

# Markov-láncok hosszú távú viselkedése

## 1 Többlépéses átmenetvalószínűség mátrix

Legyen adott a  $P$  átmenetvalószínűség mátrix és a  $\varphi_0$  kezdeti eloszlás. Kérdés, hogy miként lehetne meghatározni az egyes állapotokban való tartózkodás valószínűségét az  $n$ -edik lépés múlva. Defináljuk az  $n$ -lépéses átmenetvalószínűségeket az alábbi módon:

$$p_n(i, j) = P(X_n = j | X_0 = i) = P(X_{n+k} = j | X_k = i),$$

ahol az utolsó egyenlőséget a homogenitás indokolja (vagyis az, hogy az átmenet valószínűsége nem függ attól, hogy mikor történik). A teljes valószínűség tétele alapján ekkor

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in S} \varphi_0(i) P(X_n = j | X_0 = i).$$

Megmutatjuk, hogy az  $n$  lépéses átmenetvalószínűség tulajdonképpen a  $P^n$  mátrix  $(i, j)$  eleme. Ez  $n = 1$  esetén triviális. Tegyük fel most, hogy  $n$ -re is igaz. Megmutatjuk, hogy ekkor  $n + 1$ -re is teljesül:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = j | X_0 = i) &= \sum_{k \in S} P(X_n = k | X_0 = i) P(X_{n+1} = j | X_n = k) \\ &= \sum_{k \in S} p_n(i, k) p(k, j). \end{aligned}$$

Mivel  $p_n(i, k)$  a  $P^n$  mátrix  $(i, k)$  eleme, ezért a mátrixszorzás szabályai miatt a kapott összeg a  $P^n P = P^{n+1}$  mátrix  $(i, j)$  eleme.

A kezdeti  $\varphi_0$  eloszlás egy  $N$  hosszúságú vektor, mely az egyes állapotokban való tartózkodás valószínűségeit adja meg a 0 időpontban. Adott  $\varphi_0$  esetén  $n$  lépés múlva az eloszlás:

$$\varphi_n = \varphi_0 P^n.$$

### Példa

Legyen az állapottér  $S = \{0, 1\}$ , az átmenetvalószínűség mátrix pedig

$$P = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}$$

Tegyük fel, hogy a kezdeti időpontban a rendszer a 0 állapotban volt, azaz  $X_0 = 0$ . Ekkor a kezdeti eloszlás  $\varphi_0 = [1 \ 0]$ . Milyen valószínűséggel tartózkodik a rendszer az egyes állapotokban hat lépés (időegység) múlva? A válaszhoz a 6 lépés utáni eloszlást kell meghatároznunk ( $\varphi_6$ ), ami nem más mint  $\varphi_0 P^6$ . Az átmenetvalószínűségmátrix hatodik hatványa (pl. Matlab, Scilab, Python, Octave, Python stb. segítségével):

$$P^6 = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}^6 \approx \begin{bmatrix} 0,424 & 0,576 \\ 0,384 & 0,616 \end{bmatrix}.$$

Az  $n = 6$  időpontban az eloszlás tehát:

$$\varphi_6 = \varphi_0 P^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,424 & 0,576 \\ 0,384 & 0,616 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,424 & 0,576 \end{bmatrix}.$$

Vagyis az  $n = 6$  időpontban kb. 0,424 valószínűséggel lesz a rendszer (folyamat) a 0, és 0,576 valószínűséggel lesz az 1-es állapotban.

### Példa

Egy Markov-lánc lehetséges állapotai 1, 2, 3. Átmenetvalószínűség mátrixa és kezdeti eloszlása az alábbi:

$$P = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} \quad \varphi_0 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a 2 és 3 lépéses átmenetvalószínűség mátrixokat, és az alábbi valószínűségeket!

a)  $P(X_1 = 2 | X_0 = 1)$

b)  $P(X_3 = 2 | X_2 = 1)$

- c)  $P(X_2 = 1|X_0 = 2)$
- d)  $P(X_4 = 1|X_2 = 2)$
- e)  $P(X_3 = 2|X_0 = 3)$
- f)  $P(X_2 = 3)$
- g)  $P(X_3 = 1)$
- h)  $P(X_4 = 1 \text{ vagy } 2 | X_2 = 2)$
- i)  $P(X_7 = 3, X_4 = 1, X_2 = 3|X_0 = 2)$
- j)  $P(X_7 = 3, X_4 = 1, X_2 = 3)$

**Megoldás:** A két- és háromlépéses átmenetvalószínűségmátrixok:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,38 & 0,28 & 0,34 \\ 0,30 & 0,30 & 0,40 \\ 0,36 & 0,16 & 0,48 \end{bmatrix} \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0,352 & 0,212 & 0,436 \\ 0,370 & 0,220 & 0,410 \\ 0,344 & 0,264 & 0,392 \end{bmatrix}.$$

- a)  $P(X_1 = 2|X_0 = 1)$  a  $P$  mátrix  $(1, 2)$  eleme, azaz  $0,2$ .
- b) Mivel a Markov-lánc homogén, ezért csak az számít, hogy egy lépés alatt melyik állapotból melyik állapotba vált a rendszer, de az nem, hogy mikor, ezért  $P(X_3 = 2|X_2 = 1) = P(X_1 = 2|X_0 = 1) = 0,2$ .
- c) A  $P(X_2 = 1|X_0 = 2)$  valószínűség a  $P^2$  mátrix  $(2, 1)$  eleme, azaz  $0,3$ .
- d)  $P(X_4 = 1|X_2 = 2) = P(X_2 = 1|X_0 = 2) = 0,3$ .
- e) A  $P(X_3 = 2|X_0 = 3)$  valószínűség a  $P^3$  mátrix  $(3, 2)$  eleme, azaz  $0,264$ .
- f)  $P(X_2 = 3) = \sum_{i=1}^3 P(X_2 = 3|X_0 = i)P(X_0 = i)$ . Itt  $P(X_2 = 3|X_0 = i)$  értékei a  $P^2$  mátrix harmadik oszlopából származnak,  $P(X_0 = i)$  értékei pedig  $\varphi_0$  megfelelő koordinátái. Így

$$P(X_2 = 3) = 0,34 \cdot 0,5 + 0,40 \cdot 0,5 + 0,48 \cdot 0 = 0,37.$$

Vegyük észre, hogy a kérdéses valószínűség tulajdonképpen a  $\varphi_0 P^2$  vektor harmadik eleme.

g) Ez pedig a  $\varphi_0 P^3$  vektor első eleme. Hasonlóan az előzőhöz,

$$\begin{aligned} P(X_3 = 1) &= \sum_{i=1}^3 P(X_3 = 1 | X_0 = i) P(X_0 = i) \\ &= 0,352 \cdot 0,5 + 0,370 \cdot 0,5 + 0,344 \cdot 0 = 0,361 \end{aligned}$$

h)  $P(X_4 = 1 \text{ vagy } 2 | X_2 = 2) =$

$$P(X_4 = 1 | X_2 = 2) + P(X_4 = 2 | X_2 = 2) = 0,30 + 0,30 = 0,6.$$

i)  $P(X_7 = 3, X_4 = 1, X_2 = 3 | X_0 = 2) =$

$$\begin{aligned} &P(X_7 = 3 | X_4 = 1) \cdot P(X_4 = 1 | X_2 = 3) \cdot P(X_2 = 3 | X_0 = 2) = \\ &= 0,436 \cdot 0,36 \cdot 0,40 = 0,062784. \end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned} &P(X_7 = 3, X_4 = 1, X_2 = 3) \\ &= \sum_{i=1}^3 P(X_7 = 3, X_4 = 1, X_2 = 3 | X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i=1}^3 P(X_7 = 3 | X_4 = 1) \cdot P(X_4 = 1 | X_2 = 3) \cdot P(X_2 = 3 | X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\ &= P(X_7 = 3 | X_4 = 1) \cdot P(X_4 = 1 | X_2 = 3) \cdot \sum_{i=1}^3 P(X_2 = 3 | X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\ &= P(X_7 = 3 | X_4 = 1) \cdot P(X_4 = 1 | X_2 = 3) \cdot P(X_2 = 3) = 0,436 \cdot 0,36 \cdot 0,37 \\ &= 0,0580752 \end{aligned}$$

## 2 Hosszútávú viselkedés és invariáns eloszlás

Egy véges állapotterű Markov-lánc hosszútávú viselkedésének vizsgálata a fentiek szerint tulajdonképpen  $P^n$  vizsgálatát jelenti nagy  $n$ -ek esetén. Nézzük például a kétállapotú (0 és 1) Markov-lánc esetén az átmenetvalószínűség mátrixot

$P(X_1 = 1 | X_0 = 0) = p = 1/4$  és  $P(X_1 = 0 | X_0 = 1) = q = 1/6$  esetén:

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}.$$

Bármely matematikai szoftverrel (pl. Matlab, Scilab, Maple, Mathematica, stb. vagy Python, C, stb.) könnyedén kiszámíthatjuk pl. az ezredik hatványát is, és kapjuk a következőt:

$$P^n \approx \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Nézzünk most egy másik példát, legyen az átmenetvalószínűség mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 2/3 & 5/24 \\ 0 & 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}.$$

Elegendően nagy  $n$  esetén pedig

$$P^n \approx \begin{bmatrix} 0,182 & 0,364 & 0,455 \\ 0,182 & 0,364 & 0,455 \\ 0,182 & 0,364 & 0,455 \end{bmatrix}.$$

Láthatólag mindkét esetben létezik  $P^n$  határértéke (határmátrixa) és ennek minden sora megegyezik, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \Pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\pi} \\ \vdots \\ \underline{\pi} \end{bmatrix},$$

ahol  $\underline{\pi} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_N]$ . Az első példában  $\underline{\pi} = [0,4, 0,6]$ , a másodikban pedig  $\underline{\pi} = [2/11, 4/11, 5/11]$ .

Könnyen látható, hogy ezekben az esetekben tetszőleges  $\varphi_0$  kezdeti eloszlás esetén a

határeloszlás (azaz  $\varphi_n$  'határértéke'):

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0 P^n = \varphi_0 \lim_{n \rightarrow \infty} P^n \\
&= \begin{bmatrix} \varphi_{01} & \varphi_{02} & \dots & \varphi_{0N} \end{bmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{bmatrix}^n \\
&= \begin{bmatrix} \varphi_{01} & \varphi_{02} & \dots & \varphi_{0N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A vektor-mátrix szorzat elemeit sor-oszlop szorzással meghatározhatjuk. A szorzat első eleme:

$$\varphi_{01} \cdot \pi_1 + \varphi_{02} \cdot \pi_1 + \dots + \varphi_{0N} \cdot \pi_1 = \pi_1 (\varphi_{01} + \varphi_{02} + \dots + \varphi_{0N}) = \pi_1$$

mert  $\varphi_{01} + \varphi_{02} + \dots + \varphi_{0N} = 1$ , hiszen eloszlásról van szó. Hasonlóan kiszámítható a többi koordináta is, azt kaptuk tehát, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0 P^n = \varphi_0 \Pi = \underline{\pi}.$$

Ezek szerint ilyen esetekben a határeloszlás bele van kódolva az átmenetvalószínűség mátrixba, nem függ a kezdeti eloszlástól. Másként megfogalmazva, a kezdeti eloszlás idővel elveszti jelentőségét, hatása fokozatosan (gyorsan vagy lassan, de) elmosódik.

Legyen most  $\underline{\pi}$  határeloszlás, azaz valamely  $\varphi_0$  kezdeti eloszlás esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0 P^n = \underline{\pi}.$$

Ekkor

$$\underline{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0 P^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0 P^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\varphi_0 P^n}_{\underline{\pi}} P = \underline{\pi} P.$$

Azt látjuk tehát, hogy ebben az esetben a  $\underline{\pi}$  eloszlás nem változik a  $P$  átmenetvalószínűség mátrixszal való szorzás hatására. A  $\underline{\pi}$  eloszlást invariáns (vagy stacionárius, vagy egyensúlyi, vagy állandósult) eloszlásnak nevezzük, ha

$$\underline{\pi} = \underline{\pi} P.$$

Figyeljük meg, hogy ekkor  $\underline{\pi}$  az 1 sajátértékhez tartozó baloldali sajátvektora  $P$ -nek.

Az invariáns eloszlással kapcsolatban a következő kérdések merülnek fel:

- Minden  $P$  sztochasztikus mátrix esetén létezik invariáns eloszlás?
- Az invariáns eloszlás egyértelmű-e, azaz adott  $P$  esetén csak egy invariáns eloszlás lehet (ha van egyáltalán)?
- Milyen esetekben mondhatjuk azt, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} \underline{\pi} \\ \underline{\pi} \\ \vdots \\ \underline{\pi} \end{bmatrix},$$

és így tetszőleges  $\varphi_0$  kezdeti eloszlás esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0 P^n = \underline{\pi} ?$$

Legyen  $P$  egy olyan sztochasztikus mátrix, melynek minden eleme pozitív. Ekkor (a Perron–Frobenius tétel alapján):

- az 1 egyszeres sajátértéke  $P$ -nek,
- az 1-hez tartozó baloldali sajátvektorok között van olyan, melynek minden eleme pozitív (és így egy megfelelő konstans szorzóval valószínűség eloszlás készíthető belőle),
- $P$ -nek minden más sajátértékének az abszolút értéke kisebb, mint egy.

A fenteből következik, hogy ilyenkor az invariáns eloszlás egyértelmű és tetszőleges  $\varphi_0$  kezdeti eloszlás esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_0 P^n = \underline{\pi}$ .

Viszont láttunk arra példát (a  $3 \times 3$ -as mátrix), hogy nem csak ilyen tulajdonságú sztochasztikus mátrixok esetén létezik határeloszlás. Az ottani átmenetvalószínűség mátrixra nem igaz, hogy minden eleme pozitív, de mégis létezik határeloszlás. Tekintsük viszont az átmenetvalószínűség mátrix négyzetét:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 2/3 & 5/24 \\ 0 & 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0,594 & 0,354 & 0,052 \\ 0,177 & 0,510 & 0,312 \\ 0,021 & 0,250 & 0,729 \end{bmatrix}.$$

Láthatólag  $P^2$  már kielégíti a tétel feltételeit, ebből következően az 1 egyszeres sajátértéke  $P^2$ -nek a  $\underline{\pi}$  invariáns eloszlással mint a hozzá tartozó baloldali sajátvektorral, továbbá  $P^2$  minden más sajátértékének abszolút értéke kisebb egynél.

Megállapíthatjuk tehát a következőt:

*Legyen  $P$  egy sztochasztikus mátrix. Ha van olyan  $k \in \mathbb{N}$ , melyre  $P^k$  minden eleme pozitív, akkor*

- *létezik invariáns eloszlás,*
- *az invariáns eloszlás egyértelmű,*
- *a határmátrix pedig*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} \underline{\pi} \\ \underline{\pi} \\ \vdots \\ \underline{\pi} \end{bmatrix}.$$

Hogyan értelmezhetjük a  $\underline{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_N \end{bmatrix}$  eloszlást, illetve annak az elemeit? A  $\underline{\pi}$  vektor elemei az egyes állapotokban tartózkodás hosszú távú valószínűségét adják meg. Például hosszú idő után  $\pi_1$  annak a valószínűsége, hogy a rendszer az 1-es állapotban lesz. Hosszú idő alatt az idő átlagosan  $\pi_1$ -ed részét tölti a rendszer az 1-es állapotban. Természetesen ez a többi állapotra hasonlóan működik.

### 3 Állapotok osztályozása

Egy Markov-lánc lehetséges állapotait fogjuk csoportokba sorolni. A csoportba sorolás elve az lesz, hogy melyik állapotból melyikbe juthatunk el. Két állapot ugyanazon csoportba (osztályba) fog tartozni, ha eljuthatunk valahány lépéssel az egyikből a másikba, és valahány (nem feltétlenül ugyanannyi) lépéssel eljuthatunk a másikkól az egyikbe. Precízebben:

A  $j$  állapot elérhető az  $i$  állapotból, van olyan  $n$  lépésszám, amelyre igaz, hogy annyi lépéssel nem nulla annak a valószínűsége, hogy  $i$ -ből  $j$ -be jutunk, azaz van olyan  $n$ , hogy  $p_n(i, j) > 0$ .

Egy Markov-lánc  $i$  és  $j$  állapota *kapcsolódó* (jelölése:  $i \leftrightarrow j$ ), ha kölcsönösen elérhetőek egymásból, azaz ha léteznek olyan  $n, m \geq 0$  egészek, melyekre teljesül  $p_m(i, j) > 0$  és  $p_n(j, i) > 0$  is. Más szavakkal két állapot kapcsolódó, ha az egyikből a másik pozitív valószínűséggel elérhető, és ez fordítva is igaz. Az így definiált  $\leftrightarrow$  reláció ekvivalencia reláció az állapottéren, azaz

- reflexív:  $i \leftrightarrow i$ , hiszen  $p_0(i, i) = 1 > 0$ ,
- szimmetrikus:  $i \leftrightarrow j$ -ből a definíció alapján következik, hogy  $j \leftrightarrow i$ ,
- tranzitív: ha  $i \leftrightarrow j$  és  $j \leftrightarrow k$ , akkor  $i \leftrightarrow k$ . Ez is teljesül, hiszen ha  $p_{m_1}(i, j) > 0$  és  $p_{m_2}(j, k) > 0$ , akkor

$$\begin{aligned} p_{m_1+m_2}(i, k) &= P(X_{m_1+m_2} = k | X_0 = i) \geq P(X_{m_1+m_2} = k, X_{m_1} = j | X_0 = i) \\ &= P(X_{m_1} = j | X_0 = i) P(X_{m_1+m_2} = k | X_{m_1} = j) \\ &= p_{m_1}(i, j) p_{m_2}(j, k) > 0, \end{aligned}$$

azaz  $p_{m_1+m_2}(i, k) > 0$ .

Ez az ekvivalencia reláció az állapotteret diszjunkt halmazokra osztja fel, melyeket *kapcsolódó osztályoknak* nevezünk. Az  $i$  és a  $j$  állapot akkor és csak akkor tartozik ugyanabba az osztályba, ha  $i \leftrightarrow j$ . Ha csak egyetlen osztály van, akkor a Markov-lánc *irreducibilis* (felbonthatatlan), egyébként *reducibilis* (felbontható).

Mit is jelentenek ezek a tulajdonságok?

- Minden állapot egy osztályban van saját magával.
- Ha  $i$  egy osztályban van  $j$ -vel, akkor  $j$  is egy osztályban van  $i$ -vel.
- Ha  $i$  egy osztályban van  $j$ -vel és  $j$  egy osztályban van  $k$ -val, akkor  $i$  is egy osztályban van  $k$ -val.

## Példák

1. Tekintsük a szimmetrikus véletlen bolyongást *visszaverő* falakkal. Könnyen látható, hogy ekkor bármely állapotból eljuthatunk bármely állapotba, tehát a lánc egyetlen osztályból áll, irreducibilis (felbonthatatlan)

2. Tekintsük a szimmetrikus véletlen bolyongást *elnyelő* falakkal. A lánc ekkor három osztályból áll:  $\{0\}$ ,  $\{1, 2, \dots, N-1\}$  és  $\{N\}$ .

Ekkor, ha a kezdeti állapot az  $1, 2, \dots, N-1$  állapotok valamelyike, akkor a Markov-lánc 1 valószínűséggel elhagyja ezt az osztályt és nem tér vissza. Az ilyen tulajdonságú állapotokat *tranziensnek* (átmenetinek) nevezzük, a többit pedig *rekurrensnek* (visszatérőnek). Vagyis itt az  $\{0\}$  és az  $\{N\}$  állapot rekurrens, a többi tranziens. Ha egy Markov-lánc egy rekurrens osztályból indult, akkor sohasem fogja elhagyni azt az osztályt.

## Feladatok

1. Egy Markov-lánc állapottere legyen  $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , átmenetvalószínűség mátrixa pedig az alábbi:

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

- Melyek a kapcsolódó osztályok? Melyek rekurrensnek és melyek tranziensnek?
- Tegyük fel, hogy a lánc a 0-ból indul. Mi a valószínűsége, hogy hosszú idő elteltével ismét a 0-ban lesz?
- Tegyük fel, hogy a lánc az 5-ből indul. Mi a valószínűsége, hogy hosszú idő elteltével ismét az 5-ben lesz?
- Módosítsuk úgy az átmenetvalószínűség mátrixot, hogy a lánc csak egyetlen osztályból álljon!

## Megoldás:

- Az 0-ból csak az 1-es állapotba juthatunk el (ill. saját magába) és viszont, tehát ezek egy osztályba tartoznak, más állapot pedig nincs ebben az osztályban. Hasonló a helyzet a 2-es és 4-es állapotokkal is. A 2-es

ből csak a 4-es be juthatunk (ill. saját magába) és viszont, tehát ezek is egy osztályt alkotnak, más pedig nincs ebben az osztályban. Kicsit más a helyzet a 3-as és 5-ös állapotokkal. El tudunk jutni az egyikből a másikba oda-vissza, tehát a 3-as és az 5-ös biztosan egy osztályba tartoznak. Belőlük viszont máshova is el lehet jutni (pl. 3-asból az 1-esbe) ahonnan viszont már nem tudunk visszajutni. Így a kapcsolódó osztályok:  $\{0, 1\}$  rekurrens,  $\{2, 4\}$  rekurrens,  $\{3, 5\}$  tranziens.

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Figyeljük meg, hogy az egyes osztályok elemei közötti átmenetvalószínűségek hogyan alakulnak. A  $\{0, 1\}$  *rekurrens* osztály, a hozzá tartozó részmátrix (kék) ugyanolyan, mint egy átmenetvalószínűség mátrix, vagyis a sorösszeg 1. Hasonló a helyzet a  $\{2, 4\}$  *rekurrens* osztállyal is, a hozzá tartozó részmátrixban (piros) a sorösszeg szintén 1. Ezzel szemben a  $\{3, 5\}$  *tranziens* osztály elemei közötti átmenetvalószínűségeket leíró részmátrix (zöld) nem sztochasztikus mátrix, a sorösszeg mindig kisebb egynél. Ez azt jelenti, hogy minden egyes lépésben nullánál nagyobb annak a valószínűsége, hogy ezt az osztályt elhagyja a rendszer. Vagyis ha ebből az osztályból indulunk, akkor ezt az osztályt egy valószínűséggel *valamikor* elhagyja a rendszer. Általános esetben nem szükséges az, hogy egy tranziens osztály elemei közötti átmenetvalószínűségeket leíró részmátrix minden sorának összege egynél kisebb legyen, de legalább egy ilyen sornak lenni kell.

- (b) Az invariáns eloszlást kellene megtalálni, de tudjuk, hogy a 0-ból indulunk, továbbá azt is, hogy a 0 rekurrens állapot, ezért elegendő a  $\{0, 1\}$  rekurrens osztály viselkedését leíró  $P'$  mátrixszal dolgozni.

$$P' = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}.$$

Megoldandó tehát a  $\underline{\pi} = \underline{\pi}P'$  egyenlet, vagyis a

$$\pi_0 = 0,5\pi_0 + 0,3\pi_1$$

$$\pi_1 = 0,5\pi_0 + 0,7\pi_1$$

egyenletrendszer, azzal a további információval, hogy  $\underline{\pi}$  eloszlás, azaz  $\pi_0 + \pi_1 = 1$ . A megoldás:  $\pi_1 = 3/8 = 0,375$ ,  $\pi_2 = 5/8 = 0,625$ .

- (c) Mivel az 5 tranziens állapot, ezért a kérdéses valószínűség 0.
- (d) Itt nyilván nagyon sokféle helyes megoldás lehet. Egy viszonylag kevés változtatást igénylő megoldás:

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & \textcolor{red}{0,6} & \textcolor{red}{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & \textcolor{red}{0,6} & \textcolor{red}{0,1} & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & \textcolor{red}{0,1} & 0,2 & 0,2 & \textcolor{red}{0,3} \end{bmatrix}.$$