

Feladatok

Markov-láncok további tulajdonságai

1. Egy Markov-lánc állapottere legyen $S = \{1, 2, 3\}$, átmenetvalószínűség mátrixa pedig

$$P = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Határozzuk meg az invariáns eloszlást!
- (b) Tegyük fel, hogy az 1-es állapotból indulunk. Várhatóan hány lépés múlva érünk vissza az 1-esbe?
- (c) Tegyük fel, hogy az 1-es állapotból indulunk. Várhatóan hány lépés múlva érünk először a 2-esbe?

Megoldás:

- (a) Vegyük észre, hogy ezzel az átmenetvalószínűség mátrixszal már találkoztunk, és az invariáns eloszlást is meghatároztuk:

$$\pi_1 = \frac{25}{66} \approx 0,3788, \quad \pi_2 = \frac{17}{66} \approx 0,2576 \quad \pi_3 = \frac{24}{66} \approx 0,3636.$$

- (b) A válasz az invariáns eloszlás 1-es állapothoz tartozó elemének reciproka, azaz $E(T_{11}) = \frac{1}{\pi_1} = \frac{66}{25} = 2,64$.
- (c) $E(T_{12}) = ?$ Bővítsük ki az eredeti átmenetvalószínűség mátrixot egy h állapottal, melyre az átmenetvalószínűségek $P(X_{n+1} = 1|X_n = h) = 1$ és $P(X_{n+1} = h|X_n = 2) = 1$ (azaz h -ból csak az 1-esbe, a 2-esből csak h -ba

léphetünk). Az új átmenetvalószínűség mátrix:

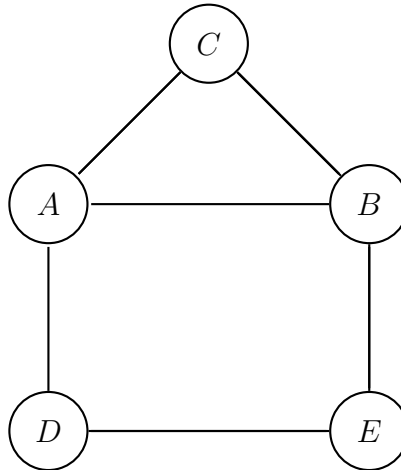
$$P' = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A hozzá tartozó invariáns eloszlás:

$$\pi_1 = \frac{35}{89} \approx 0,3933, \quad \pi_2 = \frac{17}{89} \approx 0,1910 \quad \pi_3 = \frac{20}{89} \approx 0,2247, \quad \pi_h = \frac{17}{89} \approx 0,1910.$$

Ez alapján $E(T_{hh}) = \frac{1}{\pi_h} = \frac{89}{17} \approx 5,2353$. Tudjuk, hogy $E(T_{hh}) = 2 + E(T_{12})$, így $E(T_{12}) = \frac{55}{17} \approx 3,2353$.

2. Egy bolha ugrál az alábbi gráfon oly módon, hogy mindig valamely szomszédos csúcsba ugrik és a lehetőségei közül egyenlő valószínűséggel választ.



- Hosszú idő alatt az idő hányad részét tölti az A csúcsban?
- Tegyük fel, hogy az A csúcsból indult. Várhatóan hány lépés múlva ér vissza A -ba?
- Tegyük fel, hogy a C csúcsból indult. Várhatóan hányszor jut el B -be, mielőtt elérne A -ba?
- Tegyük fel, hogy a B csúcsból indult. Mi a valószínűsége, hogy hamarabb éri el C -t, mint A -t?

Megoldás: A folyamat állapotai a gráf csúcsai. Az állapotok sorrendje legyen A, B, C, D, E . Ekkor az átmenetvalószínűség mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Ehhez az invariáns eloszlást kell meghatároznunk. A $\underline{\pi} = \underline{\pi}P$ egyenletet kielégítő eloszlás:

$$\pi_A = \frac{1}{4}, \quad \pi_B = \frac{1}{4}, \quad \pi_C = \frac{1}{6}, \quad \pi_D = \frac{1}{6}, \quad \pi_E = \frac{1}{6}.$$

Tehát hosszú idő alatt az idő kb. $1/4$ -ét tölti az A csúcsban.

- (b) $E(T_{AA}) = \frac{1}{\pi_A} = 4$, tehát várhatóan 4 lépés múlva ér vissza A -ba.
- (c) Változtassuk A -t elnyelő állapottá. Ekkor a kérdés az, hogy C -ből indulva várhatóan hányszor jut el B -be, mielőtt elnyelődne. Az új átmenetvalószínűség mátrix:

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Itt már csak egy rekurrens állapot van (A), a többi tranziens. A tranziens állapotoknak megfelelő Q mátrix:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A választ az $M = (I - Q)^{-1}$ mátrix C sorának B eleme jelenti. Mivel itt

az állapotok sorrendje B, C, D, E , ezért ez a második sor első eleme.

$$M = (I - Q)^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 18 & 6 & 4 & 8 \\ 9 & 14 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 16 & 10 \\ 12 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \\ \approx \begin{bmatrix} 1,6364 & 0,5455 & 0,3636 & 0,7273 \\ 0,8182 & 1,2727 & 0,1818 & 0,3636 \\ 0,5455 & 0,1818 & 1,4545 & 0,9091 \\ 1,0909 & 0,3636 & 0,9091 & 1,8182 \end{bmatrix}.$$

Tehát C -ből indulva átlagosan 9/11-szer jut el B -be, mielőtt eljutna A -ba.

- (d) Tegyük fel, hogy a B csúcsból indult. Mi a valószínűsége, hogy hamarabb éri el C -t, mint A -t? Most az A -t és a C -t is elnyelő állapotá kell alakítani. Így az új átmenetvalószínűség mátrix:

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rendezzük úgy az állapotokat, hogy az elnyelők legyenek elől: A, C, B, D, E . Az átrendezésnek megfelelő mátrix:

$$P'' = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right].$$

Ebből az S és az Q mátrixok:

$$S = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Továbbá

$$M = (I - Q)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 3 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad MS = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

A választ az MS mátrix B sorának C eleme adja meg. Mivel az állapotok sorrendje A, C, B, D, E volt, ezért ez az első sor második eleme. Tehát $3/7$ annak a valószínűsége, B -ből indulva előbb éri el C -t, mint A -t.

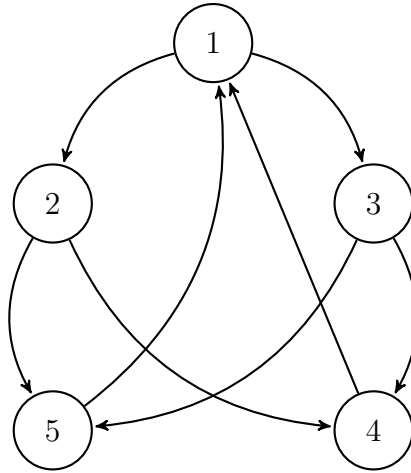
3. Egy Markov-lánc állapottere legyen $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, átmenetvalószínűség mátrixa pedig

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Irreducibilis-e a Markov-lánc?
- (b) Határozzuk meg a periódust!
- (c) Határozzuk meg (közelítőleg) a $p_{1000}(2, 1)$, $p_{1000}(2, 2)$ és $p_{1000}(2, 4)$ értékeket!
- (d) Tegyük fel, hogy 1-esből indulunk. Legyen T az első visszatérésig eltelt idő. Határozzuk meg T eloszlását és várható értékét! Mit mondhatunk ez alapján $\pi(1)$ -ről?
- (e) Határozzuk meg az invariáns eloszlást! Ezt felhasználva adjuk meg, hogy a 2-esből indulva várhatóan hány lépés múlva érünk vissza a 2-esbe!

Megoldás:

- (a) Bármely állapotból eljuthatunk bármely állapotba, így a Markov-lánc irreducibilis, vagyis egyetlen osztályból áll, ez természetesen rekurrens osztály. Pl. az $1, 2, 5, 1, 3, 4, 1$ útvonalon körbemegetünk az állapotokon.



- (b) Mivel a lánc egyetlen osztályból áll, ezért elég egy állapot periódusát meghatározni, az érvényes lesz minden más állapotra is. Az átmeneti gráf felrajzolása után (vagy P elemzése után) látszik, hogy az 1-esből indulva három lépésből mindig vissza fogunk jutni, tehát a periódus 3.

(c)

$$P^{1000} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0,3333 & 0,6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4167 & 0,5833 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4167 & 0,5833 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrix alapján $p_{1000}(2, 1) = 0$, $p_{1000}(2, 2) = 0$ és $p_{1000}(2, 4) \approx 0,4167$.

- (d) Az átmeneti gráf alapján már tudjuk, hogy ha az 1-esből indulunk, akkor minden harmadik lépésben visszatérünk oda. Így T eloszlása:

$$T : \begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases}.$$

Ez alapján a várható érték: $E(T) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3$. Mivel $E(T) = \frac{1}{\pi_1}$, ezért $\pi_1 = \frac{1}{3}$.

- (e) Az invariáns eloszlás:

$$\pi_1 = \frac{12}{36}, \quad \pi_2 = \frac{4}{36}, \quad \pi_3 = \frac{8}{36}, \quad \pi_4 = \frac{5}{36}, \quad \pi_5 = \frac{7}{36}.$$

$$E(T_{22}) = \frac{1}{\pi_2} = \frac{36}{4} = 9.$$

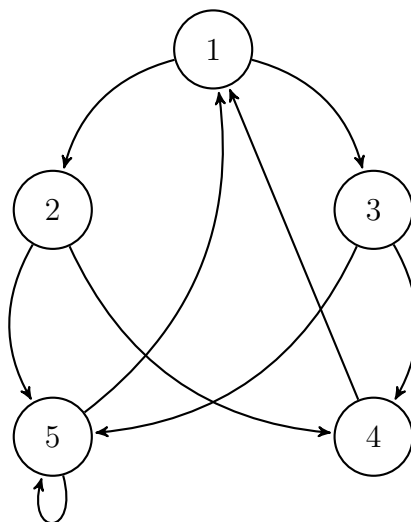
4. Egy Markov-lánc állapottere legyen $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, átmenetvalószínűség mátrixa pedig

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Irreducibilis-e a Markov-lánc?
- (b) Periodikus-e a Markov-lánc?
- (c) Határozzuk meg az invariáns eloszlást!
- (d) Tegyük fel, hogy az 1-esből indulunk. Várhatóan hány lépés múlva érünk újra az 1-esbe?
- (e) Tegyük fel, hogy az 1-esből indulunk. Várhatóan hány lépés múlva érünk a 4-esbe?
- (f) Tegyük fel, hogy az 1-esből indulunk. Mi a valószínűsége, hogy előbb érünk az 5-ösbe, mint a 3-asba?

Megoldás:

- (a) Rajzoljuk fel az átmeneti gráfot:



Látható, hogy minden állapotból el tudunk jutni mindenhová, pl. az 1, 2, 5, 1, 3, 4, 1 útvonalon körbementünk az összes állapoton, tehát a Markov-lánc irreducibilis.

- (b) A Markov-lánc tartalmaz egy hurkot ($5 \rightarrow 5$) ezért ebbe az állapotba egyetlen lépéssel is visszajuthatunk. Így a lépésszámok legnagyobb közös osztója csak az egy lehet, vagyis a Markov-lánc nem periodikus (aperiodikus).
- (c) A megoldandó egyenletrendszer

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \pi_4 + \frac{1}{2}\pi_5 \\ \pi_2 &= \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_3 &= \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_4 &= \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{2}{5}\pi_3 \\ \pi_5 &= \frac{4}{5}\pi_2 + \frac{3}{5}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_5\end{aligned}$$

Minden változó kifejezhető π_1 -gyel, felhasználva, hogy π_2 és π_3 már megvan: $\pi_4 = \frac{3}{10}\pi_1$, $\pi_5 = \frac{14}{10}\pi_1$. Ezzel (a valószínűségek összege 1 kell, hogy legyen):

$$\pi_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{14}{10} \right) = \pi_1 \frac{37}{10} = 1$$

Ebből, valamint a visszahelyettesítésekből:

$$\pi_1 = \frac{10}{37}, \quad \pi_2 = \frac{5}{37}, \quad \pi_3 = \frac{5}{37}, \quad \pi_4 = \frac{3}{37}, \quad \pi_5 = \frac{14}{37}$$

- (d) Mivel $\pi_1 = \frac{10}{37}$, ezért az 1-esből indulva a visszatéréshez szükséges lépések számának várható értéke ennek a reciproka, azaz 3.7.
- (e) Vezessük be a h állapotot úgy, hogy h -ból csak az 1-esbe lehessen lépni,

a 4-esből pedig csak h -ba. Ekkor az új átmenetvalószínűség mátrix:

$$P' = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & h \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ h \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A π_h meghatározásához szükséges egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{2}\pi_5 + \pi_h \\ \pi_2 &= \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_3 &= \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_4 &= \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{2}{5}\pi_3 \\ \pi_5 &= \frac{4}{5}\pi_2 + \frac{3}{5}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_5 \\ \pi_h &= \pi_4 \end{aligned}$$

Fejezzük ki mindent π_h -val: a második és harmadik egyenletből következik, hogy $\pi_2 = \pi_3$, a negyedik és a hatodik egyenlet felhasználásával: $\pi_2 = \pi_3 = \frac{5}{3}\pi_h$. A második egyenletből $\pi_1 = \frac{10}{3}\pi_h$, ezt beírva az elsőbe $\pi_5 = \frac{14}{3}\pi_h$. Összerakva és kihasználva, hogy az összeg 1:

$$\pi_h \left(\frac{10}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + 1 + \frac{14}{3} + 1 \right) = \pi_h \frac{40}{3} \Rightarrow \pi_h = \frac{3}{40}$$

Végül az 1-esből indulva a 4-esbe jutáshoz szükséges lépések számának várható értéke:

$$E(T_{14}) = \frac{1}{\pi_h} - 2 = \frac{40}{3} - 2 = \frac{34}{3} = 11.\dot{3}$$

- (f) Változtassuk a 3-as és 5-ös állapotokat elnyelőekké. Ekkor ez a két állapot rekurrens a többi tranziens lesz. Rendezzük át a mátrixot úgy, hogy a

sorrend 3, 5, 1, 2, 4 legyen:

$$P' = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4/5 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Az ebből kiolvasható blokkok:

$$S = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 4/5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Továbbá

$$M = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 10/9 & 5/9 & 1/9 \\ 2/9 & 10/9 & 2/9 \\ 10/9 & 5/9 & 10/9 \end{bmatrix}, \quad MS = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5/9 & 4/9 \\ 1/9 & 8/9 \\ 5/9 & 4/9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A válasz az első sor második eleme, vagyis címkék szerint a mátrix (1, 5) eleme (annak valószínűsége, hogy az 1-esből indulva 5-ösben nyelődik el): 4/9.