3. Sztochasztikus folyamatok általában

Sztochasztkus folyamat alatt időben végbemenő véletlen folyamatot értünk. Precízebben, egy sztochasztikus folyamat idő szerint indexelt valószínűségi változók serege (X_t). A mi esetünkben az idő a $\{0,1,2,\ldots\}$ vagy $[0,\infty)$ valamely részhalmaza. Az első esetben *diszkrét idejű*, a másodikban pedig *folytonos idejű* folyamatról beszélünk. A halmaz, melyből az X_t valószínűségi változó az értékeit veszi az *állapottér*. A vizsgálatainkban egyaránt szerepelni fognak *diszkrét* (azaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen) és *folytonos* (azaz $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}^n$) állapotterű sztochasztikus folyamatok.

Példák sztochasztikus folyamatokra[1]

- Véletlen bolyongás $\mathbb{Z}^d$-ben
- A tönkremenési probléma
- Sorbanállási (tömegkiszolgálási) modellek
- Készletezési modellek
- Brown–mozgás (Wiener–folyamat)
- Poisson–folyamat
- Genetikai modellek
- Populáció dinamikai modellek
- Közlekedési modellek
- Terhelési-kifáradási modellek
- stb.

[1] Ami most hirtelen eszembe jutott...

4. Véges állapotterű Markov–láncok

4.1. Bevezetés

Legyen X_n egy diszkrét idejű sztochasztikus folyamat ($n = 0,1,2,\ldots$), ahol X_n értékeit az $S = \{1,2,\ldots,N\}$ halmazból veszi. X_n lehetséges értékeit a folyamat (vagy rendszer) lehetséges állapotainak nevezzük. A folyamat teljes valószínűségi leírásához az alábbi valószínűségekre van szükségünk minden n és minden véges $\{i_0, i_1, \ldots, i_n\}$ esetén:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)\,.$$

Ezzel ekvivalens, ha megadjuk a kezdeti eloszlást

$$\varphi(i) = P(X_0 = i) \quad i = 1,2,\ldots,N\,,$$

és az állapotok közötti átmenet valószínűségét:

$$q_n(i_n|i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}) = P(X_n = i_n|X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})\,,$$

melyekkel aztán

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \varphi(i_0)\, q_1(i_1|i_0)\, q_2(i_2|i_0, i_1) \ldots q_n(i_n|i_0, i_1, \ldots, i_{n-1})\,.$$

Mi olyan folyamatokkal fogunk foglalkozni, melyek kielégítik az úgynevezett *Markov tulajdonságot.* A Markov tulajdonság azt jelenti, hogy a folyamat jövőbeni állapota csak a jelen állapottól függ, a múltbeli történésektől nem. Más szavakkal: a rendszer jelen állapota a lényeges, és nem az, hogy miként került a rendszer ebbe az állapotba. Matematikailag ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$P(X_n = i_n|X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1})\,.$$

Egy további fontos feltevésünk lesz, miszerint az állapotok közötti átmenet valószínűsége nem függ az időtől (n-től). Ezt a tulajdonságot *homogenitásnak* nevezzük. A *homogén Markov–lánc* tehát egy olyan sztochasztikus folyamat, melyre

$$P(X_n = i_n|X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) = p(i_{n-1}, i_n)\,.$$

Ha kifejezetten nem hangsúlyozzuk az ellenkezőjét, akkor a továbbiakban Markov–lánc alatt mindig homogén Markov–láncot értünk. A Markov–lánccal kapcsolatos valószínűségek meghatározásához szükségünk van a kezdeti eloszlásra ($\phi(i) = P(X_0 = i)$) és az *átmenetvalószínűségekre* ($p(i,j)$). Ezekkel:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \varphi(i_0)\, p(i_0, i_1)\, p(i_1, i_2) \ldots\, p(i_{n-1}, i_n)\,.$$

A Markov–lánc *átmenetvalószínűség mátrixa* olyan ($N \times N$-es) mátrix, melyben az i-edik sor j-edik eleme (azaz a mátrix (i,j) eleme) $p(i,j)$.

A P mátrix *sztochasztikus mátrix,* ha minden eleme nemnegatív és az egy sorban levő elemek összege egy, azaz

$$0 \le P_{ij} \le 1, \quad 1 \le i,j \le N, \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1, \quad 1 \le i \le N\,.$$

Bármely mátrix, amely kielégíti ezeket a feltételeket, lehet valamely Markov–lánc átmenetvalószínűség mátrixa.

4.1.1. Példák

1. **Kétállapotú Markov–lánc:** Tekintsünk egy telefonvonalat a foglaltság szempontjából. Legyen $X_n = 0$, ha a vonal szabad, és legyen $X_n = 1$, ha a vonal foglalt az n-edik időintervallumban. Tételezzük fel továbbá, hogy minden időintervallumban p valószínűséggel érkezik hívás (feltesszük azt is, hogy egynél több hívás nem jön egy időintervallumban), és a ha a vonal foglalt, akkor q valószínűséggel lesz szabad a következő időintervallumban. A folyamatot leíró Markov–lánc állapottere $S = \{0,1\}$, átmenetvalószínűség mátrixa pedig
$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}.$$

2. **Egyszerű sorbanállási modell:** Tegyük fel, hogy az előző példában megengedjük, hogy a rendszerben egyszerre egy hívás várakozhasson is. Ekkor az állapottér (vagyis a rendszerben levő hívások száma) $S = \{0,1,2\}$, az átmenetvalószínűség mátrix pedig
$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 \\ q(1-p) & 1-q(1-p)-p(1-q) & p(1-q) \\ 0 & q & 1-q \end{bmatrix}.$$

3. **Bolyongás visszaverő falakkal:** Tekintsünk egy részecskét, mely a $\{0,1,\ldots,N\}$ pontokon ugrál. Minden egyes lépésben p valószínűséggel lép egyet jobbra és $1-p$ valószínűséggel lép egyet balra, ha pedig a határon van, akkor 1 valószínűséggel lép egyet visszafelé. Ekkor az átmenetvalószínűség mátrix elemei:
$$p(i,i+1) = p, \quad p(i,i-1) = 1-p, \quad \text{ha } 0 < i < N, \quad \text{és} \quad p(0,1) = 1, \quad p(N,N-1) = 1\,.$$
Elnevezések: ha $p = 1/2$, akkor szimmetrikus véletlen bolyongásról, ha pedig $p \neq 1/2$, akkor nem szimmetrikus véletlen bolyongásról beszélünk.

4. **Bolyongás elnyelő falakkal:** Az előzőhöz képest annyi változtatunk, hogy ha a részecske eléri a 0 vagy az N állapotot, akkor ott is marad örökre. Ekkor az átmenetvalószínűség mátrix elemei:
$$p(i,i+1) = p, \quad p(i,i-1) = 1-p, \quad \text{ha } 0 < i < N, \quad \text{és} \quad p(0,0) = 1, \quad p(N,N) = 1\,.$$
Vegyük észre, hogy ez az eset megfelel a tönkremenési problémának.

5. **Bolyongás félig elnyelő falakkal:** Most annyit változtatunk, hogy ha a részecske eléri a 0 vagy az N állapotot, akkor onnan p (illetve $1-p$) valószínűséggel ugorhat a belső pontok felé. Ekkor az átmenetvalószínűség mátrix elemei:
$$p(i,i+1) = p, \quad p(i,i-1) = 1-p, \quad \text{ha } 0 < i < N, \quad \text{és}$$
$$p(0,0) = 1-p, \quad p(0,1) = p, \quad p(N,N) = 1, \quad p(N,N-1) = 1-p\,.$$

6. **Bolyongás gráfon:** Véges, egyszerű, irányítatlan gráfról van szó, ezen bolyong egy részecske. Tekintsük azt a Markov–láncot, melynek állapotai a gráf csúcsainak felelnek meg. Minden egyes ugrásnál a részecske véletlenszerűen választ egyet azok közül a csúcsok közül, melyek szomszédosak vele. Jelölje $d(i)$ az i-edik csúcs szomszédainak számát. Ekkor az átmenetvalószínűség mátrix elemei:
$$p(i,j) = \begin{cases} \dfrac{1}{d(i)} & \text{ha } i \text{ és } j \text{ szomszédosak} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

Feladatok

1. (Ehrenfest-féle diffúziós modell) Az én kutyámban és a szomszédom kutyájában együttesen n bolha lakik. Minden nap egy véletlenszerűen (egyforma eséllyel) választott bolha átugrik a másik kutyába. Azt vizsgáljuk, hogy az én kutyámban hogyan alakul a bolhák száma. Adjuk meg az átmenetvalószínűség mátrixot!

   Megoldás: Jelölje X_k az én kutyámban levő bolhák számát a k-adik napon. Az állapottér (az én kutyámban levő bolhák száma) $S = \{0,1,2,\ldots,n\}$, az átmenetvalószínűség mátrix pedig a következő $(n+1)\times(n+1)$-es mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{n-1}{n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} & 0 & \frac{n-2}{n} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n-1}{n} & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. (Bernoulli–Laplace féle diffúziós modell) N piros és N fehér golyó két dobozban van elhelyezve úgy, hogy mindig N golyó van mindkét dobozban. Minden időpillanatban mindkét dobozból kihúzunk egy-egy golyót és azokat kicseréljük. Azt figyeljük, hogy hogyan alakul a piros golyók száma a bal oldali dobozban. Adjuk meg az átmenetvalószínűség mátrixot!

   Megoldás: Jelölje X_n a bal oldali dobozban levő piros golyók számát az n-edik lépés után. X_n lehetséges értékei $0,1,2,\dots,N$. Határozzuk meg először a szélsőséges esetek valószínűségeit:

$$P(X_n = 1|X_{n-1} = 0) = 1 \quad P(X_n = j\,(j \neq 1)|X_{n-1} = 0) = 0$$
$$P(X_n = N-1|X_{n-1} = N) = 1 \quad P(X_n = j\,(j \neq N-1)|X_{n-1} = N) = 0$$

   Legyen k darab piros golyó a kérdéses dobozban ($k \neq 0$, $k \neq N$). Ekkor van még benne $N-k$ fehér, a másikban pedig $N-k$ piros és k fehér. Egy lépés alatt a piros golyók száma nőhet eggyel, csökkenhet eggyel vagy nem változik. A pirosak száma akkor nem változik, ha mindkét dobozból fehéret vagy mindkettőből pirosat választunk. Ennek valószínűsége:

$$P(X_n = k|X_{n-1} = k) = \frac{k}{N}\,\frac{N-k}{N} + \frac{N-k}{N}\,\frac{k}{N} = 2\,\frac{k}{N}\,\frac{N-k}{N} = 2\,\frac{k(N-k)}{N^2}\,.$$

   A pirosak száma akkor csökken eggyel, ha a bal oldaliból pirosat választunk, a másikból pedig nem. Ennek valószínűsége:

$$P(X_n = k-1|X_{n-1} = k) = \frac{k}{N}\,\frac{k}{N} = \frac{k^2}{N^2}\,.$$

   A pirosak száma akkor növekszik eggyel, ha a bal oldaliból fehéret választunk, a másikból pedig pirosat. Ennek valószínűsége:

$$P(X_n = k+1|X_{n-1} = k) = \frac{N-k}{N}\,\frac{N-k}{N} = \frac{(N-k)^2}{N^2}\,.$$

   Az átmenetvalószínűség mátrix így az alábbi $(N+1) \times (N+1)$-es mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{N^2} & \frac{2(N-1)}{N^2} & \frac{(N-1)^2}{N^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{4}{N^2} & \frac{4(N-2)}{N^2} & \frac{(N-2)^2}{N^2} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{(N-1)^2}{N^2} & \frac{2(N-1)}{N^2} & \frac{1}{N^2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Egy szabályos dobókockát dobunk fel újra meg újra. Minden dobás után feljegyezzük az addig dobott számok maximumát. Igazoljuk, hogy homogén Markov láncot kapunk, és adjuk meg az átmenetvalószínűség mátrixot!

   Megoldás: Ha eddig az 1 volt a maximum, akkor bármit dobunk, a dobott szám lesz a maximum, tehát mind a hat esetnek $1/6$ a valószínűsége. Ha 2 volt a maximum, akkor 1 már nem lehet, tehát ennek a valószínűsége 0. A 2 akkor marad a maximum, ha 1-et vagy 2-t dobunk, ennek valószínűsége $2/6$, a 3, 4, 5, 6 állapotoké pedig $1/6 - 1/6$. A többi sor hasonló gondolatmenettel megkapható.

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Egy dobókockát az előző mozgatástól függetlenül diszkrét időegységenként átfordítunk valamelyik szomszédos oldalára. Írjuk le a folyamatot Markov-lánc segítségével.

   Megoldás: Legyen az állapot az éppen felül levő érték. Emlékezzünk arra, hogy a szabályos dobókocka szemközti oldalain levő értékek összege mindig hét, azaz a szemköztiek: $1-6$, $2-5$, $3-4$. Így pl. ha az 1 van felül, akkor egy forgatás után felül lehet a 2, 3, 4 és 5 bármelyike, viszont az 1 és a 6 nem. Ezért

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

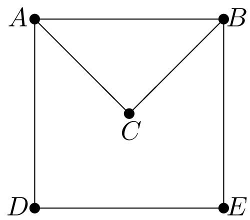
5. Három fehér és három fekete golyót osztunk szét egyenlően két urnába. Egy lépés abból fog állni, hogy véletlenszerűen kiveszünk egy golyót az első urnából, beledobjuk a másodikba, majd kiveszünk egy golyót a második urnából, és beletesszük az elsőbe. Jelölje X_n az első urnában található fehér golyók számát az n-edik lépés után.

   a) Mutassuk meg, hogy X_n Markov–lánc. Mik a folyamat állapotai? Írjuk fel az átmenetvalószínűség mátrixot!

   b) Oldjuk meg a feladatot azzal a módosítással, hogy egy lépésben egyszerre veszünk ki egy-egy golyót a két urnából, és kicseréljük őket.

   c) Tegyük fel, hogy az első urnában kezdetben csak fehér golyó volt. Milyen valószínűséggel lesz egy lépés után a rendszer az egyes állapotokban? Válaszoljuk meg a kérdést mindkét esetben!

6. Egy bolha ugrál az alábbi gráfon oly módon, hogy mindig valamely szomszédos csúcsba ugrik és a lehetőségei közül egyenlő valószínűséggel választ. Írjuk fel az átmenetvalószínűség mátrixot!



7. Adjunk egyszerű modellt az alábbi átmenetvalószínűség mátrixszal rendelkező Markov-láncra!

$$\begin{bmatrix} 0 & q & 0 & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & 0 & p & 0 \end{bmatrix}$$

8. Egy bolha ugrál az $1, 2, 3, 4, 5$ számokon. Ha a $2, 3, 4$ számok valamelyikében van, akkor 0,5 valószínűséggel lép jobbra, 0,5 valószínűséggel lép balra, továbbá

   a) ha az 1-ben van, akkor mindenképpen jobbra lép, ha az 5-ben van, akkor mindenképpen balra lép (a falak visszaverőek);

   b) ha az 1-ben vagy az 5-ben van, akkor mindenképpen ott is marad (a falak elnyelőek);

   c) ha az 1-ben van, akkor 0,5 valószínűséggel lép jobbra lép, 0,5 valószínűséggel ott marad, ha az 5-ben van, akkor 0,5 valószínűséggel balra lép, 0,5 valószínűséggel ott marad (a falak félig elnyelőek).

   Mindhárom esetben adjuk meg az átmenetvalószínűség mátrixot! Milyen valószínűséggel lesz a bolha az egyes állapotokban egy ugrás után, ha a kezdéskor az $1, 2, 3$ állapotok mindegyikéből $1/3$ eséllyel indulhatott?

9. Kovácsék naponta olvassák az újságot, majd a szoba egyik sarkában lévő kupac tetejére teszik a kiolvasott példányt. Esténként $1/3$ valószínűséggel valamelyik családtag fogja az egész kupacot, és kidobja a szemétbe. Valahányszor 5 újság gyűlik fel a kupacban, Kovács úr azonnal kidobja az egész rakást. Tekintsük reggelente a kupacban található újságok számát. Modellezhetjük-e Markov–lánccal a folyamatot? Ha igen, akkor írjuk fel a folyamat átmenetvalószínűség mátrixát!