

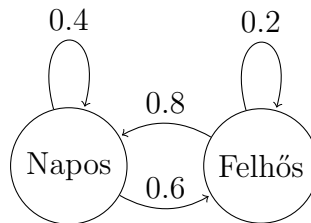
Feladatok

Markov-láncok hosszú távú viselkedése

1. Tegyük fel, hogy a holnapi időjárás csupán a mai nap időjárásától függ. Ha ma napos az idő, akkor holnap 0,4 valószínűséggel lesz ismét napos, míg ha felhős, akkor holnap 0,2 valószínűséggel lesz megint felhős.
 - (a) Ábrázoljuk a folyamatot átmeneti gráfon!
 - (b) Írjuk fel a folyamat átmenetvalószínűség mátrixát!
 - (c) Hosszú távon mekkora az felhős napok aránya?
 - (d) Körülbelül mennyi a felhős napok száma egy évben?

Megoldás:

- (a) A folyamat átmeneti gráfja:



- (b) A Markov-lánc állapottere $S = \{N, F\}$ (N: napos, F: felhős). Az átmenetvalószínűségmátrix elemi közül ismertek:

$$P(\text{Naposból Naposba}) = P(X_{n+1} = N \mid X_n = N) = p(N, N) = 0.4$$

$$P(\text{Felhősből Felhősbe}) = P(X_{n+1} = F \mid X_n = F) = p(F, F) = 0.2$$

Mivel az átmenetvalószínűség mátrixban a sorösszeg egy, ezért a másik két valószínűség egyszerűen meghatározható:

$$p(N, F) = 1 - p(N, N) = 0.6$$

$$p(F, N) = 1 - p(F, F) = 0.8$$

Ezzel az átmenetvalószínűség mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

- (c) Ehhez először az invariáns eloszlást (mely egyben határeloszlás is) kell meghatároznunk, azaz a $\underline{\pi} = \underline{\pi}P$ egyenletet kell megoldanunk, ahol $\underline{\pi} = [\pi_N \ \pi_F]$ eloszlás. A $\underline{\pi} = \underline{\pi}P$ egyenlet koordinátáinként kiírva:

$$\pi_N = 0.4\pi_N + 0.8\pi_F$$

$$\pi_F = 0.6\pi_N + 0.2\pi_F$$

Ebből $\pi_N = 4/3\pi_F$. Felhasználjuk, hogy eloszlás, azaz

$$\pi_N + \pi_F = 4/3\pi_F + \pi_F = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_F = 3/7, \ \pi_N = 4/7$$

Tehát az invariáns eloszlás $\underline{\pi} = [4/7 \ 3/7]$. Mivel $\pi_F = 3/7$, ezért hosszú távon átlagosan a napok $3/7$ -ed része felhős.

- (d) Az előző pont alapján egy évben átlagosan a napok $3/7$ része felhős, így átlagosan $365 \cdot 3/7 = 156,43$ esős nap van, azaz kb. 156.

2. Egy Markov-lánc állapottere legyen $S = \{1, 2, 3\}$, átmenetvalószínűség mátrixa pedig az alábbi:

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Határozzuk meg az invariáns eloszlást!
 (b) Hosszú idő alatt mi a valószínűsége, hogy a lánc az 1 állapotban lesz?

Megoldás:

- (a) Megoldandó a $\underline{\pi} = \underline{\pi}P$ egyenlet. Koordinátáinként kiírva:

$$\pi_1 = 0,4\pi_1 + 0,6\pi_2 + 0,2\pi_3$$

$$\pi_2 = 0,2\pi_1 + 0,5\pi_3$$

$$\pi_3 = 0,4\pi_1 + 0,4\pi_2 + 0,3\pi_3$$

Nullára rendezve és tízzel szorozva:

$$0 = -6\pi_1 + 6\pi_2 + 2\pi_3$$

$$0 = 2\pi_1 - 10\pi_2 + 5\pi_3$$

$$0 = 4\pi_1 + 4\pi_2 - 7\pi_3$$

Az elsőhöz hozzáadva a második háromszorosát, továbbá a másodikhoz hozzáadva a harmadik 2,5-szeresét:

$$0 = -24\pi_2 + 17\pi_3 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 = \frac{17}{24}\pi_3$$

$$0 = 12\pi_1 - 12,5\pi_3 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{25}{24}\pi_3$$

Ne felejtsük el, hogy van még egy egyenletünk: $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, hiszen $\underline{\pi}$ valószínűség eloszlás. Tehát azt kapjuk, hogy

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \frac{25}{24}\pi_3 + \frac{17}{24}\pi_3 + \pi_3 = \left(\frac{25}{24} + \frac{17}{24} + 1\right)\pi_3 = \frac{66}{24}\pi_3$$
$$\Rightarrow \quad \pi_3 = \frac{24}{66} \approx 0,3636, \quad \pi_1 = \frac{25}{66} \approx 0,3788, \quad \pi_2 = \frac{17}{66} \approx 0,2576.$$

(b) Ezt a valószínűséget π_1 adja meg, tehát kb. 0,3788.

3. Barátnőnk (barátunk) minden egyes napon lehet vidám, átlagos hangulatú vagy szomorú. A holnapi hangulatát csak a mai hangulata befolyásolja. Ha ma vidám, akkor holnap rendre 0,4, 0,5 és 0,1 valószínűséggel lehet vidám, átlagos vagy szomorú. Ha közepes hangulata van, akkor 0,3, 0,4 és 0,3 a megfelelő valószínűségek, ha pedig szomorú, akkor 0,1, 0,3 és 0,6.

- (a) Adjuk meg a barátnőnk (barátunk) hangulati ingadozásait leíró átmenetvalószínűség mátrixot!
- (b) Hosszú távon mennyi a vidám napok aránya?
- (c) Feltéve, hogy ma vidám, akkor mekkora valószínűséggel lesz holnapután is vidám?
- (d) Ha ma vidám, akkor mekkora valószínűséggel lesz holnapután vidám és három nap múlva szomorú?

- (e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a mai vidám napot három szomorú követi?

Megoldás:

- (a) Az állapotok sorrendje legyen vidám (1), átlagos hangulatú (2), szomorú (3). Így az átmenetvalószínűség mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

- (b) A válaszhoz meg kell határoznunk az invariáns eloszlást ($\underline{\pi}$), azaz a $\underline{\pi} = \underline{\pi}P$ egyenlet olyan megoldását keressük, melyre $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Hasonlóan járhatunk el, mint az előző feladatban, s így kapjuk a következőket:

$$\pi_1 = \frac{15}{59} \approx 0,2542, \quad \pi_2 = \frac{23}{59} \approx 0,3898, \quad \pi_3 = \frac{21}{59} \approx 0,3559.$$

Tehát a vidám napok aránya az összeshez viszonyítva $\frac{15}{59}$.

- (c) A válasz formálisan a $P(X_2 = 1 | X_0 = 1)$ valószínűség meghatározását kéri. Ehhez kell a kétlépéses átmenetvalószínűség mátrix:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,32 & 0,43 & 0,25 \\ 0,27 & 0,40 & 0,33 \\ 0,19 & 0,35 & 0,46 \end{bmatrix}.$$

A keresett valószínűség a P^2 mátrix $(1,1)$ eleme, tehát $0,32$.

- (d) A mai nap legyen a kezdeti (0) időpont. Így a holnapután a 2., a három nap múlva pedig a 3. időpillanat.

$$\begin{aligned} P(X_3 = 3 \text{ és } X_2 = 1 | X_0 = 1) &= P(X_3 = 3, X_2 = 1 | X_0 = 1) = \\ &= P(X_3 = 3 | X_2 = 1) \cdot P(X_2 = 1 | X_0 = 1) = 0,1 \cdot 0,32 = 0,032 \end{aligned}$$

- (e)

$$\begin{aligned} P(X_3 = 3, X_2 = 3, X_1 = 3 | X_0 = 1) &= \\ &= P(X_3 = 3 | X_2 = 3) \cdot P(X_2 = 3 | X_1 = 3) \cdot P(X_1 = 3 | X_0 = 1) \\ &= 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,1 = 0,036 \end{aligned}$$

4. A médiahatóság hat csoportra osztja az embereket TV nézési szokásaik szerint: 0 (sohasem néz TV-t), 1 (ritkán és csak ismeretterjesztő műsorokat néz), 2 (gyakran néz tévét), 3 (függő), 4 (a viselkedése változás alatt), 5 (agyhalott). Az emberek szokásai változhatnak, ezeket a változásokat modellezzük Markov-lánccal. Állapotok: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Az átmenetvalószínűség mátrix pedig

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Határozzuk meg a kapcsolódó osztályokat! Vannak-e elnyelő (egyelemű rekurrens) osztályok?
- (b) Tegyük fel, hogy valaki gyakran néz tévét. A modell szerint mi a valószínűsége annak, hogy sok idő múlva is ebbe a kategóriába fog tartozni?
- (c) Melyik már ismert modellhez hasonlít ez a folyamat?

Megoldás:

- (a) A 0 állapotból csak a 0-ba léphetünk, ezért ez egy egyelemű osztály: $\{0\}$. Hasonló a helyzet az 5-ös állapottal is, ezért az is egy egyelemű osztályt alkot: $\{5\}$. Ezekből az osztályokból nem lehet ki lépni, mindkettő rekurrens. Vizsgáljuk most a többi állapotot. Minden állapotra igaz, hogy saját magába el lehet jutni egy lépéssel (a mátrix főátlójában csak nem nulla elemek állnak). Ezen kívül a 3-as és 4-es állapotokból oda-vissza lépegethetünk, ezért ezek biztosan egy osztályba tartoznak. Az 1-es állapotba csak saját magából juthatunk el, ez is egy egyelemű osztály: $\{1\}$. A 2-es állapotba saját magából és az 1-esből juthatunk el, de az 1-esbe nem tudunk visszajutni, ezért ez is egy egyelemű osztály. Tehát az osztályok:

$\{0\}$: rekurrens

$\{1\}$: tranziens

$\{2\}$: tranziens

$\{3, 4\}$: tranziens

$\{5\}$: rekurrens

- (b) A ‘gyakran néz tévét’ a 2-es állapotot jelenti, amely tranziens. Sok idő múlva már nem fog ebben az állapotban tartózkodni a rendszer, tehát a kérdéses valószínűség 0.
- (c) A modell két darab egyelemű rekurrens osztályt tartalmaz (ezeket gyakran elnyelő állapotoknak nevezzük), ebből a szempontból hasonlít a bolyongásos modellre elnyelő falak esetén. A hasonlóság természetesen nem teljes, hiszen itt több tranziens osztály van.

5. Tekintsük a következő átmenetvalószínűség mátrixszal rendelkező Markov-láncot (állapotok: 0 és 1):

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

Tegyük fel, hogy pénzfeldobással választjuk ki a kezdeti állapotot.

- (a) Mi lesz a kezdeti eloszlás?
- (b) Egy lépés után mi lesz az eloszlás?
- (c) Két lépés után mi lesz az eloszlás?
- (d) Határozzuk meg a $P(X_3 = 0, X_1 = 1 \mid X_0 = 1)$ valószínűséget, ha $p = 1/3$ és $q = 1/4$!
- (e) 1000 lépés után mi lesz az eloszlás, ha $p = 1/3$ és $q = 1/4$?

Megoldás:

- (a) Feltéve, hogy a pénzérme szabályos a kezdeti eloszlás $\varphi_0 = [0.5 \ 0.5]$.
- (b) Ehhez a $\varphi_0 P$ szorzatot kell meghatároznunk:

$$\varphi_1 = \varphi_0 P = [0.5 \ 0.5] \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} = \left[\frac{1-p+q}{2}, \frac{p+1-q}{2} \right]$$

- (c) Az előzőhöz hasonlóan $\varphi_2 = \varphi_1 P$, azaz

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 P = \left[\frac{1-p+q}{2}, \frac{p+1-q}{2} \right] \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{(1-p+q)(1-p) + (p+1-q)q}{2}, \frac{(1-p+q)p + (p+1-q)(1-q)}{2} \right] \\ &= \left[\frac{1 + (1-p)^2 - (1-q)^2}{2}, \frac{1 + (1-q)^2 - (1-p)^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a (b) pontban kapott eredmény hasonló szerkezetű (cseréljük ki a kettes kitevőt egyre).

- (d) $P(X_3 = 0, X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = P(X_3 = 0 \mid X_1 = 1)P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)$,
 azaz $P(\text{két lépéssel 1-ből 0-ba})P(\text{egy lépéssel 1-ből 1-be})$. A kétlépéses
 átmenetvalószínűség mátrix $p = 1/3$ és $q = 1/4$ esetén:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 19/36 & 17/36 \\ 17/48 & 31/48 \end{bmatrix}$$

Ezzel:

$$P(X_3 = 0, X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = P(X_3 = 0 \mid X_1 = 1)P(X_1 = 1 \mid X_0 = 1) = \\ = 17/48 \cdot 3/4 = 51/192 \approx 0.2656$$

- (e) Az egyik lehetséges megoldás, hogy valamilyen szoftver segítségével kiszámítjuk
 a mátrix 1000. hatványát és azzal megszorozva a kezdeti eloszlást megkapjuk
 φ_{1000} -et. A másik megoldás az, hogy tudjuk azt, hogy sok lépés múlva a
 kezdeti eloszlás szerepe elmosódik, az eloszlás az invariáns eloszláshoz tart
 (ehhez figyeljük meg, hogy a mátrix minden eleme pozitív). Elegendő tehát
 az invariáns eloszlást meghatározni: $\underline{\pi} = \underline{\pi}P$. Koordinátáinként kiírva:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{2}{3}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 & \rightarrow & \quad \frac{1}{3}\pi_0 = \frac{1}{4}\pi_1 & \rightarrow & \quad \pi_1 = \frac{4}{3}\pi_0 \\ \pi_1 &= \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_1 \end{aligned}$$

$\pi_0 + \pi_1 = 1$, tehát $\pi_0 + \frac{4}{3}\pi_0 = 1$, amiből $\pi_0 = \frac{3}{7}$, $\pi_1 = \frac{4}{7}$, tehát $\varphi_{1000} \approx$
 $[\frac{3}{7}, \frac{4}{7}]$.