

Logaritmikus egységek, viszonzyszámok

John Napier (1550-1617) skót földbirtokos, matematikus, fizikus, csillagász. Említik Neper, ill. Nepier néven is, vagy latinosan Nepero, ill. Neperi néven. Skót bárói családban született, később ő lett Merchiston nyolcadik lordja. 13 évesen már egyetemi hallgató volt, de diplomát nem szerzett. Kedvtelésből foglalkozott matematikával, idejét elsősorban számításokat megkönnyítő módszerek kifejlesztésére fordította. Legnagyobb felfedezése a logaritmus, ami főként csillagászati számításokban bizonyult hasznosnak, így Kepler számára is jelentős segítséget jelentett a Rudolf-féle táblázatok elkészítésében. Neki köszönhetjük a tizedes törtek ma használatos jelölését is, vagyis a tizedespontot. Megalkotta a róla elnevezett számolópálcákat (elefántcsontból faragott Napier-csont készlet) amiből később a logarléc is kialakult.

A gyakorlatban előforduló feszültségek, teljesítmények, áramok között sokszor óriási (nagyságrendi) különbségek lehetnek. Pl. egy rádióadó kisugárzott teljesítménye néhány száz, vagy akár 1000-2000 kW, a vevőkészülék hangszórója által leadott teljesítmény néhány W, míg a lesugárzott akusztikai teljesítmény csak néhány mW. Egy EKG-készülék elektródái által leadott feszültség néhány μV , a jelek megjelenítésére használt katódsugárcső eltérítő feszültsége azonban már néhányszor 10 V.

Az erősítést, ill. csillapítást a bemeneti és kimeneti jellemzők hányadosával adjuk meg, ami 10^{-12} -től akár 10^{12} -ig terjedhet, vagy még tágabb határok közé is eshet. A viszony helyett ezért célszerű annak logaritmusát megadni. Ráadásul ezt fiziológiai jellemzők is indokolják, hiszen pl. 100-szor, vagy 1000-szer nagyobb hangerősséget a fülünk csak 2-szer, 3-szor hangosabbnak érzékel.

A viszonzyszámok leírásához természetes alapú, vagy 10-es alapú logaritmust használhatunk. (A természetes logaritmus alapja az e-vel jelölt Euler-szám, vagy Napier-állandó egy irracionális szám, értéke közelítőleg 2.71.)

Két teljesítmény aránya:

$$X_p = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} [N] \quad \text{néper}$$

pl.

$$X_p = \frac{1}{2} \ln \frac{20W}{1W} = \frac{1}{2} 3 = 1,5N$$

$$X_p = 10 \log \frac{P_1}{P_2} [\text{dB}] \quad \text{decibel}$$

$$X_p [N] = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{U_1^2}{R_1}}{\frac{U_2^2}{R_2}} = \ln \frac{U_1}{U_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$X_u = \ln \frac{U_1}{U_2} [N], \quad X_u = 20 \log \frac{U_1}{U_2} [\text{dB}]$$

$$X_p = X_u + \frac{1}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} [N] \quad X_p = X_u + 10 \log \frac{R_2}{R_1} [\text{dB}]$$

$$\frac{X_p^{dB}}{X_p^N} = \frac{10 \cdot \log a}{\frac{1}{2} \ln a} = 20 \frac{\log a}{\ln a} \quad a = \frac{P_1}{P_2}$$

$$\frac{X_u^{dB}}{X_u^N} = \frac{20 \cdot \log b}{\ln b} = 20 \frac{\log b}{\ln b} \quad b = \frac{U_1}{U_2}$$

$$\frac{\log k}{\ln k} = 0.4343, \text{ tehát } 1N = 8.7 \text{ dB, ill. } 1\text{dB} = 0.115 N = \frac{1}{8.7} N$$

Abszolút és relatív szint

Nagyon gyakori eset, hogy szeretnénk egy mennyiséget önmagában logaritmikus egységben kifejezni, de ilyenkor is szükség van egy viszonyítási alagra. Az így kifejezett logaritmikus P vagy U értéket szintnek nevezzük és s-el jelöljük. A teljesítmény és feszültség szintet az különbözteti meg, hogy az első kis s-el, a másodikat nagy S-el jelöljük. A biztos megkülönböztethetőség kedvéért most ezt egy p, ill. u index alkalmazásával is megerősítjük.

$$s_p = \frac{1}{2} \ln \frac{P}{P_0} [N] = 10 \log \frac{P}{P_0} [dB]$$

$$S_u = \ln \frac{U}{U_0} [N] = 20 \log \frac{U}{U_0} [dB]$$

$$R_0 = \frac{U_0^2}{P_0}$$

$$s_p = S_u + \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{R_0}{R} [N] \\ 10 \log \frac{R_0}{R} [dB] \end{cases}$$

Relatív szintről akkor beszélünk, ha a viszonyítási alap egy adott téma területen célszerűen megválasztott P_0 , U_0 . Például átviteltechnikában a bemeneti teljesítmény.

Abszolút szint esetén a viszonyítási alap $P_0 = 1 \text{ mW}$. A távbeszélőtechnikában alkalmazott szénmikrofonok kimeneti ellenállása 600 ohm volt, ezért az 1 mW teljesítményhez tartozó U_0 viszonyítási alap 0.775 V, azaz 775 mV. Mára ehelyett többnyire 1V viszonyítási alapot alkalmaznak.

Abszolút szint alkalmazásakor szokás a logaritmikus egység kiegészítése egy m betűvel, ami arra utal, hogy 1 mW teljesítményhez viszonyítunk:

dBm = decibelmilli, ill. Nm = népermilli

$$s_p = \frac{1}{2} \ln \frac{P}{1\text{mW}} [Nm] = 10 \log \frac{P}{1\text{mW}} [dBm], \text{ ill. } S_u = \ln \frac{U}{0.775V} [Nm] = 20 \log \frac{U}{0.775V} [dBm]$$

Feszültségviszony (erősítés, ill. csillapítás) dB-ben.

Egyes kitüntetett értékű viszonyszámokat a villamosmérnöki gyakorlatban illik fejből ismerni. Ezek az alábbiak:

1-szeres	0 dB		
1.41-szeres ($\sqrt{2}$ -szörös)	3 dB		
0.707-szeres ($1/\sqrt{2}$ -szörös)	-3 dB		
2-szeres	6 dB	0.5-szeres	-6 dB
3-szoros	9.54 dB	harmadrész	-9.54 dB
10-szeres	20 dB	tizedrész	-20 dB
100-szoros	40 dB	századrész	-40 dB
1000-szeres	60 dB	ezredrész	-60 dB
10000-szeres	80 dB	tízezredrész	-80 dB
100000-szeres	100 dB	százezredrész	-100 dB
200000-szeres	106 dB	1/200000	-106 dB

Az utolsó sorból az is látható hogy a szorzathoz tartozó viszonyszámok összeadódnak (logaritmus!).

A frekvencia logaritmikus egységei

A gyakorlatban a frekvenciák is széles határok között változhatnak, és például sokszor ugyanolyan részletességgel kellene ismerni a 10 – 100 Hz közötti tartományt, mint pl. az 1 – 10 MHz közöttit. Lineárisan ábrázolva, ha 10 – 100 Hz 0.9 cm távolságú (100 Hz = 1 cm), akkor az 1 – 10 MHz távolság 90 m! Ezért a frekvenciát is célszerű logaritmikus egységekben felvenni, de akkor kell egy vonatkoztatási alap, mert logaritmus csak dimenzió nélküli számoknak van.

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\omega = \log \frac{\omega}{\omega_0} = \log \frac{f}{f_0} [\text{dekád}]$$

$$\omega = \lg \frac{\omega}{\omega_0} = \lg \frac{f}{f_0} [\text{oktáv}]$$

10-szeres frekvencia	+1 dekád	100-szoros frekvencia	2 dekád
0.1-ed frekvencia	-1 dekád	1000-szeres frekvencia	3 dekád
2-szeres frekvencia	+1 oktáv	4-szeres frekvencia	2 oktáv
0.5-szörös frekvencia	-1 oktáv	8-szoros frekvencia	3 oktáv
		stb...	