

Feladatok

Megszámlálhatóan végtelen állapotterű

Markov-láncok

A feladatok megoldása során két végtelen sor összegét is fel fogjuk használni. Az első az úgynevezett végtelen mértani sor:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots$$

Vegyük először véges sok tag összegét és használjuk fel a mértani sorozat összegére vonatkozó formulát:

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = 1 \cdot \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Ennek felhasználásával a végtelen mértani sor összege, ha $|x| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}$$

Azaz, ha $|x| < 1$, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$.

A második végtelen sor a következő alakú:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

Ennek összegéhez felhasználjuk az imént látott végtelen mértani sor összegét:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (x^k)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)' = \left(\frac{1}{1 - x} \right)' = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

Azaz, ha $|x| < 1$, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1 - x)^2}$.

1. Legyen a Markov-lánc állapottere $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (a nem negatív egészek).

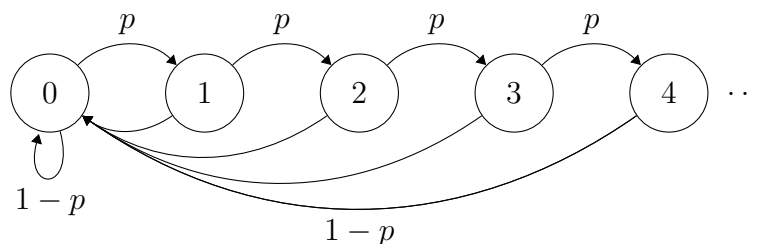
Az átmenetvalószínűségek pedig

$$p(n, n+1) = p \quad p(n, 0) = 1-p$$

Tehát a jobbra lépés valószínűsége mindig p , de minden egyes állapotból $1-p$ valószínűséggel visszakerülhetünk a 0-ba. A p valószínűségmely értékeire lesz a Markov-lánc tranziens, nullrekurrens illetve pozitív rekurrens?

Megoldás:

A folyamat átmeneti gráfja (természetesen végtelen, a mintázat folytatódik):



Vegyük észre azt, hogy ha $p = 1$, akkor a lánc tranziens, hiszen folyamatosan lépegetünk (visszatérés nélkül) jobbra. Ekkor a lánc még felbontható is. Ha $p < 1$, akkor minden állapot egy osztályba tartozik (a lánc felbonthatatlan, irreducibilis), hiszen pozitív valószínűséggel eljuthatunk bárhonnan bárhova. A 0-ba jutás valószínűsége minden lépésnél $1-p$, tehát hosszú távon 1 valószínűséggel visszatérünk a nullába (és kezdjük az egészet előlről), tehát a lánc rekurrens.

Mátrixos alakban az átmenetvalószínűségek:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & p & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & 0 & p & \dots \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A lánc *pozitív rekurrens*, ha létezik invariáns eloszlása, azaz a

$$\pi_n = \sum \pi_m p(m, n)$$

egyenletnek van olyan megoldása, ami eloszlás. A $p(m, n)$ valószínűségekről a következőket tudjuk:

$$p(n, n+1) = p$$

$$p(n, 0) = 1 - p$$

$$p(0, 0) = 1 - p$$

Az összes többi valószínűség 0. Ennek megfelelően, ha $n > 0$, akkor összegben csak egyetlen tag szerepel:

$$\pi_n = \pi_{n-1} \cdot p$$

Ezt tovább kifejtve:

$$\pi_n = \pi_{n-1} \cdot p = (\pi_{n-2}p)p = \pi_{n-2}p^2 = \dots = \pi_0 p^n$$

Ha $n = 0$, akkor az összeg

$$\pi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k (1-p) = (1-p) \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = (1-p) \cdot 1 = 1-p$$

Tehát a kapott valószínűségek:

$$\pi_n = \pi_0 p^n = (1-p)p^n$$

Ezek összege valóban egy, mert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)p^n = (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} p^n = (1-p) \frac{1}{1-p} = 1$$

Tehát $p < 1$ esetén létezik invariáns eloszlás. Összegezve a kapott eredményeket: a Markov-lánc tranziens, ha $p = 1$; pozitív rekurrens, ha $p < 1$; és sohasem nullrekurrens.

2. Legyen a Markov-lánc állapottere most is az $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ halmaz, az átmenetvalószínűségek pedig a következők:

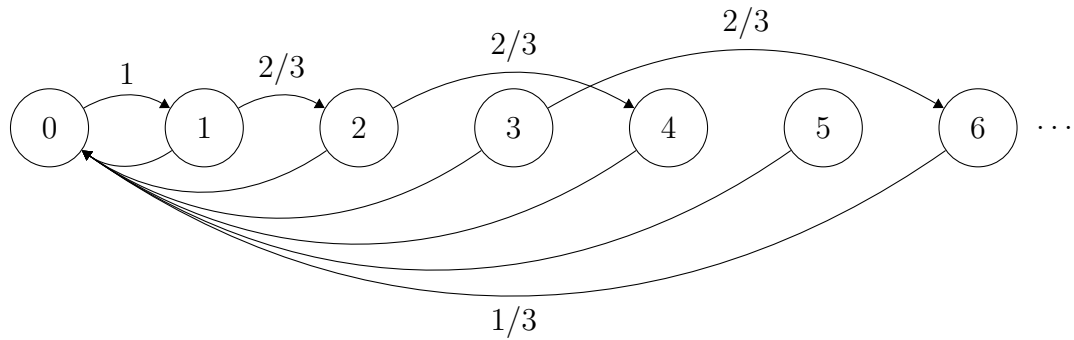
$$\begin{aligned} p(n, 2n) &= \frac{2}{3} & p(n, 0) &= \frac{1}{3} \\ p(0, 1) &= 1 & p(n, m) &= 0 \text{ minden más esetben} \end{aligned}$$

- (a) Feltéve, hogy $X_0 \neq 0$, mi a valószínűsége, hogy $X_1, X_2, \dots, X_n$ mindegyike *nem* 0?

- (b) Mik a kapcsolódó osztályok?
- (c) Mely osztályok pozitív rekurrens, nullrekurrens, illetve tranziens?
- (d) Adjuk meg az invariáns eloszlást az összes pozitív rekurrens osztályra!
- (e) Tegyük fel, hogy $X_0 = 0$. Átlagosan hány lépés múlva tér vissza a lánc ebbe az állapotba?

Megoldás:

A folyamat átmeneti gráfja (természetesen végtelen, a mintázat folytatódik, például a 4-esből a 8-asba, az 5-ösből a 10-esbe léphetünk $2/3$ valószínűséggel stb.):



(a)

$$\begin{aligned}
 P(X_1, \dots, X_n \neq 0 \mid X_0 \neq 0) &= P(X_n, \dots, X_1 \neq 0 \mid X_0 \neq 0) \\
 &= P(X_n \neq 0 \mid X_{n-1} \neq 0) P(X_{n-1} \neq 0 \mid X_{n-2} \neq 0) \dots P(X_1 \neq 0 \mid X_0 \neq 0) \\
 &= \prod_{i=1}^n P(X_i \neq 0 \mid X_{i-1} \neq 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n
 \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy ha n tart végtelenbe, akkor ez a valószínűség nullához tart. Tehát nulla annak a valószínűsége, hogy sohasem érünk a 0-ba.

- (b) Könnyen ellenőrizhető, hogy a következő állapotok (és csak ezek) egy osztályban vannak: $0, 1, 2, 4, 8, \dots$ (vagyis 0 és a 2 hatványai). Az összes többi állapot egyelemű osztályokat alkot.
- (c) Minden egyelemű osztály tranziens. A $\{0, 1, 2, 4, 8, \dots\}$ osztály pozitív rekurrens. Nullrekurrens nincs az osztályok között.

(d) Az invariáns eloszláshoz a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$\pi_n = \sum \pi_m p(m, n)$$

Ha $n = 2^k$ és $k \geq 2$ (vagyis az $n = 4, 8, 16, \dots$ esetekben), akkor az egyenlet

$$\pi_{2^k} = \pi_{2^{k-1}} \frac{2}{3} = \pi_{2^{k-2}} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \dots = \pi_1 \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Továbbá

$$\pi_1 = \pi_0$$

Mivel az eloszlásban szereplő valószínűségek összege 1, ezért

$$\begin{aligned} 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_4 + \pi_8 + \dots = \pi_0 \left(1 + 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right) = \\ &= \pi_0 + \pi_0 \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right) = \pi_0 + \pi_0 \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \\ &= \pi_0 \cdot 4 \end{aligned}$$

Tehát az eloszlás:

$$\pi_0 = \frac{1}{4}, \quad \pi_1 = \frac{1}{4}, \quad \pi_{2^k} = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(e) Nullából indulva a visszatéréshez szükséges lépések számának várható értéke az invariáns eloszlás megfelelő tagjának reciproka:

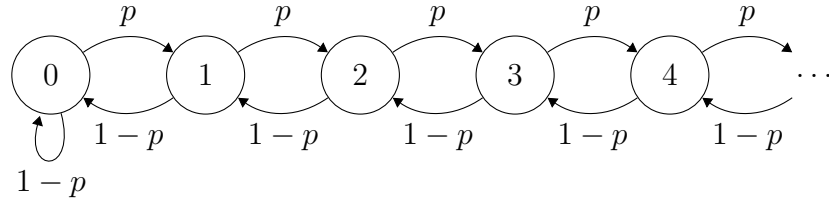
$$E(T_{00}) = \frac{1}{\pi_0} = 4$$

3. Tekintsük a véletlen bolyongást a nemnegatív egészeken (bolyongás félig visszaverő fallal), ahol az átmenetvalószínűségek az alábbiak:

$$\begin{aligned} p(n, n+1) &= p & p(n, n-1) &= 1-p \\ p(0, 1) &= p & p(0, 0) &= 1-p \end{aligned}$$

Vagyis p valószínűséggel lépünk egyet jobbra, $1-p$ valószínűséggel lépünk balra. Ha a 0-ban vagyunk, akkor p valószínűséggel lépünk az 1-esbe és $1-p$ valószínűséggel maradunk a 0-ban.

Az átmeneti gráf:



Milyen p esetén lesz a folyamat pozitív rekurrens?

Megoldás:

Mátrixos alakban az átmenetvalószínűségek:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & 1-p & 0 & p & \dots \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & \dots \\ \dots & & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Az invariáns eloszláshoz a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\pi_n = \sum \pi_m p(m, n)$$

Egyenletenként kiírva és mindig behelyettesítve a már kifejezettet:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (1-p)\pi_0 + (1-p)\pi_1 & \Rightarrow \pi_1 &= \frac{p}{1-p}\pi_0 \\ \pi_1 &= p\pi_0 + (1-p)\pi_2 & \Rightarrow \pi_2 &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 \pi_0 \\ \pi_2 &= p\pi_1 + (1-p)\pi_3 & \Rightarrow \pi_3 &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^3 \pi_0 \\ \vdots & & \vdots & \end{aligned}$$

Használjuk fel, hogy a π_i -k összege egy:

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \dots = \pi_0 \left(1 + \frac{p}{1-p} + \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 + \left(\frac{p}{1-p}\right)^3 + \dots \right) =$$

Ez a végtelen mértani sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\frac{p}{1-p} < 1$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $p < 1/2$. Tehát a folyamat pontosan akkor pozitív rekurrens, ha $p < 1/2$ (másképp: ha $1-p > 1/2$). Mit jelent ez? Akkor lesz ez

a folyamat pozitív rekurrens, ha a nulla felé lépés valószínűsége nagyobb, mint a végtelen felé lépés valószínűsége.

Tovább folytatva a végtelen mértani sor összegével megkapjuk π_0 értékét:

$$= \pi_0 \frac{1}{1 - \frac{p}{1-p}} = \pi_0 \frac{1-p}{1-2p} \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = \frac{1-2p}{1-p}$$

Tehát az invariáns eloszlás:

$$\pi_n = \frac{1-2p}{1-p} \cdot \left(\frac{p}{1-p} \right)^n$$

4. Tekintsünk egy olyan tömegkiszolgálási rendszert, amelyben egyetlen kiszolgálóegység (szerver) van, a várakozó igények alkotta sor hossza pedig nem korlátozott. Minden egyes időintervallumban p valószínűséggel érkezik új igény, a legelső igényt pedig q valószínűséggel elégítik ki (ekkor ez az igény távozik a rendszerből). Legyen X_n a rendszerben levő igények száma (az éppen kiszolgálás alatt levővel együtt). Ekkor az állapottér $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, az átmenetvalószínűségek pedig az alábbiak szerint alakulnak.

Ha $n > 0$, akkor:

$$p(n, n+1) = p(1-q) \quad \begin{array}{l} \text{új igény érkezik } p \text{ valószínűséggel és } 1-q \\ \text{valószínűséggel nem távozik a rendszerből igény;} \end{array}$$

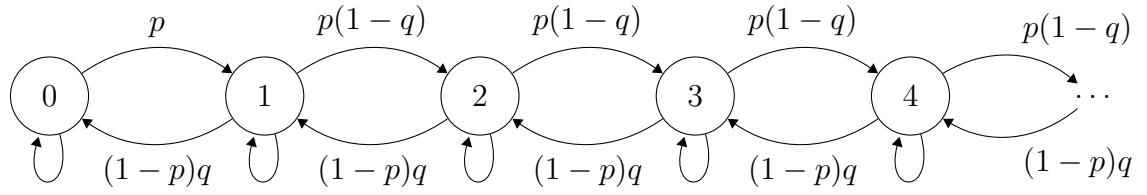
$$p(n, n-1) = (1-p)q \quad \begin{array}{l} \text{nem jön új igény } 1-p \text{ valószínűséggel és} \\ q \text{ valószínűséggel távozik a rendszerből egy igény;} \end{array}$$

$$p(n, n) = pq + (1-p)(1-q) \quad \begin{array}{l} p \text{ valószínűséggel jön egy igény és } q \text{ valószínűséggel} \\ \text{távozik egy, vagy } 1-p \text{ valószínűséggel nem jön új} \\ \text{igény és } 1-q \text{ valószínűséggel nem távozik.} \end{array}$$

Ha $n = 0$, akkor:

$$\begin{array}{ll} p(0, 0) = 1-p & 1-p \text{ valószínűséggel nem jön új igény;} \\ p(0, 1) = p & p \text{ valószínűséggel jön új igény.} \end{array}$$

Az átmeneti gráf:



Milyen p és q esetén lesz a folyamat pozitív rekurrens (vagyis milyen p és q esetén létezik invariáns eloszlás)? Pozitív rekurrens folyamat esetén mennyi a rendszerben levő igények számának várható értéke?

Megoldás:

Az invariáns eloszláshoz megint csak a következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\pi_n = \sum \pi_m p(m, n)$$

Egyenletenként kiírva:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= (1-p)\pi_0 + (1-p)q\pi_1 \\ \pi_1 &= p\pi_0 + [pq + (1-p)(1-q)]\pi_1 + (1-p)q\pi_2 \\ \pi_2 &= p(1-q)\pi_1 + [pq + (1-p)(1-q)]\pi_2 + (1-p)q\pi_3 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$p\pi_0 = (1-p)q\pi_1 \quad \rightarrow \quad \pi_1 = \frac{p}{q(1-p)}\pi_0$$

A második egyenlet átrendezése:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= p\pi_0 + [pq + (1-p)(1-q)]\pi_1 + (1-p)q\pi_2 \\ [(1-p)q + (1-q)p]\pi_1 &= p\pi_0 + (1-p)q\pi_2\end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy $p\pi_0 = (1-p)q\pi_1$, tehát ezek kiesnek:

$$(1-q)p\pi_1 = (1-p)q\pi_2 \quad \rightarrow \quad \pi_2 = \frac{(1-q)p}{(1-p)q}\pi_1$$

A harmadik egyenlet rendezése hasonló:

$$\begin{aligned}\pi_2 &= p(1-q)\pi_1 + [pq + (1-p)(1-q)]\pi_2 + (1-p)q\pi_3 \\ [(1-p)q + (1-q)p]\pi_2 &= p(1-q)\pi_1 + (1-p)q\pi_3\end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy $(1-q)p\pi_1 = (1-p)q\pi_2$, tehát ezek kiesnek:

$$(1-q)p\pi_2 = (1-p)q\pi_3 \quad \rightarrow \quad \pi_3 = \frac{(1-q)p}{(1-p)q}\pi_2 = \left(\frac{(1-q)p}{(1-p)q}\right)^2 \pi_1$$

Ezt az eljárást folytathatjuk az összes többi komponensre is, és azt kapjuk, hogy

$$\pi_k = \left(\frac{(1-q)p}{(1-p)q}\right)^{k-1} \pi_1, \quad \text{ha } k \geq 1.$$

Az eloszlás tagjainak meghatározásához használjuk fel, hogy az összegük egy:

$$\begin{aligned}1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \dots \\ &= \pi_0 + \pi_1 \left(1 + \frac{(1-q)p}{(1-p)q} + \left(\frac{(1-q)p}{(1-p)q}\right)^2 + \dots\right)\end{aligned}$$

A zárójelben levő végtelen összeg pontosan akkor konvergens, ha $\frac{(1-q)p}{(1-p)q} < 1$ (azt tudjuk, hogy ez a tört $0 < p, q < 1$ esetén mindig pozitív). Ebben az esetben a zárójelben álló kifejezés értéke

$$\frac{1}{1 - \frac{(1-q)p}{(1-p)q}}.$$

Ezzel az eloszlás tagjainak összege:

$$1 = \pi_0 + \pi_1 \frac{1}{1 - \frac{(1-q)p}{(1-p)q}} = \pi_0 + \pi_1 \frac{(1-p)q}{(1-p)q - (1-q)p} = \pi_0 + \pi_1 \frac{(1-p)q}{q-p}$$

Felhasználva, hogy $\pi_1 = \frac{p}{q(1-p)}\pi_0$:

$$\begin{aligned}&= \pi_0 \left(1 + \frac{p}{q(1-p)} \frac{(1-p)q}{q-p}\right) = \pi_0 \left(1 + \frac{p}{q-p}\right) \\ &= \pi_0 \frac{q-p+p}{q-p} = \pi_0 \frac{q}{q-p}\end{aligned}$$

Tehát az eloszlás tagjai:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{q-p}{q} \\ \pi_1 &= \frac{p}{q(1-p)}\pi_0 = \frac{p}{q(1-p)} \frac{q-p}{q} = \frac{p}{q} \frac{q-p}{(1-p)q} \\ &\vdots \\ \pi_k &= \pi_1 \left(\frac{(1-q)p}{(1-p)q} \right)^{k-1} = \frac{p}{q} \frac{q-p}{(1-p)q} \left(\frac{(1-q)p}{(1-p)q} \right)^{k-1}\end{aligned}$$

Milyen feltétel kellett ahhoz, hogy ezt az eloszlást megkapjuk? Az, hogy az $\frac{(1-q)p}{(1-p)q} < 1$ egyenlőtlenség teljesüljön. Alakítsuk ezt át:

$$\begin{aligned}\frac{(1-q)p}{(1-p)q} &< 1 \\ (1-q)p &< (1-p)q \\ p - qp &< q - pq \\ p &< q\end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy akkor lesz a folyamat pozitív rekurrens (és akkor létezik invariáns eloszlás, hosszú távú egyensúlyi állapot), ha $p < q$. Vagyis akkor, ha az új igény beérkezésének valószínűsége kisebb, mint annak a valószínűsége, hogy egy rendszerben levő igény távozik. Másképp: lassabban jönnek az igények, mint a kiszolgálás átlagos sebessége.

Határozzuk meg a rendszerben levő igények számának várható értékét (hosszú távon átlagosan hány igény van a rendszerben). Jelöljük N -nel a rendszerben levő igények számát, ennek várható értéke:

$$E(N) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \pi_k = 0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot \pi_1 + 2 \cdot \pi_2 + 3 \cdot \pi_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \pi_k$$

Ezzel a várható érték:

$$E(N) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \pi_1 \left(\frac{(1-q)p}{(1-p)q} \right)^{k-1} = \pi_1 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{(1-q)p}{(1-p)q} \right)^{k-1}$$

Felhasználjuk, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$:

$$\begin{aligned}
 &= \pi_1 \frac{1}{\left(1 - \frac{(1-q)p}{(1-p)q}\right)^2} = \frac{p}{q} \left[1 - \frac{(1-q)p}{(1-p)q}\right] \cdot \frac{[(1-p)q]^2}{[(1-p)q - (1-q)p]^2} \\
 &= \frac{p}{q} \cdot \frac{(1-p)q}{(1-p)q - (1-q)p} = \frac{(1-p)p}{(1-p)q - (1-q)p} \\
 &= \frac{(1-p)p}{q-p}
 \end{aligned}$$

Láttuk, hogy a folyamat akkor pozitív rekurrens, $p < q$, tehát a tört nevezője pozitív. Mi történik akkor, ha fennáll a $p < q$ egyenlőtlenség, de p már *nagyon* közel van q -hoz? Ekkor a tört nevezője nullához tart (a pozitív irányból, mert $q > p$), a számláló pedig a nem nulla $q(1-q)$ -hoz, így $E(N)$ végtelenhez tart. Vagyis ha az érkezési valószínűség nagyon közel van a kiszolgálási valószínűséghez, akkor nagyon hosszú sor alakul ki. Például

ha $p = 0.5$ és $q = 0.6$, akkor $E(N) = 2.5$;

ha $p = 0.55$ és $q = 0.6$, akkor $E(N) = 4.95$;

ha $p = 0.599$ és $q = 0.6$, akkor $E(N) = 240.119$.