

Feladatok

Tömegkiszolgálási modellek

1. ($M/M/1$ és $M/M/2$ összehasonlítása) Egy bankfiókban egyetlen ablaknál intézik az ügyeket. Az ügyfelek átlagosan 10 perc alatt végeznek, továbbá azt is tudjuk, hogy átlagosan óránként 5.8 ügyfél érkezik. Tételezzük fel, hogy a rendszer befogadóképessége végtelen. Hogyan alakulnak a rendszert leíró mérőszámok? Mennyivel csökkenne a sor hossza, ha még egy (ugyanilyen kiszolgáló képességű) ablakot nyitnának?

Megoldás:

Ha csak egy egyetlen ablak van, akkor egy $M/M/1$ rendszerrel van dolgunk, amelyben az érkezési intenzitás $\lambda = 5.8$ ügyfél/óra, a kiszolgálási intenzitás pedig $\mu = 6$ ügyfél/óra. A rendszerre jellemző értékek:

$$E(N) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{5.8}{6 - 5.8} = 29$$

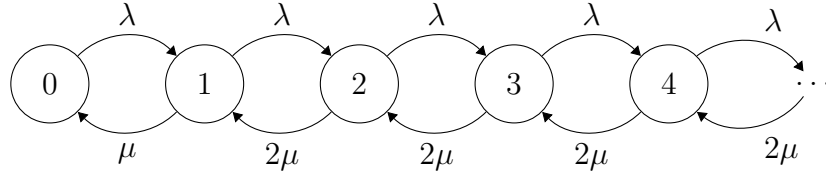
$$E(T) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{6 - 5.8} = 5 \text{ óra}$$

$$E(N_w) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{5.8}{6} \frac{5.8}{6 - 5.8} = 28.033$$

$$E(T_w) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{5.8}{6} \frac{1}{6 - 5.8} = 4.83 \text{ óra} = 4 \text{ óra } 50 \text{ perc}$$

Ha még egy ablakot nyitnak, akkor $M/M/2$ rendszert kapunk, amire már nem alkalmazhatóak a fenti ($M/M/1$ -re levezetett) formulák. Viszont az ott alkalmazott elv alapján meg lehet határozni a kívánt mennyiségeket.

Az $M/M/2$ rendszer gráfja:



Az $M/M/2$ rendszerhez tartozó egyensúlyi egyenletek:

$$\begin{aligned}
 \lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 & \rightarrow \pi_1 &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\
 \lambda\pi_1 &= 2\mu\pi_2 & \rightarrow \pi_2 &= \frac{\lambda}{2\mu}\pi_1 = \\
 \lambda\pi_2 &= 2\mu\pi_3 & \rightarrow \pi_3 &= \frac{\lambda}{2\mu}\pi_2 = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2 \pi_1 \\
 &\vdots & & \\
 \lambda\pi_{k-1} &= 2\mu\pi_k & \rightarrow \pi_k &= \frac{\lambda}{2\mu}\pi_{k-1} = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{k-1} \pi_1 \\
 &\vdots & &
 \end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy egy eloszlás elemeiről van szó:

$$\begin{aligned}
 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \dots \\
 &= \pi_0 + \pi_1 \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu} + \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2 + \dots \right) = \pi_0 + \pi_1 \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}} = \\
 &= \pi_0 + \pi_1 \frac{2\mu}{2\mu - \lambda} = \pi_0 + \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \cdot \frac{2\mu}{2\mu - \lambda} = \pi_0 \left(1 + \frac{2\lambda}{2\mu - \lambda} \right) \\
 &= \pi_0 \frac{2\mu + \lambda}{2\mu - \lambda}
 \end{aligned}$$

Ebből azt kapjuk, hogy $\pi_0 = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}$. Behelyettesítve a megadott $\lambda = 5.8$ és

$\mu = 6$ értékeket $\pi_0 = \frac{6.2}{17.8} \approx 0.3483$ (pontos érték: $\frac{31}{89}$), továbbá $\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \approx 0.3367$ (pontos érték: $\pi_1 = \frac{899}{2670}$).

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \frac{31}{89} \\
 \pi_k &= \frac{899}{2670} \left(\frac{29}{60}\right)^{k-1}, \quad k \geq 1
 \end{aligned}$$

Az invariáns eloszlás ismeretében meghatározhatjuk $E(N)$ -et:

$$\begin{aligned} E(N) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{899}{2670} \left(\frac{29}{60}\right)^{k-1} = \frac{899}{2670} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{29}{60}\right)^{k-1} \\ &= \frac{899}{2670} \frac{1}{\left(1 - \frac{29}{60}\right)^2} = 1.2613 \end{aligned}$$

Ebből a Little-formula segítségével a rendszerben eltöltött átlagos idő:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} E(N) \approx 0.2175 \text{ óra} \approx 13.05 \text{ perc}$$

A várakozók számának várható értékének meghatározásánál vegyük figyelembe, hogy most két ablak van, tehát akkor van várakozó ügyfél, ha legalább három ügyfél van a rendszerben. Ha k darab ügyfél van a rendszerben, akkor kettő az ablakoknál van, a többi $k - 2$ pedig várakozik.

$$\begin{aligned} E(N_w) &= \sum_{k=3}^{\infty} (k-2) \pi_k = \sum_{k=3}^{\infty} (k-2) \frac{899}{2670} \left(\frac{29}{60}\right)^{k-1} = \frac{899}{2670} \sum_{k=3}^{\infty} (k-2) \left(\frac{29}{60}\right)^{k-1} \\ &= \frac{899}{2670} \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{29}{60}\right)^{j+1} = \frac{899}{2670} \left(\frac{29}{60}\right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{29}{60}\right)^{j-1} \\ &= \frac{899}{2670} \left(\frac{29}{60}\right)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{29}{60}\right)^2} \approx 0.2947 \end{aligned}$$

Ebből a Little-formula segítségével a várakozásra fordított idő is meghatározható:

$$E(T_w) = \frac{1}{\lambda} E(N_w) \approx 0.0508 \text{ óra} \approx 3.05 \text{ perc}$$

Persze úgy is gondolkodhattunk volna, hogy $E(T)$ és $E(T_w)$ különbsége az átlagos kiszolgálási idő (10 perc).

2. ($M/M/3$) Egy hivatalban három ablaknál intézik az ügyeket. Az ügyfelek Poisson-folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 12, a kiszolgálási idő pedig exponenciális eloszlású 4 perc várható értékkel. Tekintsük a hivatalban tartózkodó ügyfelek számát.

- (a) Adjuk meg a folyamat infinitezimális generátorát!
- (b) Adjuk meg az invariáns eloszlást!
- (c) Véletlenszerű időpontban érkezünk a hivatalba. Mi a valószínűsége, hogy sorba kell állnunk?

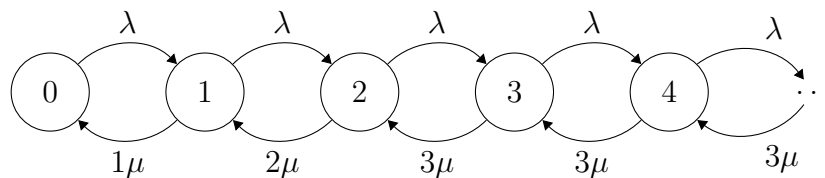
- (d) Átlagosan hány ügyfél tartózkodik a hivatalban?
- (e) Átlagosan hányan váraкоznak?
- (f) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a hivatalban?
- (g) Ebből mennyi fordítódik váraкоzásra?
- (h) Mi történne, ha az egyik ablak bezárna? És ha még egy?

Megoldás:

- (a) A folyamat infinitezimális generátora (a * mindig a vele egy sorban levő elemek összegének -1 -szeresét jelöli):

$$A = \begin{bmatrix} * & \lambda & 0 & \dots & & & \dots \\ \mu & * & \lambda & 0 & \dots & & \dots \\ 0 & 2\mu & * & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & * & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 3\mu & * & \lambda & \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Az $M/M/3$ rendszer gráfja:



- (b) A feladat szövege alapján az érkezési intenzitás $\lambda = 12$ fő/óra, a kiszolgálási intenzitás (szerverenként) $\mu = 15$ fő/óra.

Az $M/M/3$ rendszerhez tartozó egyensúlyi egyenletek:

$$\begin{aligned}
\lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 & \rightarrow \pi_1 &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\
\lambda\pi_1 &= 2\mu\pi_2 & \rightarrow \pi_2 &= \frac{\lambda}{2\mu}\pi_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2}\pi_0 \\
\lambda\pi_2 &= 3\mu\pi_3 & \rightarrow \pi_3 &= \frac{\lambda}{3\mu}\pi_2 \\
\lambda\pi_3 &= 3\mu\pi_4 & \rightarrow \pi_4 &= \frac{\lambda}{3\mu}\pi_3 = \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^2 \pi_2 \\
&\vdots & & \\
\lambda\pi_{k-1} &= 3\mu\pi_k & \rightarrow \pi_k &= \frac{\lambda}{3\mu}\pi_{k-1} = \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^{k-2} \pi_2 \\
&\vdots & &
\end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy egy eloszlás elemeiről van szó:

$$\begin{aligned}
1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \dots \\
&= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \left(1 + \frac{\lambda}{3\mu} + \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^2 + \dots\right) = \pi_0 + \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} + \pi_2 \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{3\mu}} \\
&= \pi_0 + \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} + \pi_0 \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{3\mu}} = \pi_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \frac{3\mu}{3\mu - \lambda}\right)
\end{aligned}$$

Behelyettesítés és egyszerűsítések után az eloszlás tagjai:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{55}{123} \approx 0.4472 \\
\pi_1 &= \frac{44}{123} \approx 0.3577 \\
\pi_2 &= \frac{88}{615} \approx 0.1431 \\
\pi_k &= \left(\frac{12}{45}\right)^{k-2} \frac{88}{615}, \quad k \geq 2
\end{aligned}$$

- (c) Akkor kell sorbaállnunk (várakoznunk), ha minden ablak foglalt, azaz ha legalább három ügyfél van a hivatalban. Ennek valószínűsége:

$$P(X_t \geq 3) = 1 - P(X_t < 3) = 1 - (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2) = 1 - \frac{583}{615} = \frac{32}{615} \approx 0.052$$

(d) Átlagosan hány ügyfél tartózkodik a hivatalban?

$$\begin{aligned}
 E(N) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k = \pi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k\pi_k = \pi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^{k-2} \pi_2 \\
 &= \pi_1 + \pi_2 \frac{3\mu}{\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^{k-1} = \pi_1 + \pi_2 \frac{3\mu}{\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^{k-1} - 1 \right) \\
 &= \pi_1 + \pi_2 \frac{3\mu}{\lambda} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{3\mu}\right)^2} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Behelyettesítve az értékeket: $E(N) = 0.8189$.

(e) Átlagosan hányan váraкоznak? Akkor van váraкоzó ügyfél, ha legalább négyen vannak az ügyfelek. k darab ügyfél esetén három az ügyeit intézi, a többi $k - 3$ váraкоzik. Így

$$\begin{aligned}
 E(N_w) &= \sum_{k=4}^{\infty} (k-3)\pi_k = \sum_{k=4}^{\infty} (k-3) \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^{k-2} \pi_2 \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^{j+1} \pi_2 = \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^2 \pi_2 \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^{j-1} \\
 &= \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^2 \pi_2 \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{3\mu}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Behelyettesítve az értékeket: $E(N_w) = 0.0189$.

(f) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a hivatalban? A Little-formula alapján

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda} \approx 0.0682 \text{ óra} \approx 4.0945 \text{ perc}$$

(g) Ebből mennyi fordítódik váraкоzásra? Mivel az átlagos kiszolgálási idő 4 perc, ezért átlagosan csupán 0.0945 percet (kicsit kevesebb, mint 6 másodpercet) kell váraкоzni (tehát gyakorlatilag semennyit).

(h) Ha egy vagy két ablak bezárna, akkor a rendszer $M/M/2$, illetve $M/M/1$ rendszerré válna. Mivel $2\mu > \lambda$, $\mu > \lambda$ ($15 > 12$), ezért mindkét rendszer működőképes lenne.

3. ($M/M1/4$) Egy lakótelepi kisboltba mindössze négy vásárló fér be. Ha egy potenciális vevő azt tapasztalja, hogy tele van a bolt, akkor be sem megy a

boltba. A boltban egyetlen eladó dolgozik, ő exponenciális eloszlású idő alatt szolgálja ki a vevőket, az átlagos kiszolgálási idő hat perc. A potenciális vevők Poisson-folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan nyolc¹. Tekintsük a boltban tartózkodó vevők számát!

- (a) Adjuk meg a folyamat infinitezimális generátorát!
- (b) Adjuk meg az invariáns eloszlást!
- (c) Az idő mekkora hányadában van tele a bolt?
- (d) A potenciális vevők hány százalékából nem lesz vevő (mert nem tudtak bejutni a boltba)?
- (e) Véletlenszerű időpontban érkezünk a boltba. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb egy ember van előttünk?
- (f) Tegyük fel, hogy bejutottunk. Mi a valószínűsége, hogy nem kell várakoznunk?
- (g) Átlagosan hány vevő tartózkodik a boltban?
- (h) Átlagosan hányan várakoznak?
- (i) Átlagosan mennyi időt tölt egy vevő a boltban?
- (j) Ebből mennyi fordítódik várakozásra?

Megoldás:

A feladat szövege szerint az érkezési intenzitás $\lambda = 8$ vevő/óra, a kiszolgálási intenzitás pedig $\mu = 10$ vevő/óra.

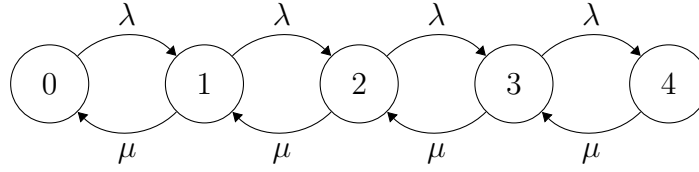
- (a) Mivel a boltba legfeljebb négy vevő fér be, ezért az állpottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Az infinitezimális generátor:

$$A = \begin{bmatrix} * & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & * & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & * & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu & * & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \mu & * \end{bmatrix}.$$

A folyamat gráfja:

¹ügyeljünk arra, hogy a potenciális vevők még nem biztos, hogy vevők!



(b) A rendszerhez tartozó egyensúlyi egyenletek:

$$\begin{aligned}
 \lambda \pi_0 &= \mu \pi_1 & \rightarrow \pi_1 &= \frac{\lambda}{\mu} \pi_0 \\
 \lambda \pi_1 &= \mu \pi_2 & \rightarrow \pi_2 &= \frac{\lambda}{\mu} \pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0 \\
 \lambda \pi_2 &= \mu \pi_3 & \rightarrow \pi_3 &= \frac{\lambda}{\mu} \pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \pi_0 \\
 \lambda \pi_3 &= \mu \pi_4 & \rightarrow \pi_4 &= \frac{\lambda}{\mu} \pi_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \pi_0
 \end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy egy eloszlás elemeiről van szó:

$$\begin{aligned}
 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \\
 &= \pi_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \right) \\
 &= \pi_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 - 1}{\frac{\lambda}{\mu} - 1}
 \end{aligned}$$

Behelyettesítés és egyszerűsítések után az eloszlás tagjai:

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \frac{625}{2101} \approx 0.2975 \\
 \pi_1 &= \frac{500}{2101} \approx 0.2380 \\
 \pi_2 &= \frac{400}{2101} \approx 0.1904 \\
 \pi_3 &= \frac{320}{2101} \approx 0.1523 \\
 \pi_4 &= \frac{256}{2101} \approx 0.1218
 \end{aligned}$$

- (c) Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott időpontban tele van a bolt (négy vevő van benn) $\pi_4 = 0.1218$.
- (d) A potenciális vevők hány százalékából nem lesz vevő (mert nem tudtak bejutni a boltba)? Abból nem lesz vevő, aki akkor érkezik, amikor tele

van a bolt. Ez az idő 12.18%-ában történik meg, tehát a potenciális vevők átlagosan 12.18%-ából nem lesz vevő.

- (e) Véletlenszerű időpontban érkezünk a boltba. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb egy ember van előttünk?

$$P(X_t = 0 \text{ vagy } 1) = \pi_0 + \pi_1 = \frac{1125}{2101} \approx 0.5355$$

- (f) Tegyük fel, hogy bejutottunk. Mi a valószínűsége, hogy nem kell várakoznunk?

$$\begin{aligned} P(\text{nem kell várni} \mid \text{bejutottunk}) &= \frac{P(\text{bejutottunk és nem kell várni})}{P(\text{bejutottunk})} \\ &= \frac{\pi_0}{1 - \pi_4} = \frac{125}{369} \approx 0.3387. \end{aligned}$$

- (g) Átlagosan hány vevő tartózkodik a boltban?

$$E(N) = \sum_{k=1}^4 k\pi_k = \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4 = \frac{3284}{2101} \approx 1.563.$$

- (h) Átlagosan hányan várakoznak?

$$E(N_w) = \sum_{k=2}^4 (k-1)\pi_k = \pi_2 + 2\pi_3 + 3\pi_4 = \frac{1808}{2101} \approx 0.8605.$$

- (i) Átlagosan mennyi időt tölt egy vevő a boltban? A Little-formula alapján dolgozhatunk, azonban figyelniünk kell arra, hogy az eredeti érkezési intenzitás a potenciális, nem pedig a tényleges vevőkre vonatkozik. A tényleges vevők érkezési intenzitása: $\lambda' = \lambda(1 - \pi_4) = 7.0252$. Ezzel

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda'} \approx 0.2225 \text{ óra} \approx 13.35 \text{ perc.}$$

- (j) Ebből mennyi fordítódik várakozásra?

$$E(T_w) = \frac{E(N_w)}{\lambda'} \approx 0.1225 \text{ óra} \approx 7.35 \text{ perc.}$$

Figyeljük meg, hogy $E(T)$ és $E(T_w)$ különbsége éppen az átlagos kiszolgálási idő (hat perc).

4. ($M/M/2/4$) Egy fodrászatban két mester dolgozik. Az üzlet elég kicsi, mindössze két várakozó ügyfél számára van benne hely. Mindkét mester exponenciális

eloszlású idő alatt végez egy klienssel, melynek várható értéke negyedóra. A potenciális ügyfelek Poisson-folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan öt. Tekintsük a fodrászatban tartózkodó kliensek számát!

- (a) Adjuk meg a folyamat infinitezimális generátorát!
- (b) Adjuk meg az invariáns eloszlást!
- (c) A potenciális ügyfelek hányadrésze lesz ténylegesen ügyfél (azaz még be tud menni az üzletbe)?
- (d) Az idő hány százalékában dolgozik mindkét mester?
- (e) Az idő hány százalékában nincs senki a mestereken kívül a fodrászatban?
- (f) Tegyük fel, hogy bejutottunk. Mi a valószínűsége, hogy nincs előttünk várakozó ügyfél?
- (g) Tegyük fel, hogy bejutottunk. Mi a valószínűsége, hogy nem kell várakoznunk?
- (h) Átlagosan hányan vannak a fodrászatban?
- (i) Átlagosan hányan várakoznak?
- (j) Tegyük fel, hogy bejutottunk. Várhatóan mennyi idő alatt végzünk?
- (k) Ebből mennyi idő fordítódik várakozásra?

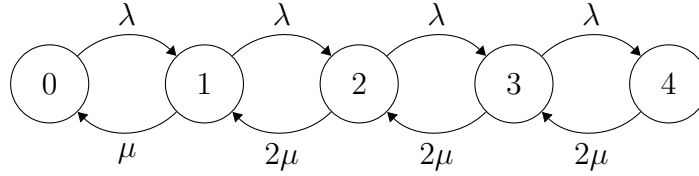
Megoldás:

A feladat szövege szerint az érkezési intenzitás $\lambda = 5$ vevő/óra, a kiszolgálási intenzitás pedig $\mu = 4$ vevő/óra (fodrászonként).

- (a) A fodrászatban legfeljebb ketten várakozhatnak, ehhez még hozzájön az a kettő, akit a két fodrász éppen emberi formára próbál hozni, ezért az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Az infinitezimális generátor:

$$A = \begin{bmatrix} * & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & * & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & * & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & * & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & * \end{bmatrix}.$$

A folyamat gráfja:



(b) A rendszerhez tartozó egyensúlyi egyenletek:

$$\begin{aligned}
 \lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 & \rightarrow \pi_1 &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 = 2\frac{\lambda}{2\mu}\pi_0 \\
 \lambda\pi_1 &= 2\mu\pi_2 & \rightarrow \pi_2 &= \frac{\lambda}{2\mu}\pi_1 = 2\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2\pi_0 \\
 \lambda\pi_2 &= 2\mu\pi_3 & \rightarrow \pi_3 &= \frac{\lambda}{2\mu}\pi_2 = 2\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^3\pi_0 \\
 \lambda\pi_3 &= 2\mu\pi_4 & \rightarrow \pi_4 &= \frac{\lambda}{2\mu}\pi_3 = 2\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^4\pi_0
 \end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy egy eloszlás elemeiről van szó:

$$\begin{aligned}
 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \\
 &= 2\pi_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\mu} + \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^4 \right)
 \end{aligned}$$

Behelyettesítés és egyszerűsítések után az eloszlás tagjai:

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \frac{2048}{7833} \approx 0.2615 \\
 \pi_1 &= \frac{2560}{7833} \approx 0.3268 \\
 \pi_2 &= \frac{1600}{7833} \approx 0.2043 \\
 \pi_3 &= \frac{1000}{7833} \approx 0.1277 \\
 \pi_4 &= \frac{625}{7833} \approx 0.0798
 \end{aligned}$$

(c) Akkor lesz valaki ténylegesen ügyfél, ha be is tud jutni, vagyis akkor érkezik, amikor négynél kevesebben vannak benn. Ez az idő $1 - \pi_4$ -ed részében (kb. 92%-ában) fordul elő, tehát a potenciális ügyfelek átlagosan 92%-ából lesz ténylegesen ügyfél.

(d) Akkor dolgozik mindkét mester, ha legalább ketten vannak a fodrázatban. Ennek valószínűsége:

$$P(\text{legalább ketten}) = \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = \frac{3225}{7833} \approx 0.4117$$

Tehát átlagosan az idő kb. 41%-ában dolgoznak mindketten.

(e) $P(\text{senki}) = \pi_0 \approx 0.2615$, az idő kb. 26%-ában nincs vendég a fodrászatban.

(f) Tegyük fel, hogy bejutottunk. Mi a valószínűsége, hogy nincs előttünk várakozó vendég?

$$\begin{aligned} P(\text{nincs várakozó} \mid \text{bejutottunk}) &= \frac{P(\text{bejutottunk és nincs várakozó})}{P(\text{bejutottunk})} \\ &= \frac{\pi_0 + \pi_1 + \pi_2}{1 - \pi_4} = \frac{776}{901} \approx 0.8613. \end{aligned}$$

(g) Tegyük fel, hogy bejutottunk. Mi a valószínűsége, hogy nem kell várakoznunk?

$$\begin{aligned} P(\text{nem kell várni} \mid \text{bejutottunk}) &= \frac{P(\text{bejutottunk és nem kell várni})}{P(\text{bejutottunk})} \\ &= \frac{\pi_0 + \pi_1}{1 - \pi_4} = \frac{576}{901} \approx 0.6393. \end{aligned}$$

(h) Átlagosan hányan vannak a fodrászatban?

$$E(N) = \sum_{k=1}^4 k\pi_k = \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4 = \frac{11260}{7833} \approx 1.4375.$$

(i) Átlagosan hányan várakoznak?

$$E(N_w) = \sum_{k=3}^4 (k-2)\pi_k = \pi_3 + 2\pi_4 = \frac{2250}{7833} \approx 0.2872.$$

(j) Tegyük fel, hogy bejutottunk. Várhatóan mennyi idő alatt végzünk?

Megint a Little-formula alapján dolgozhatunk, a tényleges vendégek érkezési intenzitása: $\lambda' = \lambda(1 - \pi_4) = 5 \cdot 0.9202 = 4.601$.

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda'} = 0.3124 \text{ óra} = 18.75 \text{ perc.}$$

(k) Ebből mennyi idő fordítódik várakozásra?

$$E(T_w) = \frac{E(N_w)}{\lambda'} = 0.0624 \text{ óra} = 3.75 \text{ perc.}$$

Figyeljük meg, hogy $E(T)$ és $E(T_w)$ különbsége most is egy átlagos kiszolgálás ideje (15 perc).