

Folytonos idejű Markov-láncok

1 Bevezetés

Eddig olyan folyamatokkal foglalkoztunk, amelyekben az állapotváltás csak diszkrét időegységenként történhetett meg. Ezekben az esetekben a folyamatot is és az n -edik időponthoz tartozó valószínűségi változót is X_n -nel jelöltük, ahol n értéke lehetett $0, 1, 2, \dots$. A következőekben olyan folyamatokkal vizsgálunk, amelyekben az állapotváltozás tetszőleges időpontban létrejöhet, azaz nincs megkötés arra nézve, hogy milyen időközönként változhat a folyamat/rendszer. Azt fogjuk mondani, hogy ekkor a folyamat folytonos idejű. Szokásos jelölése X_t (és ugyanígy jelöljük a t időponthoz tartozó valószínűségi változót is), a t az időindex, amelyre általában fennáll, hogy $t \in [0, \infty)$. Először olyan folyamatokat vizsgálunk, ahol az idő folytonos, a lehetséges állapotok viszont megszámlálható halmazt alkotnak (azaz véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen sok állapot lehetséges).

2 Poisson-folyamat

Képzeljünk el egy boltot, és legyen X_t a t időpontig érkezett vevők száma. Az időt most folytonosnak tekintjük, így t lehetséges értékei a nemnegatív valós számok. A vásárlók érkezéséről az alábbiakat tételezzük fel:

- Az egy bizonyos időintervallumban érkezett vásárlók számát nem befolyásolja egy másik időintervallumban érkezett vásárlók száma.
- A vevők számának időbeli átlaga hosszú távon állandó.

- Egyszerre csak egy vevő érkezik.

Fogalmazzuk meg ezeket matematikailag precízebben.

- Tekintsük az $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \dots \leq s_n \leq t_n$ időpontokat. Ekkor az $X_{t_1} - X_{s_1}, X_{t_2} - X_{s_2}, \dots, X_{t_n} - X_{s_n}$ valószínűségi változók függetlenek.
- Legyen a vevők érkezési intenzitása λ , vagyis t idő alatt átlagosan λt vevőt várunk. A kicsiny $[t, t + \Delta t]$ intervallumban így kb. $\lambda \Delta t$ valószínűséggel érkezik újabb vevő. Formálisan ez a következőket jelenti:

$$P(X_{t+\Delta t} = X_t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(X_{t+\Delta t} = X_t + 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t).$$

- A harmadik feltétel szerint egyszerre csak egy vevő érkezik. Ez formálisan a következőt jelenti:

$$P(X_{t+\Delta t} \geq X_t + 2) = o(\Delta t).$$

A fenti kifejezésekben szereplő $o(\Delta t)$ olyan mennyiséget jelöl, amely kis Δt esetén sokkal kisebb Δt -nél, azaz

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

Legyen X_t olyan sztochasztikus folyamat, melyre a fentiek teljesülnek, továbbá legyen $X_0 = 0$. Az így kapott folyamat λ paraméterű homogén Poisson-folyamat.

2.1 Az érkezések számának eloszlása

A következőkben meghatározzuk X_t eloszlását kétféle módon is.

Legyen n pozitív egész. Ekkor

$$X_t = \sum_{j=1}^n [X_{jt/n} - X_{(j-1)t/n}],$$

vagyis X_t -t előállítottuk n darab független, azonos eloszlású valószínűségi változó összegeként. Ha n nagy, akkor annak valószínűsége, hogy ezen valószínűségi változók

közül valamelyiknek az értéke legalább 2, nagyon kicsi:

$$\begin{aligned} & P(X_{jt/n} - X_{(j-1)t/n} \geq 2 \text{ valamely } j \leq n\text{-re}) \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^n P(X_{jt/n} - X_{(j-1)t/n} \geq 2) = nP(X_{t/n} \geq 2). \end{aligned}$$

Itt az utolsó kifejezés tart nullához, ha $n \rightarrow \infty$. Ezek szerint közelíthetjük X_t olyan független valószínűségi változók összegével, melyek mindegyike $\lambda(t/n)$ valószínűséggel 1 és $1 - \lambda(t/n)$ valószínűséggel 0. Tudjuk, hogy a binomiális eloszlás előállítható ilyen típusú valószínűségi változók összegeként, ezért

$$P(X_t = k) \approx \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}.$$

Sőt,

$$P(X_t = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}.$$

A fenti határérték meghatározásához tekintsük az alábbiakat:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} = \frac{1}{k!}, \end{aligned}$$

továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} = e^{-\lambda t}.$$

Ezeket az eredményeket felhasználva kapjuk, hogy

$$P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

tehát X_t Poisson-eloszlású a λt paraméterrel.

Most meghatározzuk X_t eloszlását egy másik módon. Ehhez vezessük be a következő jelölést:

$$P_k(t) = P(X_t = k).$$

Tudjuk, hogy $P_0(0) = 1$ és ha $k > 0$, akkor $P_k(0) = 0$. Képezzük $P_k(t)$ differenciálhányadosát:

$$P'_k(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_k(t + \Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(X_{t+\Delta t} = k) - P(X_t = k)}{\Delta t}.$$

A teljes valószínűség tétele szerint

$$\begin{aligned}
P(X_{t+\Delta t} = k) &= \underbrace{P(X_t = k)}_{P_k(t)} \underbrace{P(X_{t+\Delta t} = k | X_t = k)}_{1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)} + \\
&+ \underbrace{P(X_t = k - 1)}_{P_{k-1}(t)} \underbrace{P(X_{t+\Delta t} = k | X_t = k - 1)}_{\lambda\Delta t + o(\Delta t)} + \\
&+ P(X_t \leq k - 2) \underbrace{P(X_{t+\Delta t} = k | X_t \leq k - 2)}_{o(\Delta t)} = \\
&= P_k(t)(1 - \lambda\Delta t) + P_{k-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t) .
\end{aligned}$$

Ezt felhasználva:

$$P'_k(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_k(t + \Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_k(t)(1 - \lambda\Delta t) + P_{k-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} ,$$

azaz

$$P'_k(t) = \lambda P_{k-1}(t) - \lambda P_k(t) .$$

Ez tulajdonképpen végtelen sok differenciálegyenlet, hiszen k értéke tetszőleges nem negatív egész lehet. Rekurzív módon azonban meg tudjuk adni a megoldást. $k = 0$ esetén az egyenlet:

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t), \quad P_0(0) = 1 .$$

A megoldása pedig

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} .$$

A $k > 0$ esetek megoldásához vezessük be a következőt:

$$f_k(t) = e^{\lambda t} P_k(t) .$$

Ekkor $f_0(t) = 1$, a differenciálegyenlet pedig

$$f'_k(t) = \lambda f_{k-1}(t), \quad f_k(0) = 0 .$$

Teljes indukcióval belátható, hogy

$$f_k(t) = \frac{\lambda^k t^k}{k!} ,$$

és így

$$P_k(t) = P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} .$$

2.2 A követési idő eloszlása

Vizsgáljuk a vevők érkezése között eltelt idő eloszlását. Legyen T_n az $n-1$ -edik és az n -edik vevő érkezése között eltelt idő. Ekkor az n -edik vevő érkezéséig eltelt összes idő $Y_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$. Másrészt

$$Y_n = \inf \{t : X_t = n\}, \quad \text{és} \quad T_n = Y_n - Y_{n-1}.$$

A T_i -k független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek emlékezet nélkülieknek kell lenniük, azaz ha már s ideje várunk a vevő érkezésére és még nem érkezett meg, akkor annak valószínűsége, hogy a következő t időben megérkezik, pontosan annyi, mintha most kezdték volna a várakozást. Matematikailag ez annyit jelent, hogy

$$P(T_i \geq s+t | T_i \geq s) = P(T_i \geq t).$$

Ha T_i eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor ez annyit jelent, hogy

$$1 - F(s+t) = (1 - F(s))(1 - F(t)).$$

Ez csak akkor teljesülhet, ha $F(x) = 1 - e^{-bx}$. Vagyis T_i exponenciális eloszlású, melynek várható értéke $1/b$. Mennyi lehet a b paraméter értéke? Nagy t esetén kb. λt számú vásárlót várunk, azaz $Y_{\lambda t} \approx t$. De a nagy számok törvénye szerint $Y_n \approx nE(T_i) = n/b$. Ezeket összevetve

$$t \approx Y_{\lambda t} \approx \lambda t \frac{1}{b} \implies b = \lambda.$$

Ezzel újabb módszert kaptunk arra, hogy hogyan konstruáljunk Poisson-folyamatot. Vegyünk $T_1, T_2, \dots$ független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változókat, és legyen

$$Y_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n, \quad \text{és} \quad X_t = n, \quad \text{ha } Y_n \leq t < Y_{n+1}.$$

Ekkor X_t a leírtak szerint Poisson-folyamat.

Persze ha tudjuk, hogy X_t Poisson-folyamat, akkor a követési idő eloszlása egyszerűen meghatározható:

$$P(T_1 > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t},$$

amiből következik, hogy T_i egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

2.3 Az infinitezimális generátor

A Poisson-folyamat abból a szempontból nem túl izgalmas, hogy az X_t valószínűségi változó értékei csak egyféleképpen változhatnak, mindig csak nőhetnek, mégpedig eggyel. A következőkben olyan folytonos idejű Markov-láncokról lesz szó, ahol az egyes állapotok közötti átmenet ennél összetettebb is lehet.

Tekintsük az X_t folytonos idejű Markov-láncot, az állapottér pedig legyen S . Az X_t folyamat rendelkezzen a Markov-tulajdonsággal, azaz

$$P(X_t = y | X_r, 0 \leq r \leq s) = P(X_t = y | X_s), \quad y \in S,$$

és legyen időben homogén, vagyis

$$P(X_t = y | X_s = x) = P(X_{t-s} = y | X_0 = x), \quad x, y \in S.$$

Minden $x, y \in S$ állapothoz rendeljünk egy nem negatív $\alpha(x, y)$ értéket, mely hasonlóan a Poisson-folyamathoz, az x állapotból az y állapotba ugrás „intenzitását” adja meg. Ezekre az értékekre nyilvánvalóan teljesül, hogy

$$\alpha(x, x) = \alpha(x) = \sum_{y \neq x} \alpha(x, y).$$

Az átmenetvalószínűségek:

$$\begin{aligned} P(X_{t+\Delta t} = x | X_t = x) &= 1 - \alpha(x)\Delta t + o(\Delta t), \\ P(X_{t+\Delta t} = y | X_t = x) &= \alpha(x, y)\Delta t + o(\Delta t), \quad x \neq y. \end{aligned}$$

Más szavakkal, annak valószínűsége, hogy a rendszer az x állapotból egy másik, y állapotba ugrik egy Δt hosszúságú időintervallumon belül, közelítőleg $\alpha(x, y)\Delta t$. Hasonlóan a Poisson-folyamathoz, ezek az átmenetvalószínűségek most is differenciálegyenletet eredményeznek. Legyen $p_x(t) = P(X_t = x)$. A teljes valószínűség tétele szerint:

$$P(X_{t+\Delta t} = x) = \underbrace{P(X_{t+\Delta t} = x | X_t = x)}_{1 - \alpha(x)\Delta t + o(\Delta t)} \underbrace{P(X_t = x)}_{p_x(t)} + \sum_{y \neq x} \underbrace{P(X_{t+\Delta t} = x | X_t = y)}_{\alpha(y, x)\Delta t + o(\Delta t)} \underbrace{P(X_t = y)}_{p_y(t)}.$$

Ezzel a derivált:

$$\begin{aligned}
p'_x(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(X_{t+\Delta t} = x) - P(X_t = x)}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(1 - \alpha(x)\Delta t + o(\Delta t))p_x(t) + \sum_{y \neq x} (\alpha(y, x)\Delta t + o(\Delta t))p_y(t) - p_x(t)}{\Delta t} = \\
&= -\alpha(x)p_x(t) + \sum_{y \neq x} \alpha(y, x)p_y(t).
\end{aligned}$$

Amit kaptunk, az tulajdonképpen egy lineáris differenciálegyenlet rendszer, amelyet gyakran mátrix alakban fejeznek ki. Legyen A egy olyan mátrix, melynek (y, x) eleme $\alpha(y, x)$, ha $x \neq y$, és $-\alpha(x)$, ha $x = y$. A $\underline{p}(t)$ vektor pedig tartalmazza a $P(X_t = x)$ valószínűségeket minden $x \in S$ -re. Ekkor a differenciálegyenlet rendszer a következő alakot ölti:

$$\underline{p}'(t) = \underline{p}(t)A.$$

Az A mátrix neve: *infinitesimális generátor* (a folyamat vagy a Markov-lánc infinitesimális generátora). Figyeljük meg, hogy A -ban az egy sorban levő elemek összege mindig nulla, a főátlóban álló elemek nem pozitívak, a többiek pedig nem negatívak, minden sorban a főátlóbeli elem a többi összegének -1 -szerese.

A kapott differenciálegyenlet a $\underline{p}(0)$ kezdeti feltétel ismeretében egyértelműen megoldható, és a megoldás

$$\underline{p}(t) = \underline{p}(0)e^{tA}.$$

Miként diszkrét idejű esetben, itt is a folyamat hosszú távú viselkedése érdekel minket, legfőképpen az, hogy mi a folyamat határeloszlása (invariáns eloszlása, $\underline{\pi}$). Mivel $\underline{\pi}$ időben nem változik, ezért a t szerinti deriváltja nulla, így

$$\underline{0} = \underline{\pi}A.$$

Legyen most $p_t(x, y) = P(X_t = y, X_0 = x)$, és legyen P_t egy olyan mátrix, melynek (x, y) eleme $p_t(x, y)$. Ekkor a következő mátrixegyenletet kapjuk:

$$\frac{d}{dt}P_t = P_tA, \quad P_0 = I.$$

Ebből a P_t mátrix:

$$P_t = e^{tA}.$$

Legyen $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t = \Pi$, melynek sorai az invariáns eloszlással egyeznek meg. A határmátrixra így az alábbi egyenletet kapjuk:

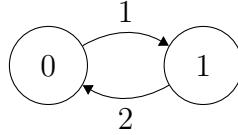
$$\mathcal{O} = \Pi A.$$

Példa

Tekintsünk egy olyan egyszerű folytonos idejű Markov-láncot, melynek csupán két állapota van, $S = \{0, 1\}$. Legyen $\alpha(0, 1) = 1$, és $\alpha(1, 0) = 2$. Ekkor az infinitezimális generátor:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

A folyamatot leíró gráf:



Az e^{tA} mátrix kiszámításához diagonalizálnunk kell A -t. Mivel A sajátértékei 0 és -3 , ezért

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}}_{Q^{-1}}.$$

Ennek segítségével meghatározhatjuk P_t -t:

$$\begin{aligned} P_t = e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tQDQ^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q(tD)^k Q^{-1}}{k!} = Q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} Q^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mivel $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-3t} = 0$, ezért

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_t = \Pi = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Most határozzuk meg az invariáns eloszlást a $0 = \underline{\pi}A$ egyenlet alapján. Az eloszlás vektor $\underline{\pi} = [\pi_0, \pi_1]$, a koordinátáinként kiírt egyenletek:

$$0 = -\pi_0 + 2\pi_1$$

$$0 = \pi_0 - 2\pi_1$$

Tudjuk továbbá azt is, hogy $\pi_0 + \pi_1 = 1$. Az egyenletekből azt kapjuk, hogy $\pi_0 = 2\pi_1$, ezzel a stacionárius eloszlás:

$$\underline{\pi} = [2/3, 1/3]$$

Ez természetesen megegyezik a határmátrix $(\lim_{t \rightarrow \infty} P_t)$ egyik (bármelyik) sorával.

2.4 Születési és halálozási folyamatok

A folytonos idejű Markov-láncok egy igen fontos osztályát a születési és halálozási folyamatok alkotják. Ekkor az állapottér $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, és átmenet csak a szomszédos állapotok között lehetséges, vagyis az n -edik állapotból csak az $n - 1$ -edikbe vagy az $n + 1$ -edikbe ugarhat a rendszer (vagy marad). Maga az elnevezés egy populáció dinamikai modellből származik, melyben az egyedek száma jelenti az állapotot, és az egyedek száma mindig csak eggyel nőhet vagy eggyel csökkenhet. Egy ilyen folyamat leírásához szükségünk van a születési intenzitásokra, λ_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), és a halálozási intenzitásokra, μ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Ha a populáció létszáma éppen n , akkor λ_n intenzitással születik egy egyed, és μ_n intenzitással távozik. Legyen X_t a rendszer állapota (egyedek száma) a t időpontban. Ekkor

$$P(X_{t+\Delta t} = n + 1 | X_t = n) = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(X_{t+\Delta t} = n - 1 | X_t = n) = \mu_n \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(X_{t+\Delta t} = n | X_t = n) = 1 - (\lambda_n + \mu_n) \Delta t + o(\Delta t).$$

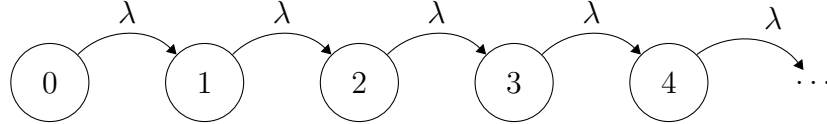
Az előzőekhez hasonlóan ezeket is átkonvertálhatjuk differenciálegyenletekké. A $p_n(t) = P(X_t = n)$ jelöléssel:

$$p'_n(t) = \mu_{n+1}p_{n+1}(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)p_n(t).$$

A $p_t(m, n) = P(X_t = n | X_0 = m)$ átmenetvalószínűségek meghatározásához a fenti egyenletrendszert kell megoldani a $p_m(0) = 1$, $p_n(0) = 0$, ($n \neq m$) kezdeti feltételek mellett.

Példák¹

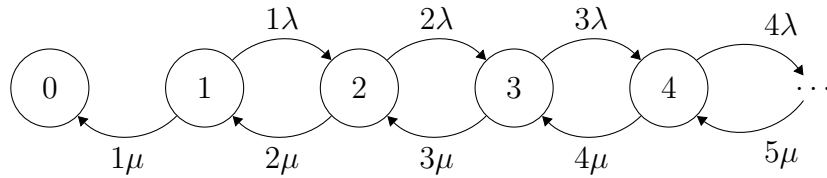
1. A Poisson-folyamat születési és halálozási folyamat a $\lambda_n = \lambda$ és $\mu_n = 0$ paraméterekkel.



2. Képzeljünk el egy populációt, ahol az egyedek egymástól függetlenül λ intenzitással hoznak létre egy új egyedet, és μ intenzitással halnak meg. Legyen X_t a populáció létszáma a t időpontban. Ekkor X_t születési és halálozási folyamat a $\lambda_n = n\lambda$ és $\mu_n = n\mu$ paraméterekkel, és az $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ állapottérrel. A folyamat infinitezimális generátora:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & & \dots \\ \mu & * & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 2\mu & * & 2\lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & * & 3\lambda & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy a 0 állapot elnyelő állapot. Ha $\mu = 0$, akkor ezt a folyamatot *Yule-folyamatnak* is nevezik.



3. Tegyük fel, hogy az egyedek ugyanúgy szaporodnak, illetve meghalnak, mint az előző példában, de most új egyedek is érkeznek a populációba ν intenzitással.

¹A * mindig a vele egy sorban levő elemek összegének -1 -szeresét jelöli.

A kapott folyamat most is születési és halálozási folyamat a $\lambda_n = n\lambda + \nu$ és $\mu_n = n\mu$ paraméterekkel. A folyamat infinitezimális generátora:

$$A = \begin{bmatrix} * & \nu & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \mu & * & \lambda + \nu & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 2\mu & * & 2\lambda + \nu & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & * & 3\lambda + \nu & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

