>>
xgrid(1,1,8)
plot(alfa.*(180/%pi),MA,"r")
plot(alfa.*(180/%pi),MB)
//
xlabel("$ Szög [fok] $","fontsize",4)
ylabel("$ Nyomaték, [Nm]$","fontsize",4)
legend('MA','MB',4)  //legend, jelmagyarázat készítése
```



1.13. Példa: Nyomaték

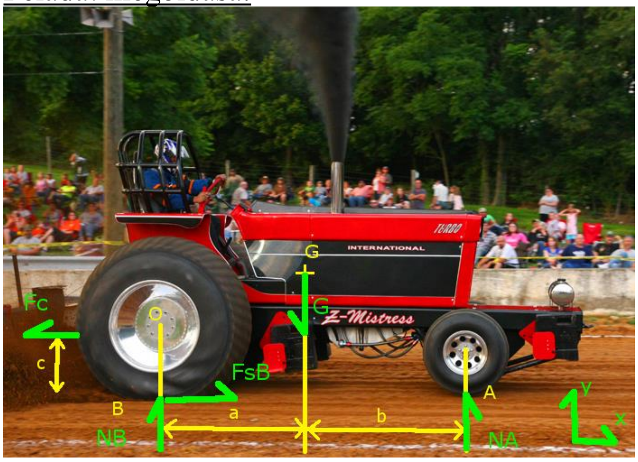


A képen látható traktor egy lerögzített tömeget húz. Határozzuk meg mekkora lehet a maximális keréknyomaték aminél a hátsó kerék éppen nem csúszik meg, ha csak a hátsó kerék hajtott. A nyugvásbeli súrlódási tényező 0,5 értékű és a hátsó kerék átmérője *d* a traktor tömege pedig *m*.

Adott:

$$a = 2m,\quad b = 3m,\quad c = 0{,}5m,\quad d = 1{,}8m,\quad m = 2t,\quad \mu_0 = 0{,}5$$

Feladat megoldása:



Egyensúlyi egyenletek:

1. $\Sigma F_x = 0 = -F_c + \overbrace{\mu_0 N_B}^{F_{SB}}$
2. $\Sigma F_y = 0 = N_A + N_B - G$
3. $M_A = 0 = cF_c - (a+b)N_B + bG$

$F_{SB} = \mu_0 N_B$

1. $F_c = \mu_0 N_B$
3. $0 = c\mu_0 N_B - (a+b)N_B + bG$

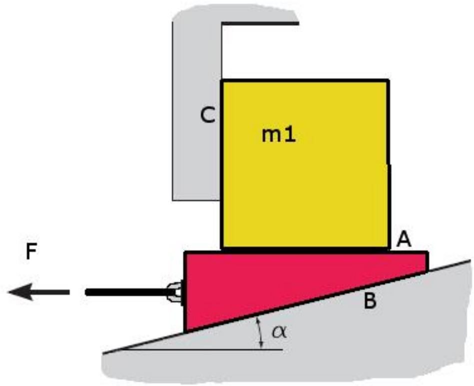
$$N_B = \frac{-bG}{c\mu_0 - (a+b)} = \frac{-3\cdot 2\cdot 1000\cdot 10}{0{,}5\cdot 0{,}5 - (2+3)} =$$

$$= \frac{-60000}{-4{,}75} = \underline{\underline{12631{,}58N}}$$

1. $F_c = \mu_0 N_B = 0{,}5\cdot 12631{,}58 = \underline{\underline{6315{,}79N}}$
2. $\Sigma F_y = 0 = N_A + N_B - G \quad\Rightarrow\quad N_A = G - N_B = 20000 - 12631{,}58 = \underline{\underline{7368{,}42N}}$

$$M_O = 0 = -M_{kerék} + \frac{d}{2}\cdot F_{SB} \quad\Rightarrow\quad M_{kerék} = \frac{d}{2}\cdot F_{SB} = \frac{1{,}8}{2}\cdot 6315{,}79 = \underline{\underline{5684{,}211Nm}}$$

1.14. Példa: Súrlódás

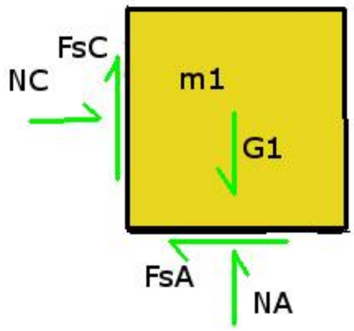


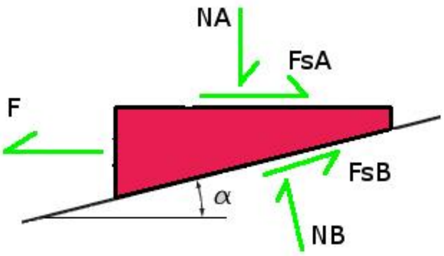
A képen látható éken egy doboz van. Határozzuk meg mekkora lehet a maximális keréknyomaték aminél a hátsó kerék éppen nem csúszik meg, ha csak a hátsó kerék hajtott. A nyugvásbeli súrlódási tényező 0,5 értékű és a hátsó kerék átmérője *d* a traktor tömege pedig *m*.

Adott:

$\alpha = 30^\circ$, $m_1 = 100kg$, $\mu_0 = 0,5$

Feladat megoldása:





$F_{SA} = \mu_0 N_A$

$F_{SC} = \mu_0 N_C$

1. $\Sigma F_x = 0 = -F_{SA} + N_C = N_C - \mu_0 N_A$
2. $\Sigma F_y = 0 = N_A + F_{SC} - G_1 = N_A + \mu_0 N_C - G_1$

1. $N_C = \mu_0 N_A$
2. $0 = N_A + \mu_0 \mu_0 N_A - G_1$

$$N_A = \frac{G_1}{1+\mu_0\mu_0} = \frac{1000}{1+0,5\cdot 0,5} = 800N$$

$N_C = 0,5 \cdot 800 = 400N$

$F_{SA} = \mu_0 N_A$

$F_{SB} = \mu_0 N_B$

1. $\Sigma F_x = 0 = -F + F_{SA} + F_{SB}\cos\alpha - N_B \sin\alpha =$
$= -F + F_{SA} + \mu_0 N_B \cos\alpha - N_B \sin\alpha$

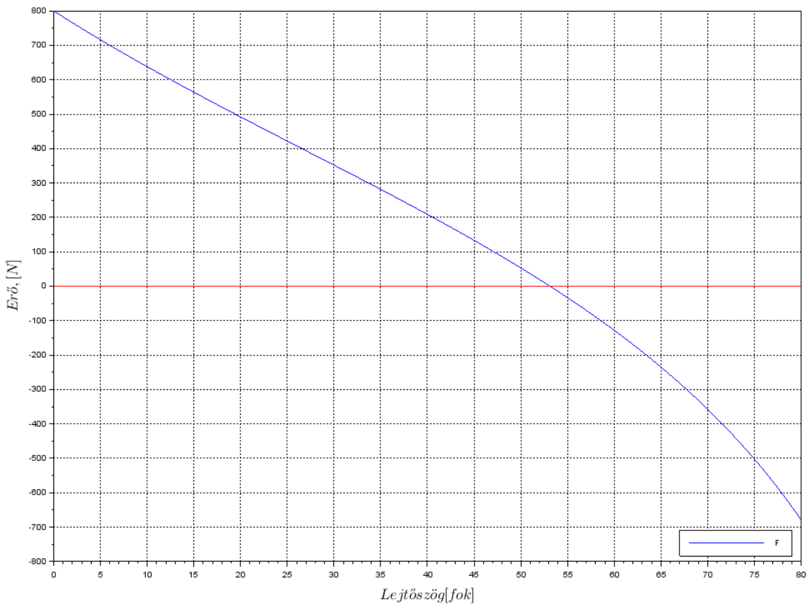
2. $\Sigma F_y = 0 = -N_A + F_{SB}\sin\alpha + N_B\cos\alpha =$
$= -N_A + \mu_0 N_B \sin\alpha + N_B \cos\alpha$

$$N_B = \frac{N_A}{\mu_0 \sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{800}{0,5\sin 30^\circ + \cos 30^\circ} = 3695,04N$$

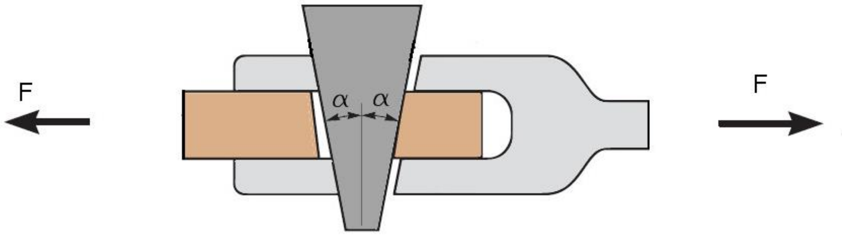
1. $F = F_{SA} + \mu_0 N_B \cos\alpha - N_B \sin\alpha =$
$= 0,5\cdot 800 + 0,5 \cdot 3695,04\cos 30^\circ - 3695,04 \sin 30^\circ =$
$= 400 + 1600 - 1847,52 = \underline{\underline{152,48N}}$

Scilab programkód:

```
//Súrlódás
//
clear; clc;
//
// Adatok
>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
m1=100 //kg
g=10  //m/s2
mu0=0.5  //
alfa0=0  //fok
alfamax=80  //fok
//
felosztas=100;
alfa=linspace(alfa0,(alfamax*(%pi/180)),felosztas);
//radian
//
// Számolás >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
//
NA=m1*g/(1+mu0^2);
NC=mu0*NA;
//
NB=NA./(mu0.*sin(alfa)+cos(alfa));
F=mu0*NA+mu0.*NB.*cos(alfa)-NB.*sin(alfa);
// Ábrázolás
>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>
xgrid(1,1,8)
plot(alfa.*(180/%pi),F,)
plot(alfa.*(180/%pi),zeros(1,felosztas),'r')
//
xlabel("$ Lejtőszög [fok] $","fontsize",4)
ylabel("$ Erő, [N]$","fontsize",4)
legend('F',4)  //legend, jelmagyarázat készítése
///
```



1.15. Példa: **Súrlódás**

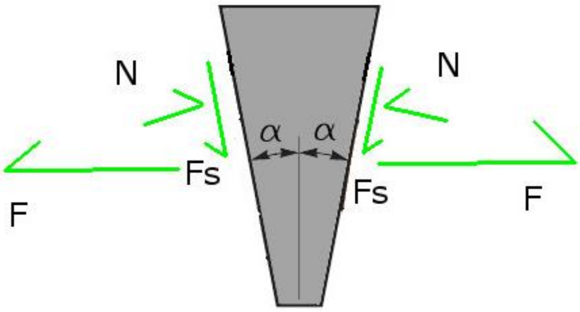


A képen látható éken egy doboz van. Határozzuk meg mekkora lehet a maximális keréknyomaték aminél a hátsó kerék éppen nem csúszik meg, ha csak a hátsó kerék hajtott. A nyugvásbeli súrlódási tényező 0,5 értékű és a hátsó kerék átmérője *d* a traktor tömege pedig *m*.

Adott:

$F = 1000N, \qquad \mu_0 = 0,6$

Feladat megoldása:



$F_S = \mu_0 N$

xy KR 1.eset: x vízszintes y függőleges:

1. $\Sigma F_x = 0 = -F + N\cos\alpha + F_S \sin\alpha = -F + N\cos\alpha + \mu_0 N \sin\alpha$
2. $\Sigma F_y = 0 = N\sin\alpha - F_S\cos\alpha = N\sin\alpha - \mu_0 N\cos\alpha$

xy KR 1.eset: x lejtő irányú y lejtőre merőleges:

1. $\Sigma F_x = 0 = -F\sin\alpha + F_S = -F\sin\alpha + \mu_0 N$
2. $\Sigma F_y = 0 = N - F\cos\alpha \quad \Rightarrow N = F\cos\alpha$
1. $0 = -F\sin\alpha + \mu_0 F\cos\alpha \ = F\left(-\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha\ \right)$

$\left(-\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha\ \right) = 0$

$\mu_0\cos\alpha = \sin\alpha$

$\mu_0 = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$

$\alpha = actg\left(\mu_0\right) = actg\left(0,6\right) = \underline{\underline{30,96^\circ}}$