

Feladatok

Folytonos idejű Markov-láncok

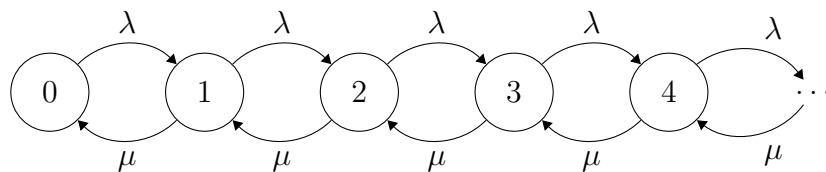
1. Tekintsünk egy szerveret, melyhez λ intenzitással érkeznek az igények, a kiszolgálás intenzitása pedig μ . Legyen X_t a t időpontban a rendszerben levő igények száma. Adjuk meg a folyamat infinitezimális generátorát és a folyamatot leíró gráfot!

Megoldás:

Születési és halálozási folyamatot kaptunk a $\lambda_n = \lambda$ és $\mu_n = \mu$ paraméterekkel, és az $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ állapottérrel. A folyamat infinitezimális generátora (a * mindig a vele egy sorban levő elemek összegének -1 -szeresét jelöli):

$$A = \begin{bmatrix} * & \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \mu & * & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu & * & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

A folyamatot leíró gráf:



2. Módosítsuk az előző példát úgy, hogy N darab szerver legyen a rendszerben. Legyen X_t most is a t időpontban a rendszerben levő igények száma. Adjuk meg a folyamat infinitezimális generátorát és a folyamatot leíró gráfot!

Megoldás:

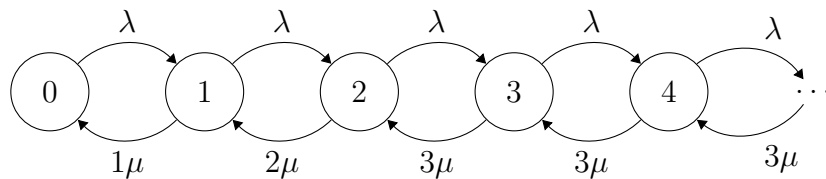
Most is születési és halálozási folyamatot kaptunk, $\lambda_n = \lambda$. A kérdés az, hogy mi lesz a kiszolgálási intenzitás. Ha csak egy igény van a rendszerben, akkor csak egy egyetlen szerver dolgozik. Ha kettő, akkor kettő, tehát a kiszolgálási intenzitás megduplázódik (időegység alatt több igényt szolgálnak ki). Vegyük észre, hogy ha kevesebb igény van a rendszerben, mint ahány szerver, akkor az álló szerverek természetesen nem játszanak szerepet a kiszolgálásban (hiába van nyitva négy pénztár a vasútállomáson, az nem gyorsítja fel egyetlen kiszolgálás idejét). Ha N igény van a rendszerben, akkor mind az N szerver dolgozik, a kiszolgálási intenzitás ekkor $N\mu$. Ezzel el is érte a rendszer a kiszolgálási intenzitásának maximumát. Ha $N+1$ igény van a rendszerben, akkor N igényt éppen kiszolgálnak, a maradék egy pedig várakozik. Ezzel

$$\mu_n = \begin{cases} k\mu & , \text{ ha } 0 \leq k \leq N \\ N\mu & , \text{ ha } k > N \end{cases}.$$

A folyamat infinitezimális generátora (a * mindig a vele egy sorban levő elemek összegének -1 -szeresét jelöli):

$$A = \begin{bmatrix} * & \lambda & 0 & \dots & & \dots \\ \mu & * & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 2\mu & * & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & * & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & N\mu & * & \lambda & \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

A folyamat gráfja $N = 3$ esetén:



3. Módosítsuk az előző feladatot úgy, hogy a szerverek száma mindig az igények számához igazodik (végtelen számú szerver áll rendelkezésre). Adjuk meg a folyamat infinitezimális generátorát és a folyamatot leíró gráfot!

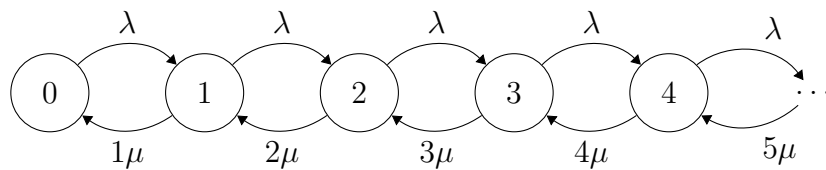
Megoldás:

Most is születési és halálozási folyamatról van szó, $\lambda_n = \lambda$ és $\mu_n = n\mu$.

A folyamat infinitezimális generátora (a * mindig a vele egy sorban levő elemek összegének -1 -szeresét jelöli):

$$A = \begin{bmatrix} * & \lambda & 0 & \dots \\ \mu & * & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & * & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & * & \lambda & 0 & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

A folyamat gráfja:



4. Egy boltba a vevők Poisson-folyamat szerint érkeznek, félóránként átlagosan négy.
- Mi a valószínűsége annak, hogy fél óra alatt kettőnél kevesebb vevő jön?
 - Mi a valószínűsége annak, hogy negyven perc alatt pontosan négy vevő jön?
 - Várhatóan mennyi idő alatt érkezik húsz vásárló?
 - Tegyük fel, hogy az első órában 10 vevő érkezett. Mi a valószínűsége, hogy a következő félórában pontosan három vevő érkezik?
 - Tegyük fel, hogy az első órában 10 vevő érkezett. Mi a valószínűsége, hogy az első negyedórában pontosan három vevő érkezett?
 - Tegyük fel, hogy pontosan k vevő érkezett az első két órában. Mi a valószínűsége, hogy pontosan j vevő érkezett az első félórában?

Megoldás:

- (a) A vevők érkezési intenzitása $\lambda = 4$ vevő/félóra. A t idő alatt érkező vevők száma λt paraméterű Poisson-eloszlással írható le, vagyis most a paraméter 4. Legyen X_t a t idő alatt érkező vevők száma, az időt pedig mérjük fél órás egységekben. Ezzel a keresett valószínűség

$$P(X_1 < 2) = P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) = \frac{4^0}{0!}e^{-4} + \frac{4^1}{1!}e^{-4} = 5e^{-4} \approx 0,0916.$$

- (b) Most a paraméter $4 \times 4/3 = 16/3$, hiszen 40 percről van szó. Ezzel a keresett valószínűség

$$P(X_{4/3} = 4) = \frac{(16/3)^4}{4!}e^{-16/3} \approx 0,1627.$$

- (c) Az adatok szerint átlagosan négy vevő érkezik fél óránként, ezért 20 vevő átlagosan 2 és fél óra alatt érkezik.
- (d) Mivel a diszjunkt időintervallumokban érkező vevők száma egymástól független, ezért itt a feltételnek nincs semmilyen szerepe, tehát

$$P(X_3 - X_2 = 3 | X_2 = 10) = P(X_3 - X_2 = 3) = P(X_1 = 3) = \frac{4^3}{3!}e^{-4} \approx 0,1954.$$

- (e) Nagy különbség az előző kérdéshez képest, hogy most az időintervallumok nem diszjunktak, tehát szerepe van a feltételnek is. A paraméterek: negyedórára 2, háromnegyed órára 6, egy órára 8. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} P(X_{1/2} = 3 | X_2 = 10) &= \frac{P(X_{1/2} = 3 \text{ és } X_2 = 10)}{P(X_2 = 10)} = \\ &= \frac{P(X_{1/2} = 3 \text{ és } X_2 - X_{1/2} = 7)}{P(X_2 = 10)} = \\ &= \frac{\frac{2^3}{3!}e^{-2} \frac{6^7}{7!}e^{-6}}{\frac{8^{10}}{10!}e^{-8}} = \frac{10!}{3!7!} \left(\frac{2}{8}\right)^3 \left(\frac{6}{8}\right)^7 = \\ &= \binom{10}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^7 \approx 0,2503. \end{aligned}$$

- (f) A feladat hasonló ez előzőhöz, a paraméterek: fél órára 4, másfél órára

12, két órára 16. A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}
 P(X_1 = j | X_4 = k) &= \frac{P(X_1 = j \text{ és } X_4 = k)}{P(X_4 = k)} = \\
 &= \frac{P(X_1 = j \text{ és } X_4 - X_1 = k - j)}{P(X_4 = k)} = \\
 &= \frac{\frac{4^j}{j!} e^{-4} \frac{12^{k-j}}{(k-j)!} e^{-12}}{\frac{16^k}{k!} e^{-16}} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \left(\frac{4}{16}\right)^j \left(\frac{12}{16}\right)^{k-j} = \\
 &= \binom{k}{j} \left(\frac{1}{4}\right)^j \left(\frac{3}{4}\right)^{k-j}.
 \end{aligned}$$

5. Legyen X_t és Y_t két független Poisson-folyamat, λ_1 és λ_2 paraméterekkel, melyek a beérkező hívások számát jelzik két telefonnál. Legyen $Z_t = X_t + Y_t$.

- (a) Igazoljuk, hogy Z_t Poisson-folyamat és határozzuk meg a paraméterét!
- (b) Mi a valószínűsége annak, hogy az első hívás az első telefonra érkezik?
- (c) Legyen T az az időpont, amikor az első hívás beérkezik valamelyik telefonra. Határozzuk meg T eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

Megoldás:

- (a) Meg kell határoznunk a $P(Z_{t+\Delta t} = Z_t)$ és a $P(Z_{t+\Delta t} = Z_t + 1)$ valószínűségeket.

Ha $Z_{t+\Delta t} = Z_t$, akkor a Δt hosszúságú időintervallumon belül nem érkezett hívás egyik vonalon sem. Ennek valószínűsége:

$$\begin{aligned}
 P(Z_{t+\Delta t} = Z_t) &= (1 - \lambda_1 \Delta t)(1 - \lambda_2 \Delta t) + o(\Delta t) = \\
 &= 1 - \lambda_1 \Delta t - \lambda_2 \Delta t + \lambda_1 \lambda_2 \Delta t^2 + o(\Delta t) = \\
 &= 1 - (\lambda_1 + \lambda_2) \Delta t + o(\Delta t).
 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőséget az indokolja, hogy Δt^2 $o(\Delta t)$ nagyságrendű mennyiség.

Ha $Z_{t+\Delta t} = Z_t + 1$, akkor a Δt hosszúságú időintervallumon belül pontosan egy hívás érkezett, azaz az egyikre egy, a másikon nulla, vagy fordítva.

Ennek valószínűsége:

$$\begin{aligned} P(Z_{t+\Delta t} = Z_t + 1) &= \lambda_1 \Delta t (1 - \lambda_2 \Delta t) + (1 - \lambda_1 \Delta t) \lambda_2 \Delta t + o(\Delta t) = \\ &= \lambda_1 \Delta t - \lambda_1 \lambda_2 \Delta t^2 + \lambda_2 \Delta t - \lambda_1 \lambda_2 \Delta t^2 + o(\Delta t) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőséget most is az indokolja, hogy $\Delta t^2 o(\Delta t)$ nagyságrendű mennyiség.

Végül annak valószínűsége, hogy a Δt hosszúságú időintervallumon belül egynél több hívás érkezik:

$$P(Z_{t+\Delta t} \geq Z_t + 2) = 1 - [P(Z_{t+\Delta t} = Z_t) + P(Z_{t+\Delta t} = Z_t + 1)] = o(\Delta t).$$

Azt kaptuk tehát, hogy Z_t Poisson-folyamat, a paramétere pedig $\lambda_1 + \lambda_2$.

- (b) A kérdés kicsit átfogalmazva: feltéve, hogy t ideig egyetlen hívás érkezett, mi a valószínűsége annak, hogy az az első telefonra érkezett? Tudjuk, hogy a t időtartam alatt beérkező hívások száma λt paraméterű Poisson-eloszlású. Ezt felhasználva a keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} P(t \text{ ideig az első telefonra egy hívás} | t \text{ ideig összesen egyetlen hívás}) &= \\ &= \frac{P(t \text{ ideig az első telefonra egy hívás és a másodikra nulla})}{P(t \text{ ideig összesen egyetlen hívás})} \\ &= \frac{\frac{(\lambda_1 t)^1}{1!} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_2 t)^0}{0!} e^{-\lambda_2 t}}{\frac{((\lambda_1 + \lambda_2)t)^1}{1!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}} = \frac{\lambda_1 t e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1 + \lambda_2)t e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}} \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

- (c) T az első hívásig eltelt idő. Annak valószínűsége, hogy T legalább t (vagyis az első hívásig legalább t ideig kell várni):

$$P(T \geq t) = P(Z_t = 0) = \frac{((\lambda_1 + \lambda_2)t)^0}{0!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}.$$

Ebből következik, hogy $P(T < t) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$, tehát T $\lambda_1 + \lambda_2$ paraméterű exponenciális eloszlású, így az eloszlásfüggvénye és a sűrűségfüggvénye

$(F(t)$ és $f(t))$:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} & \text{ha } 0 < t \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad \text{és}$$

$$f(t) = \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} & \text{ha } 0 < t \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

6. Legyen X_t és Y_t két független Poisson-folyamat, λ_A és λ_B paraméterekkel, melyek az A és B boltokba érkező vevők számát mérik.

- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy az első vevő az A üzletbe érkezik?
- (b) Mi a valószínűsége annak, hogy az első órában a két üzletbe összesen négy vevő érkezik?
- (c) Tegyük fel, hogy a két boltba összesen négy vevő érkezett az első órában. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a négy az A üzletbe ment?
- (d) Legyen T az az időpont, amikor az első vevő megérkezik a B üzletbe. Ekkor X_T az A üzletbe érkezett vevők száma, amíg az első vevő megérkezik B -be. Határozzuk meg X_T eloszlását!

Megoldás:

- (a) Az előző feladat alapján: $\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$.
- (b) A két üzletbe összesen érkező vevők száma a t időpontig: $X_t + Y_t$. Erről az előző feladatból tudjuk, hogy $\lambda_A + \lambda_B$ paraméterű Poisson-folyamat, az egy bizonyos időtartam alatt (pl. $(0, t)$) érkezett vevők száma pedig Poisson-eloszlással írható le, melynek paramétere $(\lambda_A + \lambda_B)t$. Így a kérdéses valószínűség (feltéve, hogy az érkezési intenzitások egy órára vonatkoznak):

$P(\text{első órában a két üzletbe összesen négy vevő érkezik})$

$$= P(X_1 + Y_1 = 4) = \frac{[(\lambda_A + \lambda_B)1]^4}{4!} e^{-(\lambda_A + \lambda_B)1} = \frac{(\lambda_A + \lambda_B)^4}{4!} e^{-(\lambda_A + \lambda_B)}.$$

- (c) A kérdés formálisan: $P(X_1 = 4 | X_1 + Y_1 = 4) = ?$

$$\begin{aligned} P(X_1 = 4 | X_1 + Y_1 = 4) &= \frac{P(X_1 = 4 \text{ és } Y_1 = 0)}{P(X_1 + Y_1 = 4)} \\ &= \frac{\frac{\lambda_A^4}{4!} e^{-\lambda_A} \frac{\lambda_B^0}{0!} e^{-\lambda_B}}{\frac{(\lambda_A + \lambda_B)^4}{4!} e^{-(\lambda_A + \lambda_B)}} = \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^4. \end{aligned}$$

- (d) Rögzített T esetén X_T Poisson-eloszlású, a paraméter pedig $\lambda_A T$. Most viszont T értéke függ a véletlentől (valószínűségi változó), így a $P(X_T = k)$ valószínűséget a rögzített T -kre kapott valószínűségek súlyozott átlagaként kapjuk. Tulajdonképpen a teljes valószínűség tételét kell alkalmaznunk:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{P(X_T = k)}_{P(A)} &= \sum_T \underbrace{P(T \text{ idő alatt } k \text{ vevő } A\text{-ba} | B\text{-nél az első vevőig } T \text{ idő})}_{P(A|B_i)} \\
 &\quad \cdot \underbrace{P(B\text{-nél az első vevőig } T \text{ idő})}_{P(B_i)} .
 \end{aligned}$$

Mivel T folytonos eloszlású valószínűségi változó (láttuk azt is, hogy λ_B paraméterű exponenciális eloszlású), ezért az összegzést az integrál váltja fel, $P(B_i)$ -t pedig a sűrűségfüggvény:

$$P(X_T = k) = \int_0^\infty \frac{(\lambda_A T)^k}{k!} e^{-\lambda_A T} \cdot \lambda_B e^{-\lambda_B T} dT = \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \right)^k \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} .$$