Gyakorlati útmutató a Szerkezetek Dinamikája tárgyhoz

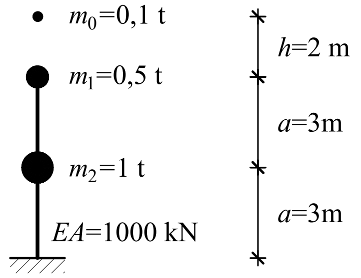
Fekete Ferenc

4. gyakorlat

Széchenyi István Egyetem, 2018

1. Feladat*

Az ábrán látható rúd felső pontjára $h = 2\,\text{m}$ magasságból ráesik egy $m_3 = 0{,}1\,\text{t}$ tömegű test. Az ütközés rugalmas. Határozza meg a rendszer ütközés kiváltotta rezgéseit (feltételezve, hogy a rendszer végig rugalmas állapotban marad).



1. Feladat megoldása

Szabadesés

A leeső test ütközés előtti sebessége (a mechanikai energia potenciálos erők esetén érvényes megmaradási tételéből):

$$u_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2} = 6{,}264\,\text{m/s}$$

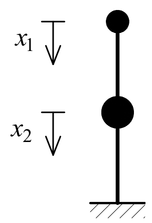
Ütközés

m_1 tömeg ütközés utáni sebessége:

$$v_1 = u_1 + \frac{(1+e) \cdot m_0 \cdot (u_0 - u_1)}{m_0 + m_1} = 0 + \frac{(1+1) \cdot 0{,}1 \cdot (6{,}264 - 0)}{0{,}1 + 0{,}5} = 2{,}088\,\text{m/s}$$

Rezgés

A két szabadságfokú rendszer mozgását jellemezze x_1 és x_2 elmozdulás:



tehát az elmozdulásvektor: $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

A (diagonális) tömegmátrix: $\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A merevségi mátrixhoz szükség van egy rúdelem merevségére:

$$k = \frac{EA}{a} = \frac{1000}{3} = 333{,}3\,\text{kN/m}$$

Ezzel a merevségi mátrix:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k+k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333{,}3 & -333{,}3 \\ -333{,}3 & 333{,}3 + 333{,}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 333{,}3 & -333{,}3 \\ -333{,}3 & 666{,}7 \end{bmatrix}$$

*Ugyanez a példa megtalálható Györgyi József „Dinamika” c. egyetemi jegyzetének 170. olalán.

A mozgás több szabadságfokú csillapítatlan szabadrezgés, melynek (linearitás esetén) a mozgásegyenlete:

$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\ddot{x}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{x} = \underline{0}$ ① számszerűen: $\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 333{,}3 & -333{,}3 \\ -333{,}3 & 666{,}7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ennek megoldása exponenciális alakú: $\underline{x} = \underline{v} \cdot e^{i\omega t}$
A próbafüggvény második deriváltja: $\underline{x} = -\omega^2 \underline{v} \cdot e^{i\omega t}$
Ezeket visszahelyettesítve (①-be): $-\omega^2 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{v} \cdot \cancel{e^{i\omega t}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{v} \cdot \cancel{e^{i\omega t}} = \underline{0}$
$e^{i\omega t}$-vel egyszerűsítve és $\underline{v}$-t kiemelve:

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \cdot \underline{\underline{M}}\right) \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

Ennek akkor van nem triviális* megoldása, ha a zárójeles rész determinánsa 0. Vagyis:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 333{,}3 & -333{,}3 \\ -333{,}3 & 666{,}7 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 333{,}3 - 0{,}5\omega^2 & -333{,}3 \\ -333{,}3 & 666{,}7 - \omega^2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

A determinánst kifejtve: $(333{,}3 - 0{,}5\omega^2)(666{,}7 - \omega^2) - (-333{,}3)(-333{,}3) = 0$

$$0{,}5(\omega^2)^2 + \underbrace{333{,}3(-\omega^2) + 666{,}7(-0{,}5\omega^2)}_{=-666{,}7\omega^2} + \underbrace{333{,}3 \cdot 666{,}7 - (-333{,}3)(-333{,}3)}_{=111111} = 0$$

$$0{,}5(\omega^2)^2 - 666{,}7\omega^2 + 111111 = 0$$

Ez ω^2-re másodfokú egyenlet. A megoldóképletet† alkalmazva:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{666{,}7 \pm \sqrt{666{,}7^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 111111}}{2 \cdot 0{,}5}} = \begin{cases} \omega_1 = 13{,}974\,\mathrm{rad/s} \\ \omega_2 = 33{,}735\,\mathrm{rad/s} \end{cases}$$

Ezek a rezgőrendszer sajátfrekvenciái.
Segítségükkel a sajátalakok.
$\underline{\hat{v}}_1$:

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega_1^2 \cdot \underline{\underline{M}}\right) \cdot \underline{\hat{v}}_1 = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 333{,}3 - 0{,}5 \cdot 13{,}974^2 & -333{,}3 \\ -333{,}3 & 666{,}7 - 13{,}974^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v}_{1,1}{}^{\ddagger} \\ \hat{v}_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*Triviális megoldás: $\underline{v} = \underline{0}$
† $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
‡Tetszőleges: önkényesen felvesszük 1-nek.

A második egyenlet*:

$$-333{,}3 \cdot 1 + (666{,}7 - 13{,}974^2) \cdot \hat{v}_{2,1} = 0$$

$$\hat{v}_{2,1} = \frac{333{,}3}{666{,}7 - 13{,}974^2} = 0{,}7071$$

Tehát $\underline{\hat{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}7071 \end{bmatrix}$

$\underline{\hat{v}}_2$:

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega_2^2 \cdot \underline{\underline{M}}\right) \cdot \underline{\hat{v}}_2 = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 333{,}3 - 0{,}5 \cdot 33{,}735^2 & -333{,}3 \\ -333{,}3 & 666{,}7 - 33{,}735^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{v}_{1,2}{}^{\dagger} \\ \hat{v}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Itt is a második egyenletet használjuk‡:

$$-333{,}3 \cdot 1 + (666{,}7 - 33{,}735^2) \cdot \hat{v}_{2,2} = 0$$

$$\hat{v}_{2,2} = \frac{333{,}3}{666{,}7 - 33{,}735^2} = -0{,}7071$$

Tehát $\underline{\hat{v}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}7071 \end{bmatrix}$

$\underline{\hat{v}}_1$ és $\underline{\hat{v}}_2$ vektorokat a tömegmátrixra normálni kell.

Első sajátvektor:

$$\alpha_1 \cdot \underline{\hat{v}}_1^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \alpha_1 \cdot \underline{\hat{v}}_1 = 1$$

$$\alpha_1^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0{,}7071 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}7071 \end{bmatrix}}_{=\begin{bmatrix} 0{,}5 \cdot 1 + 0 \cdot 0{,}7071 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}7071 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}7071 \end{bmatrix}} = 1$$

$$\underbrace{\alpha_1^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0{,}7071 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}7071 \end{bmatrix}}_{=1 \cdot 0{,}5 + 0{,}7071 \cdot 0{,}7071 = 0{,}5 + 0{,}5 = 1} = 1$$

Ebből $\alpha_1^2 \cdot 1 = 1$, vagyis $\alpha_1 = 1$§.

A tömegmátrixra normált első sajátvektor tehát

$$\underline{v}_1 = \alpha_1 \cdot \underline{\hat{v}}_1 = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}7071 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}7071 \end{bmatrix}$$

* $\hat{v}_{1,1} = 1$-et felvéve

† Tetszőleges: megint 1-nek vesszük.

‡ $\hat{v}_{1,2} = 1$-et felvéve

§ Általában ennél a lépésnél $\alpha_1 \neq 1$.

Második sajátvektor:

$$\alpha_2 \cdot \underline{\hat{v}}_2^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \alpha_2 \cdot \underline{\hat{v}}_2 = 1$$

$$\alpha_2^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -0{,}7071 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}7071 \end{bmatrix}} = 1$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}5 \cdot 1 + 0 \cdot -0{,}7071 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot -0{,}7071 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}7071 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\alpha_1^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -0{,}7071 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}7071 \end{bmatrix}}_{=1 \cdot 0{,}5 + (-0{,}7071) \cdot (-0{,}7071) = 0{,}5 + 0{,}5 = 1} = 1$$

Ebből $\alpha_2^2 \cdot 1 = 1$, vagyis $\alpha_2 = 1$*.

A tömegmátrixra normált második sajátvektor tehát

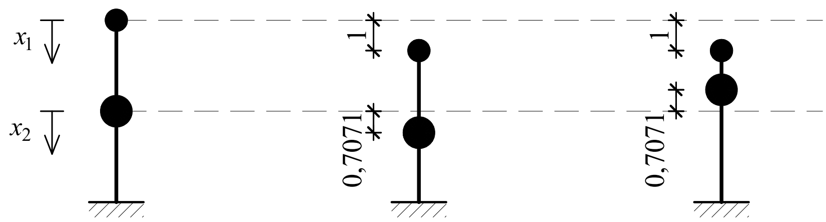
$$\underline{v}_2 = \alpha_2 \cdot \underline{\hat{v}}_2 = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}7071 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}7071 \end{bmatrix}$$

Tehát az ortonormált sajátalakok és a hozzájuk tartozó sajátfrekvenciák:

nyugalmi helyzet

1. sajátalak: ω_1=13,974 rad/s

2. sajátalak: ω_2=33,735 rad/s



$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}7071 \end{bmatrix} \qquad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}7071 \end{bmatrix}$$

Kezdeti feltételek: $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\dot{x}}_0 = \begin{bmatrix} 2{,}088 \\ 0 \end{bmatrix}$

Megoldás (betűkkel):

$$\underline{x}(t) = \sum_{r=1}^{2} \underline{v}_r \cdot \underline{v}_r^T \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \frac{1}{\omega_r} \cdot \underline{\dot{x}}_0 \cdot \sin(\omega_r \cdot t)$$

*Általában ennél a lépésnél $\alpha_2 \neq 1$.

Megoldás (számokkal):

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{13{,}974}\cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}7071 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0{,}7071 \end{bmatrix}}^{=\begin{bmatrix} 1 & 0{,}7071 \\ 0{,}7071 & 0{,}5 \end{bmatrix}}\cdot\overbrace{\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2{,}088 \\ 0 \end{bmatrix}}^{=\begin{bmatrix} 1{,}044 \\ 0 \end{bmatrix}}\cdot\sin(13{,}974\cdot t)+$$

$$+\frac{1}{33{,}735}\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}7071 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -0{,}7071 \end{bmatrix}}_{=\begin{bmatrix} 1 & -0{,}7071 \\ -0{,}7071 & 0{,}5 \end{bmatrix}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2{,}088 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\begin{bmatrix} 1{,}044 \\ 0 \end{bmatrix}}\cdot\sin(33{,}735\cdot t)$$

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{13{,}974}\cdot\begin{bmatrix} 1{,}044 \\ 0{,}7382 \end{bmatrix}\cdot\sin(13{,}974\cdot t)+\frac{1}{33{,}735}\cdot\begin{bmatrix} 1{,}044 \\ -0{,}7382 \end{bmatrix}\cdot\sin(33{,}735\cdot t)$$

$$\boxed{\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 0{,}0747 \\ 0{,}0528 \end{bmatrix}\cdot\sin(13{,}974\cdot t)+\begin{bmatrix} 0{,}0309 \\ -0{,}0219 \end{bmatrix}\cdot\sin(33{,}735\cdot t)}$$

Táblázat a két tömeg mozgásáról:

t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	t	$x_1(t)$	$x_2(t)$
0	0,000	0,000	0,3	-0,082	-0,034	0,6	0,093	0,025
0,02	0,040	0,001	0,32	-0,102	-0,030	0,62	0,081	0,015
0,04	0,070	0,007	0,34	-0,104	-0,032	0,64	0,053	0,012
0,06	0,084	0,019	0,36	-0,087	-0,039	0,66	0,014	0,011
0,08	0,081	0,038	0,38	-0,058	-0,046	0,68	-0,026	0,010
0,1	0,068	0,056	0,4	-0,026	-0,049	0,7	-0,056	0,003
0,12	0,051	0,069	0,42	0,001	-0,043	0,72	-0,072	-0,012
0,14	0,038	0,071	0,44	0,016	-0,026	0,74	-0,072	-0,033
0,16	0,034	0,059	0,46	0,022	0,000	0,76	-0,062	-0,054
0,18	0,035	0,037	0,48	0,021	0,028	0,78	-0,050	-0,070
0,2	0,037	0,010	0,5	0,023	0,052	0,8	-0,043	-0,074
0,22	0,032	-0,016	0,52	0,031	0,066	0,82	-0,042	-0,064
0,24	0,015	-0,033	0,54	0,048	0,066	0,84	-0,048	-0,044
0,26	-0,014	-0,040	0,56	0,070	0,056	0,86	-0,052	-0,018
0,28	-0,050	-0,039	0,58	0,087	0,040	0,88	-0,047	0,005

Diagram a két tömeg mozgásáról: