

1. Lineáris differenciaegyenletek

Tekintsük az alábbi egyenletet:

$$f(n) = af(n-1) + bf(n+1), \quad (K < n < N) \quad f(K) = d_1, \quad f(N) = d_2.$$

Keressük a megoldást $f(n) = \alpha^n$ alakban. Így kapjuk a következőket:

$$\alpha^n = a\alpha^{n-1} + b\alpha^{n+1} \implies \alpha = a + b\alpha^2 \implies \alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4ab}}{2b}.$$

Az alábbi eseteket különböztethetjük meg:

1. $1 - 4ab \neq 0$. Ebben az esetben két különböző megoldás van, α_1 és α_2 , az egyenlet általános megoldása pedig

$$f(n) = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n.$$

2. $1 - 4ab = 0$. Ebben az esetben csak egy megoldás van, mégpedig $\alpha = 1/2b$. Viszont ilyenkor az eredeti egyenletnek nemcsak $\left(\frac{1}{2b}\right)^n$, hanem $n\alpha^n = n\left(\frac{1}{2b}\right)^n$ is megoldása, uis:

$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{2b}\right)^n &= a(n-1)\left(\frac{1}{2b}\right)^{n-1} + b(n+1)\left(\frac{1}{2b}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2b}\right)^n \left[a(n-1)2b + b(n+1)\frac{1}{2b} \right] = \\ &= \left(\frac{1}{2b}\right)^n \left[2abn - 2ab + \frac{1}{2} + \frac{n}{2} \right] = \left(\frac{1}{2b}\right)^n \left[\frac{4ab+1}{2}n - \frac{4ab-1}{2} \right] = \\ &= \left(\frac{1}{2b}\right)^n \left[\frac{4ab-1}{2}n + n - \frac{4ab-1}{2} \right] = \left(\frac{1}{2b}\right)^n n. \end{aligned}$$

Az eredeti egyenlet általános megoldása ilyenkor tehát:

$$f(n) = c_1\alpha^n + c_2n\alpha^n = c_1\left(\frac{1}{2b}\right)^n + c_2n\left(\frac{1}{2b}\right)^n.$$

A c_1 és c_2 konstansokat a peremfeltételekből határozhatjuk meg.

Feladatok

1. Határozzuk meg azt az $f(n)$ függvényt, amelyre teljesülnek az alábbiak:

$$f(n) = \frac{1}{4}f(n-1) + \frac{3}{4}f(n+1), \quad 0 < n < 10, \quad f(0) = 0, \quad f(10) = 1.$$

2. Határozzuk meg azt az $f(n)$ függvényt, amelyre teljesülnek az alábbiak:

$$f(n) = \frac{1}{6}f(n-1) + \frac{2}{3}f(n+1), \quad 0 < n < \infty, \quad f(0) = 4, \quad f(1) = 3.$$

3. A FIBONACCI-számokat a következőképpen definiáljuk: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, és $n > 2$ esetén $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Adjunk zárt formulát F_n -re!

4. Határozzuk meg azt az $f(n)$ függvényt, amelyre teljesülnek az alábbiak:

$$f(n) = \frac{1}{3}f(n-1) + \frac{1}{3}f(n+1) + \frac{1}{3}f(n+2), \quad n \geq 1, \quad f(0) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 1.$$

5. Határozzuk meg azokat az $f(n)$ függvényeket, amelyekre teljesül az alábbi:

$$f(n) = \frac{1}{2}f(n-1) + \frac{1}{2}f(n+1) - 1.$$

Segítség: Mutassuk meg, hogy $f(n) = n^2$ kielégíti az egyenletet. Utána tegyük fel, hogy $f_1(n)$ és $f_2(n)$ szintén kielégíti az egyenletet, és keressük meg azt az egyenletet, amit $g(n) = f_1(n) - f_2(n)$ kielégít.

2. A tönkremenés problémája

A következő probléma nagyon fontos modell a sztochasztikus folyamatok témakörében.

Tegyük fel, hogy egy olyan szerencsejátékban veszünk részt, ahol minden egyes játszmában az előzményektől függetlenül p valószínűséggel nyerünk 1 forintot, $1 - p$ valószínűséggel pedig veszítünk ugyanennyit. A játékot n forinttal kezdjük és addig folytatjuk, amíg el nem veszítjük az összes pénzünket, vagy pénzünk el nem ér egy előre rögzített összeget (A).

A feladat kapcsán a következő kérdéseket fogjuk vizsgálni:

- Mi a valószínűsége, hogy nyerünk? Mi a valószínűsége, hogy veszítünk? Mi a valószínűsége, hogy végtelenségig tudunk játszani?
- Mi a helyzet, ha ellenfelünknek végtelen sok pénze van? És ha nekünk?
- Legalább mekkora összeggel kezdjük a játékot, ha egy adott valószínűséggel nyerni akarunk?
- Átlagosan hány játszmából áll egy játék?

2.1. A nyereség valószínűsége

Jelölje $f(n)$ annak valószínűségét, hogy n forinttal indulva végül megnyerjük a játékot. Ekkor a probléma az alábbi differenciaegyenletre vezet:

$$f(n) = p f(n+1) + (1-p) f(n-1),$$

a peremfeltételek pedig $f(0) = 0$ és $f(A) = 1$. A megoldás függ attól, hogy $p = 1 - p$ teljesül vagy sem.

1. Ha $p \neq 1 - p$, akkor

$$\begin{aligned}\alpha^n &= p\alpha^{n+1} + (1-p)\alpha^{n-1} \\ \alpha &= p\alpha^2 + (1-p) \\ 0 &= p\alpha^2 - \alpha + (1-p) \\ \alpha_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{2p} \implies \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1-p}{p}\end{aligned}$$

Ezzel az általános megoldás:

$$f(n) = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n = c_1 + c_2 \left(\frac{1-p}{p} \right)^n.$$

Használjuk fel c_1 és c_2 meghatározásához, hogy $f(0) = 0$ és $f(A) = 1$. Ezzel:

$$\begin{aligned}0 &= c_1 + c_2 \left(\frac{1-p}{p} \right)^0 = c_1 + c_2 \\ 1 &= c_1 + c_2 \left(\frac{1-p}{p} \right)^A\end{aligned}$$

Az első egyenletből $c_2 = -c_1$ következik, amit a másodikba helyettesítve:

$$\begin{aligned}1 &= c_1 + c_2 \left(\frac{1-p}{p} \right)^A = c_1 - c_1 \left(\frac{1-p}{p} \right)^A = c_1 \left(1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^A \right), \\ \implies c_1 &= \frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^A} \quad \text{és} \quad c_2 = -\frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^A}\end{aligned}$$

Vagyis az $f(0) = 0$ és $f(A) = 1$ peremfeltételeknek megfelelő megoldás:

$$f(n) = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^A} - \frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^A} \left(\frac{1-p}{p} \right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^n}{1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^A}.$$

Tehát ebben az esetben azt kaptuk, hogy

$$f(n) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^A}$$

2. Ha $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, akkor

$$\begin{aligned}\alpha^n &= \frac{1}{2}\alpha^{n+1} + \frac{1}{2}\alpha^{n-1} \\ \alpha &= \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2} \\ 0 &= \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2} \\ \alpha_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1 \quad (= \alpha).\end{aligned}$$

Ezzel az általános megoldás:

$$f(n) = c_1\alpha^n + c_2n\alpha^n = c_1 + c_2n.$$

Most is használjuk fel a c_1 és c_2 meghatározásához, hogy $f(0) = 0$ és $f(A) = 1$. Ezzel:

$$\begin{aligned}0 &= c_1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \\ 1 &= c_1 + c_2 A\end{aligned}$$

Az első egyenletből kapott $c_1 = 0$ -t a másodikba helyettesítve kapjuk, hogy $c_2 = \frac{1}{A}$. Vagyis az $f(0) = 0$ és $f(A) = 1$ peremfeltételeknek megfelelő megoldás:

$$f(n) = c_1\alpha + c_2n\alpha^n = 0 + n\frac{1}{A} = \frac{n}{A}.$$

Tehát most azt kaptuk, hogy

$$f(n) = \frac{n}{A}$$

Mi a helyzet, ha ellenfelünknek végtelen sok pénze van (azaz $A \rightarrow \infty$)? Ekkor természetesen a játékot nem nyerhetjük meg, legfeljebb azt érhetjük el, hogy ne veszítsünk, azaz a játék végtelen sokáig tartson. Ennek valószínűsége:

1. Ha $p < 1 - p$, akkor $\lim_{A \rightarrow \infty} f(n) = 0$.
2. Ha $p = 1 - p$, akkor $\lim_{A \rightarrow \infty} f(n) = 0$.
3. Ha $p > 1 - p$, akkor $\lim_{A \rightarrow \infty} f(n) = 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n$.

Feladatok

1. Fej vagy írást játszok a barátommal, ha fejet dobunk, akkor én fizetek neki 1 forintot, ha írást, akkor ő nekem. Nekem 10 forintom van, ő 40 forinttal indul, és addig játszunk, míg valaki el nem veszti minden pénzét. Sajnos az érme nem szabályos: az írás valószínűsége 0,52.

- a) Milyen valószínűséggel fogok nyerni, illetve veszíteni?
- b) Mekkora a nyereségem várható értéke?
- c) Mekkora indulóösszeggel játszunk, ha legalább 0,95 eséllyel nyerni akarok (a barátomnak most is 40 forintja van)?

Megoldás: Most $p = 0,52$, $n = 10$, $A = 10 + 40 = 50$. Ezekkel:

- a) $P(\text{nyerek}) = 0,5611$, $P(\text{veszíték}) = 0,4389$,
 b) $E = 0,5611 \cdot 40 + (1 - 0,5611) \cdot -10 = 18,0550$,
 c) Most $A = 40 + n$, $n = ?$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \left(\frac{1 - 0,52}{0,52}\right)^n}{1 - \left(\frac{1 - 0,52}{0,52}\right)^{n+40}} &\geq 0,95 \\ 1 - \left(\frac{0,48}{0,52}\right)^n &\geq 0,95 \cdot \left[1 - \left(\frac{0,48}{0,52}\right)^n \cdot \left(\frac{0,48}{0,52}\right)^{40}\right] \\ 0,05 &\geq \left(\frac{0,48}{0,52}\right)^n \left[1 - 0,95 \left(\frac{0,48}{0,52}\right)^{40}\right] \\ \frac{0,05}{1 - 0,95 \left(\frac{0,48}{0,52}\right)^{40}} &\geq \left(\frac{0,48}{0,52}\right)^n \\ \ln \left[\frac{0,05}{1 - 0,95 \left(\frac{0,48}{0,52}\right)^{40}} \right] &\geq \ln \left[\left(\frac{0,48}{0,52}\right)^n \right] \\ \underbrace{\ln \left[\frac{0,05}{1 - 0,95 \left(\frac{0,48}{0,52}\right)^{40}} \right]}_{\approx -2,9563} &\geq n \underbrace{\ln \frac{0,48}{0,52}}_{\approx -0,08} \\ n &\geq 36,954 \end{aligned}$$

Mivel n egész, ezért $n \geq 37$. Ellenőrzésképp: $n = 37$ esetében a nyerés valószínűsége 0,9502, míg $n = 36$ esetében 0,9461.

2. Tegyük fel, hogy most szabályos pénzérmével játszunk (minden más a fentiek szerint alakul).

- a) Milyen valószínűséggel fogok nyerni, illetve veszíteni?
 b) Mekkora a nyereményem várható értéke?
 c) Mekkora indulóösszeggel játszzak, ha legalább 0,95 eséllyel nyerni akarok?

Megoldás: Most $p = 0,5$, $n = 10$, $A = 10 + 40 = 50$. Ezekkel:

- a) $P(\text{nyerek}) = 0,2$, $P(\text{veszíték}) = 0,8$,
 b) $E = 0,2 \cdot 40 + (1 - 0,2) \cdot -10 = 0$,
 c) Most is $A = 40 + n$, $n = ?$

$$\begin{aligned} \frac{n}{40 + n} &\geq 0,95 \\ n &\geq 0,95(40 + n) \\ 0,05n &\geq 38 \\ n &\geq 760. \end{aligned}$$

3. Tegyük fel, hogy én 100 forinttal, ellenfelem pedig 400 forinttal indul, az érme nem szabályos: az írás valószínűsége 0,52.

- a) Milyen valószínűséggel fogok nyerni, illetve veszíteni?
 b) Mekkora a nyereségem várható értéke?

c) Mekkora indulóösszeggel játsszak, ha legalább 0,95 eséllyel nyerni akarok?

Megoldás: Most $p = 0,52$, $n = 100$, $A = 100 + 400 = 500$. Ezekkel:

a) $P(\text{nyerek}) = 0,9997$, $P(\text{veszíték}) = 0,0003$,

b) $E = 0,9997 \cdot 400 + (1 - 0,9997) \cdot -100 = 399,83$,

c) Most $A = 400 + n$, $n = ?$ A már látott megoldási menetet követve $n \geq 38$ adódik.

Összehasonlítva a nyerés valószínűségére kapott értéket az 1. feladatban kapottal látható a hatalmas különbség. Úgy is megfogalmazhattuk volna a feladatokat, hogy mindkét esetben 100 forintunk van, az ellenfélnek pedig 400, de míg a második esetben minden egyes játszmában 1 Ft cserél gazdát, addig az első esetben játszmánként 10 Ft a tét. A kapott eredmények alapján optimális stratégiát is megfogalmazhatunk: ha a játék nekünk kedvező (azaz $p > 1/2$), akkor érdemes mindig a lehető legkisebb téttel játszani, ha ellenfelünk számára kedvező ($p < 1/2$), akkor pedig a lehető legnagyobb.

4. Ellenfelem most azt javasolja, hogy cseréljük fel a szerepeket. Azaz, ha fejet dobunk, akkor ő fizet nekem 1 forintot, ha írást, akkor én neki. Az írás valószínűsége most is 0,52. Nagylelkűen azt is felajánlja, hogy ő csak 8 forintra indul. Mekkora összeggel induljak, ha most is legalább 0,95 valószínűséggel nyerni akarok?

Megoldás: Most $p = 0,48$, $A = n + 8$, $n = ?$

Járjunk el úgy, mint az 1. feladatban (a relációs jel iránya negatívval való szorzás/osztás miatt fordul meg):

$$\frac{1 - \left(\frac{1 - 0,48}{0,48}\right)^n}{1 - \left(\frac{1 - 0,48}{0,48}\right)^{n+8}} \geq 0,95$$

$$1 - \left(\frac{0,52}{0,48}\right)^n \leq 0,95 \cdot \left[1 - \left(\frac{0,52}{0,48}\right)^n \cdot \left(\frac{0,52}{0,48}\right)^8\right]$$

$$0,05 \leq \left(\frac{0,52}{0,48}\right)^n \left[1 - 0,95 \left(\frac{0,52}{0,48}\right)^8\right]$$

$$\frac{0,05}{1 - 0,95 \left(\frac{0,52}{0,48}\right)^8} \geq \left(\frac{0,52}{0,48}\right)^n$$

Viszont itt a baloldali kifejezés negatív (kb. $-0,0623$), tehát nincs logaritmusa (az egész persze azért van, mert most $\frac{1-p}{p} > 1$). Vagyis azt kaptuk, hogy ez az egyenlőtlenség nem oldható meg. Tehát bármennyi pénzzel is ülünk le játszani, a nyerési valószínűségünk soha nem lesz több 0,95-nál, de azt is tudjuk, hogy minél több pénzzel kezdünk, annál nagyobb valószínűséggel nyerjük meg végül a játékot. Akkor legfeljebb mekkora lehet a nyerésünk valószínűsége?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\text{nyerek}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1 - 0,48}{0,48}\right)^n}{1 - \left(\frac{1 - 0,48}{0,48}\right)^{n+8}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{0,52}{0,48}\right)^n}{1 - \left(\frac{0,52}{0,48}\right)^{n+8}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\left(\frac{0,52}{0,48}\right)^n} - 1}{\frac{1}{\left(\frac{0,52}{0,48}\right)^n} - \left(\frac{0,52}{0,48}\right)^8} =$$

$$= \frac{-1}{-\left(\frac{0,52}{0,48}\right)^8} = \left(\frac{0,48}{0,52}\right)^8 \approx 0,5271.$$

Általánosan, ha $p < 1 - p$, nekünk n_1 forintunk van, ellenfelünk pedig n_2 egységgel kezdi a játékot, akkor a nyerésünk valószínűségének határértéke:

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} P(\text{nyerek}) = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n_1+n_2}} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{n_2}.$$

5. Tegyük fel, hogy nekem most is 10 forintom van, viszont az ellenfelemnek végtelen sok pénze van, a nyerési esélyem pedig minden egyes játszmában 0,55.
 - a) Milyen valószínűséggel fogom elvesztíteni az összes pénzemet?
 - b) Mi a valószínűsége, hogy a játék során valamikor 16 forintom lesz? És annak, hogy 100?
 - c) Mi a valószínűsége, hogy végtelen sokáig tart a játék?
 - d) Mekkora indulóösszeggel játszunk, hogy legalább 0,9 valószínűséggel ne veszítsek?
6. Tegyük fel, hogy nekem most is 10 forintom van, viszont az ellenfelemnek végtelen sok pénze van, a nyerési esélyem pedig minden egyes játszmában 0,45.
 - a) Milyen valószínűséggel fogom elvesztíteni az összes pénzemet?
 - b) Mi a valószínűsége, hogy a játék során valamikor 15 forintom lesz? És annak, hogy 20?
 - c) Mi a valószínűsége, hogy végtelen sokáig tart a játék?
7. Wagner úr záráskor kilép a Három Piros Dugóhúzóból, és az elfogyasztott nagy mennyiségű whisky hatására $1/2-1/2$ valószínűséggel lép egyet jobbra illetve balra. Bolyongását addig folytatja, míg bele nem esik a kocsmától 400 lépésre levő tengerbe, vagy el nem éri a 100 lépésnyire található kényelmes szemetes kukát.
 - a) Mekkora valószínűséggel éri el a biztonságos szemetest? Milyen eséllyel zuhan bele a tengerbe? Mekkora annak a valószínűsége, hogy bolyongása sosem ér véget?
 - b) Fülíg Jimmy elhatározza, olyan módon csökkenti Wagner úr esélyeit, hogy ás egy mély gödröt a kocsmá és a tenger közé. Hová ássák a gödröt, ha azt szeretnék, hogy Wagner úr legfeljebb 0,5 valószínűséggel érjen haza?
 - c) Megjelenik Tüskés Vanek, aki azt javasolja, hogy inkább hajítsák a tengerbe a szemetest, mely Wagner úr szállásául szolgált, ekkor ugyanis biztosan a tengerben köt ki (mármint Wagner úr). Igaza van neki?
8. Pizkos Fred ellopta Wagner úr bal cipőjét, aki így a hirtelen támadt aszimmetria hatására 0,45 valószínűséggel lép a szemetes, és 0,55 valószínűséggel lép a tenger felé. Válaszoljuk meg így is az előző feladat kérdéseit!

Számítógépes feladatok

1. Jelölje $f(n_1, n_2, p)$ annak valószínűségét, hogy megnyerünk egy olyan játékot, melyben nekünk n_1 kezdőtőkének van, ellenfelünknek n_2 , és minden egyes játszmában p valószínűséggel nyerünk (illetve $1 - p$ valószínűséggel veszítünk) egy egységet.
 - a) Határozzuk meg a következőket: $f(10, 1000, 0.8)$, $f(100, 10000, 0.8)$, $f(10, 100, 0.4)$, $f(2, 20, 0.4)$.
 - b) Ábrázoljuk az $f(100, 100, p)$ függvényt!
2. Legyen $n_1 = 100$ és $n_2 = 100$. A vízszintes tengelyen ábrázoljuk a játékok számát, a függőlegesen pedig az aktuális tőkénket.
 - a) Ábrázoljuk a folyamatot $p = 0,5$ esetén!
 - b) Ábrázoljuk a folyamatot $p = 0,6$ esetén!

2.2. A játék várható időtartama

Jelölje $d(n)$ a játék várható időtartamát (azaz a játszmák várható számát) a bevezetőben leírt szerencsejáték esetén. Ekkor az alábbi differenciaegyenlet szolgáltatja a megoldást:

$$d(n) = p d(n+1) + (1-p) d(n-1) + 1,$$

a peremfeltételek most $d(0) = 0$ és $d(A) = 0$. A megoldás most is függ attól, hogy $p = 1 - p$ teljesül vagy sem.

1. Ha $p \neq 1 - p$:

Vegyük észre, hogy $d(n) = \frac{n}{1-2p}$ megoldása az egyenletnek, továbbá a linearitás miatt bármely két megoldás $\delta(n)$ különbsége kielégíti a

$$\delta(n) = p\delta(n+1) + (1-p)\delta(n-1)$$

egyenletet, melyről már tudjuk, hogy minden megoldása $c_1 + c_2 \left(\frac{1-p}{p}\right)^n$ alakú. Tehát $p \neq 1 - p$ esetén az általános megoldás:

$$d(n) = \frac{n}{1-2p} + c_1 + c_2 \left(\frac{1-p}{p}\right)^n.$$

A peremfeltételek felhasználásával kapjuk a megoldást:

$$d(n) = \frac{n}{1-2p} - \frac{A}{1-2p} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^A}.$$

2. Ha $p = 1 - p = \frac{1}{2}$:

Az előző esetben talált partikuláris megoldás most nem felel meg, de a $d(n) = -n^2$ már kielégíti az egyenletet, továbbá a linearitás miatt bármely két megoldás $\delta(n)$ különbsége kielégíti a

$$\delta(n) = \frac{1}{2}\delta(n+1) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

egyenletet, melynek minden megoldása $c_1 + c_2 n$ alakú, így $p = 1 - p = \frac{1}{2}$ esetén az általános megoldás:

$$d(n) = -n^2 + c_1 + c_2 n.$$

A peremfeltételek felhasználásával a megoldás:

$$d(n) = n(A - n).$$

Feladatok

- Határozzuk meg az előző feladatokban a játék várható időtartamát (ahol lehet)!
- Általános esetben mi a helyzet, ha $A \rightarrow \infty$? Vizsgáljuk a kérdést $p < 1 - p$, $p = 1 - p$ és $p > 1 - p$ esetén!

Számítógépes feladatok

- Jelölje $d(n_1, n_2, p)$ a játék osszának váható értékét egy olyan játékban, ahol nekünk n_1 kezdőtőkének van, ellenfelünknek n_2 , és minden egyes játszmában p valószínűséggel nyerünk (illetve $1 - p$ valószínűséggel veszítünk) egy egységet.

a) Határozzuk meg a következőket: $d(10, 100, 0.8)$, $d(10, 10000, 0.8)$, $d(100, 1000, 0.4)$, $d(10, 100, 0.4)$.

b) Ábrázoljuk az $d(100, 100, p)$ és $d(10, 100, p)$ függvényt!