

Stacionárius folyamatok

1 Várható érték és korreláció

Amikor valószínűségi változókat vizsgálunk, akkor gyakran próbáljuk egy-két számértékbe sűríteni a valószínűségi változók legfontosabb tulajdonságait. Ilyen számérték például a várható érték és szórás. Több valószínűségi változó esetén a külön-külön történő vizsgálat, jellemzés mellett fontos szerepet kap az is, hogy a valószínűségi változók hogyan függenek egymástól. Ha ismerjük az egyik értékét, akkor meg tudjuk-e mondani a másikat? Vagy legalább tudunk-e pontosabb becslést adni arra, hogy nagy valószínűséggel milyen határok közé esik? Például ha valakinek ismerjük a magasságát, akkor ez mennyi többlet információt jelent, ha testsúlyát szeretnénk megtippelni?

Először nézzük a várható érték fogalmát. A sztochasztikus folyamat azt jelenti, hogy a folyamat állapotát minden egyes időpontban egy-egy valószínűségi változó írja le. Minden egyes valószínűségi változónak meghatározhatjuk a várható értékét, így minden egyes időponthoz tartozni fog egy-egy várható érték. Ezek már nem valószínűségi változók, hanem determinisztikus értékek, egy az ebből kapott függvény is determinisztikus lesz:

Az X_t sztochasztikus folyamat várhatóérték-függvénye a következő determinisztikus függvény:

$$\mu_X(t) = E[X_t].$$

A folyamat várható érték függvénye jellemzi a folyamat átlagos időbeli lefutását. Ehhez hasonlóan meghatározhatjuk minden egyes időpontban X_t szórását (vagy szórásnégyzetét, idegen kifejezéssel élve a varianciáját). Ehelyett inkább az úgynevezett

autokovariancia függvényt adjuk meg. *Auto*, mert a folyamat saját magával vett kapcsolatát nézzük, *kovariancia*, mert azt nézzük, hogy mennyire változnak együtt a folyamat értékei. Két valószínűségi változó esetén a kovarianciájuk ($\text{Cov}(X, Y)$) azt jelzi, hogy az X valószínűségi változó mennyi információt ad az Y -ra vonatkozólag. Amikor ez az érték nagy, akkor az X -re vonatkozó megfigyelés ismeretében pontosabban be tudjuk határolni Y értékét, ellenben ha a kovariancia kicsi (közel nulla), akkor az egyik értékéből nem igazán lehet következtetni a másik értékére.

Sztochasztikus folyamatok esetében a két valószínűségi változót a folyamathoz különböző időpontokban tartozó valószínűségi változók jelentik. Tegyük fel, hogy a folyamathoz rendelt valószínűségi változók közötti kapcsolatot adott τ időeltolás mellett vizsgáljuk, vagyis azt nézzük, hogy milyen kapcsolat van a t és a $t + \tau$ időpontban felvett értékek között (és ezt minden lehetséges t -re elvégezzük). Ennek a kapcsolatnak az időbeli (t szerinti) lefutását az autokovariancia függvény adja meg:

Az X_t sztochasztikus folyamat autokovariancia függvénye:

$$C_X(t, \tau) = \text{Cov}[X_t, X_{t+\tau}] = E[X_t \cdot X_{t+\tau}] - E[X_t] E[X_{t+\tau}].$$

Figyeljük meg, hogy $\tau = 0$ esetén az autokovariancia függvény éppen a t időponthoz tartozó X_t valószínűségi változó szórásnégyzete (varianciája), ugyanis

$$C_X(t, 0) = E[X_t \cdot X_t] - E[X_t] E[X_t] = E[X_t^2] - E^2[X_t] = D^2[X_t].$$

Az autokovariancia függvényhez szorosan kapcsolódik az autokorrelációs függvény: *Az X_t sztochasztikus folyamat autokorrelációs függvénye:*

$$R_X(t, \tau) = E[X_t \cdot X_{t+\tau}].$$

Vegyük észre, hogy az autokovariancia és az autokorrelációs függvényre fennáll, hogy

$$C_X(t, \tau) = R_X(t, \tau) - \mu_X(t)\mu_X(t + \tau).$$

Természetesen felmerülhet az a kérdés, hogy ha $C_X(t, \tau)$ és $R_X(t, \tau)$ között ilyen szoros kapcsolat van, akkor mi szükség van mindkettőre. A válasz az, hogy az autokovariancia függvény hasznosabb, ha X_t ismeretében $X_{t+\tau}$ értékét akarjuk előrejelezni, másrészt $R_X(t, \tau)$ a jelteljesítmény meghatározásánál játszik fontos szerepet.

Példa

Egy digitális szűrő bemenete független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata: $\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots$. A valószínűségi változókra fennáll, hogy várható értékük $E[X_i] = 0$ és szórásnégyzetük $D^2[X_i] = 1$. A kimenet szintén valószínűségi változók sorozata: $\dots, Y_{-1}, Y_0, Y_1, \dots$. A bemenet és a kimenet közötti kapcsolatot a következő formula adja meg:

$$Y_n = X_n + X_{n-1}$$

Határozzuk a kimenet várható érték függvényét, autokovariancia és autokorrelációs függvényét!

Megoldás

Mivel összeg várható értéke a várható értékek összege, ezért

$$\mu_Y(n) = E[Y(n)] = E[X_n + X_{n-1}] = E[X_n] + E[X_{n-1}] = 0 + 0 = 0.$$

Tudjuk, hogy *független* valószínűségi változók esetén a szorzatuk várható értéke megegyezik a várható értékek szorzatával. Ebből azonnal adódik, hogy független valószínűségi változók kovarianciája nulla. Továbbá a feladatban

$$C_X(n, k) = E[X_n \cdot X_{n+k}] - E[X_n] \cdot E[X_{n+k}] = E[X_n \cdot X_{n+k}]$$

, mert $E[X_n] = 0$. Mivel a feladat szerint X_n független valószínűségi változók sorozata, ezért

$$C_X(n, k) = E[X_n \cdot X_{n+k}] - E[X_n] \cdot E[X_{n+k}] = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = 0, \\ 0 & \text{ha } k \neq 0. \end{cases}$$

Az Y_n autokovariancia függvénye (kihasználva, hogy $E[Y(n)] = 0$, valamint azt, hogy $E[X_n \cdot X_{n+k}] = C_X(n, k)$):

$$\begin{aligned} C_Y(n, k) &= E[Y_n \cdot Y_{n+k}] - E[Y_n] \cdot E[Y_{n+k}] = E[Y_n \cdot Y_{n+k}] \\ &= E[(X_n + X_{n-1}) \cdot (X_{n+k} + X_{n+k-1})] \\ &= E[X_n \cdot X_{n+k} + X_{n-1} \cdot X_{n+k} + X_n \cdot X_{n+k-1} + X_{n-1} \cdot X_{n+k-1}] \\ &= E[X_n \cdot X_{n+k}] + E[X_{n-1} \cdot X_{n+k}] + E[X_n \cdot X_{n+k-1}] + E[X_{n-1} \cdot X_{n+k-1}] \\ &= C_X(n, k) + C_X(n-1, k+1) + C_X(n, k-1) + C_X(n-1, k) \end{aligned}$$

A $C_Y(n, k)$ -ra kapott kifejezést kell kiértékelnünk minden k -ra. Tudjuk, hogy $C_X(n, k) = 0$, ha $k \neq 0$.

- Ha $|k| > 1$, akkor sem k , sem $k+1$, sem pedig $k-1$ nem lesz nulla, tehát ekkor a teljes jobb oldal nulla, vagyis $C_Y(n, k) = 0$.
- Ha $k = 0$, akkor

$$\begin{aligned} C_Y(n, 0) &= C_X(n, 0) + C_X(n-1, 1) + C_X(n, -1) + C_X(n-1, 0) \\ &= 1 + 0 + 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$

- Ha $k = -1$, akkor

$$\begin{aligned} C_Y(n, -1) &= C_X(n, -1) + C_X(n-1, 0) + C_X(n, -2) + C_X(n-1, -1) \\ &= 0 + 1 + 0 + 0 = 1. \end{aligned}$$

- Ha $k = 1$, akkor

$$\begin{aligned} C_Y(n, 1) &= C_X(n, 1) + C_X(n-1, 2) + C_X(n, 0) + C_X(n-1, 1) \\ &= 0 + 0 + 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

Mindezeket összerakva Y_n autokovariancia függvénye a következő:

$$C_Y(n, k) = \begin{cases} 2 & \text{ha } k = 0, \\ 1 & \text{ha } k = \pm 1, \\ 0 & \text{minden más esetben} \end{cases}$$

Az autokorrelációs függvény meghatározásához használjuk fel, hogy $C_X(n, k) = R_X(n, k) - E[X_n]E[X_{n+k}]$, azaz $R_X(n, k) = C_X(n, k) + E[X_n]E[X_{n+k}]$. De tudjuk, hogy a feladatban $E[X_n] = 0$, ezért $R_X(n, k) = C_X(n, k)$, tehát most az autokorrelációs függvény és az autokovariancia függvény megegyezik.

2 Stacionárius folyamatok

Egy sztochasztikus folyamatban minden egyes időpillanatban egy-egy valószínűségi változó írja le a folyamat lehetséges állapotait. Ilyen módon minden egyes t időponthoz tartozik egy X_t valószínűségi változó (diszkrét esetben n időponthoz X_n). Legyen ennek a valószínűségi változónak a sűrűségfüggvénye $f_{X_t}(x)$. Ez a sűrűségfüggvény

általában függ t -től (például, ha a napi hőmérsékleteket vizsgáljuk, akkor télen alacsonyabb értékeket várunk és kapunk).

A sztochasztikus folyamatok egy fontos osztályában $f_{X_t}(x)$ nem függ t -től, tetszőleges τ időeltolásnál ugyanaz lesz a sűrűségfüggvény, vagyis a $t + \tau$ időpillanathoz tartozó sűrűségfüggvény megegyezik a t -hez tartozóval:

$$f_{X_t}(x) = f_{X_{t+\tau}}(x)$$

Stacionárius folyamatok esetén a folyamat statisztikai tulajdonságai nem változnak időben. A fenti egyenlőség ehhez szükséges, de még nem elegendő feltétel. Mivel egy sztochasztikus folyamat statisztikai tulajdonságait az $[X_{t_1}, \dots, X_{t_m}]$ valószínűségi vektorváltozók együttes eloszlása (együttes sűrűségfüggvénye) írja le minden lehetséges m és $t_1, \dots, t_m$ esetén, ezért a stacionaritás folyamatot a következőképpen definiáljuk:

Az X_t sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor stacionárius, ha minden lehetséges m és $t_1, \dots, t_m$ esetén, valamint minden lehetséges τ időeltolásra teljesül, hogy az együttes sűrűségfüggvény invariáns az időeltolásra, azaz

$$f_{X_{t_1}, \dots, X_{t_m}}(x_1, \dots, x_m) = f_{X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_m+\tau}}(x_1, \dots, x_m)$$

A stacionárius folyamatok időinvarianciájának számos következménye van: a várható érték minden pillanatban ugyanaz, az autokovariancia és az autokorreláció csak a τ időeltolástól függ.

Az X_t stacionáris sztochasztikus folyamat esetén a várható értékre, az autokovarianciára és az autokorrelációs függvényre fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \mu_X & (\text{konstans, nem függ } t\text{-től}) \\ R_X(t, \tau) &= R_X(0, \tau) = R_X(\tau) & (\text{csak } \tau\text{-tól függ, } t\text{-től nem}) \\ C_X(t, \tau) &= R_X(\tau) - \mu_X^2 = C_X(\tau) & (\text{csak } \tau\text{-tól függ, } t\text{-től nem}) \end{aligned}$$

A fenti egyenlőségeket bizonyítása:

- A stacionárius folyamat definíciója szerint, ha X_t stacionáris, akkor a t időponthoz tartozó sűrűségfüggvény ugyanaz, mint a 0-hoz tartozó. Ezzel

$$\mu_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_t}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_0}(x) dx = \mu_X(0)$$

$\mu_X(0)$ konstans (a 0 időponthoz tartozó várható érték), jelölhetjük μ_X -szel.

•

$$\begin{aligned} R_X(t, \tau) &= E[X_t X_{t+\tau}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X_t, X_{t+\tau}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X_0, X_\tau}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = R_X(0, \tau) = R_X(\tau) \end{aligned}$$

- Végül

$$C_X(t, \tau) = R_X(t, \tau) - \mu_X^2 = R_X(\tau) - \mu_X^2 = C_X(\tau)$$

3 Másodrendben gyengén stacionárius folyamatok

A gyakorlati alkalmazásokban sokszor nem ismert a rendszer vagy folyamat teljes valószínűségi modellje, de számottevő eredményt elérhetünk részleges információkkal is. Ezek a részleges információk általában statisztikai mérőszámok: várható érték, szórás, kovariancia, korreláció. ha ezek a folyamatra nézve kielégítik a stacionaritás feltételeit, akkor a folyamatot *másodrendben gyengén stacionáriusnak* vagy *gyengén stacionáriusnak* vagy *tágabb értelemben stacionáriusnak* nevezzük. Azaz

Az X_t sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor másodrendben gyengén stacionárius, ha

$$E[X_t] = \mu_X \quad (\text{konstans, nem függ } t\text{-től})$$

$$R_X(t, \tau) = R_X(0, \tau) = R_X(\tau) \quad (\text{csak } \tau\text{-tól függ, } t\text{-től nem})$$

Vegyük észre, hogy a fentiekből következik a $C_X(t, \tau) = C_X(\tau)$ egyenlőség is.

Másodrendben gyengén stacionárius folyamat esetén a várható érték állandó (nme túl izgalmas), viszont az autokorrelációs függvény ($R_X(\tau)$) rendelkezik néhány érdekes tulajdonsággal:

Ha X_t másodrendben gyengén stacionárius sztochasztikus folyamat, akkor az $R_X(\tau)$ autokorrelációs függvényre fennáll, hogy

$$\begin{aligned} R_X(0) &\geq 0 \\ R_X(\tau) &= R_X(-\tau) \\ |R_X(\tau)| &\leq R_X(0) \end{aligned}$$

A fentiek bizonyítása:

- Tudjuk, hogy

$$R_X(0) = R_X(t, 0) = E[X_t^2].$$

Mivel $X_t^2 \geq 0$, ezért $E[X_t^2] \geq 0$.

-

$$R_X(\tau) = R_X(t, \tau) = E[X_t X_{t+\tau}] = E[X_{t+\tau} X_t] = R_X(t + \tau, -\tau)$$

Mivel X_t gyengén stacionárius, ezért $R_X(t + \tau, -\tau) = R_X(-\tau)$, következésképpen $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$.

- Az utolsó igazolása egy kicsit több munkát igényel. Tudjuk, hogy

$$C_X(t, \tau) = E[X_t X_{t+\tau}] - E[X_t] E[X_{t+\tau}].$$

Ebből pedig

$$C_X(t, 0) = E[X_t X_t] - E[X_t] E[X_t] = D^2(X_t).$$

Mivel gyengén stacionárius folyamatról van szó, ezért az autokovariancia függvény nem függ az időtől (t), csak az időeltolástól (τ), így $D^2(X_t) = C_X(0)$. Továbbá ismert két valószínűségváltozó kovarianciájára, hogy $Cov(X, Y) \leq D(X)D(Y)$. Ebből következik, hogy $C_X(t, \tau) \leq D(X_t)D(X_{t+\tau})$. A gyenge stacionaritás miatt $D(X_t)D(X_{t+\tau}) = D(X_t)D(X_t) = D^2(X_t) = C_X(0)$. Tehát

$$C_X(t, \tau) \leq C_X(0)$$

Ebból pedig

$$\left(\underbrace{C_X(t, \tau) + \mu_X^2}_{R_X(t, \tau) = R_X(\tau)} \right)^2 \leq \left(\underbrace{C_X(0) + \mu_X^2}_{R_X(0)} \right)^2$$

$$R_X^2(\tau) \leq R_X^2(0)$$

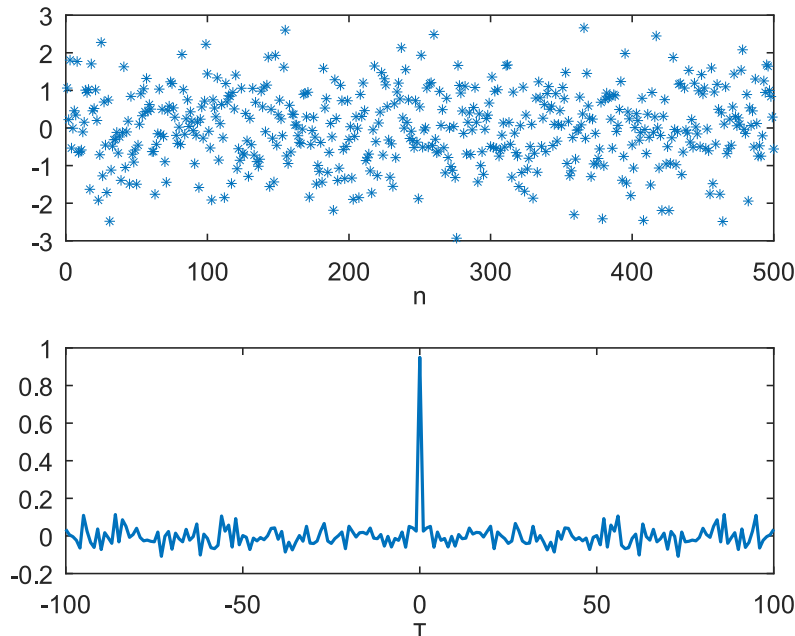
$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$$

4 Numerikus példák

Legyen X_n független, standard normális eloszlású (azaz olyan normális eloszlású, melynek várható értéke 0 és szórása 1) valószínűségi változók sorozata. Ekkor

$$\mu_X = 1 \text{ és } R_X(0) = 1$$

, mert $R_X(0) = E[X_n^2] = D^2(X_n) + E^2[X_n] = 1$. Mivel X_n független valószínűségi változók sorozata, ezért $E[X_n X_{n+k}] = E[X_n] \cdot E[X_{n+k}] = 0 \cdot 0 = 0$. Ebből az következik, hogy $k \neq 0$ -ra $R_X(k) = 0$. Alább látható a folyamat egy realizációja és az abból számolt autokorrelációs függvény.



Generáljunk az előző X_n sztochasztikus folyamatból más folyamatokat. Először legyen

$$Y_n = X_n + X_{n-1}$$

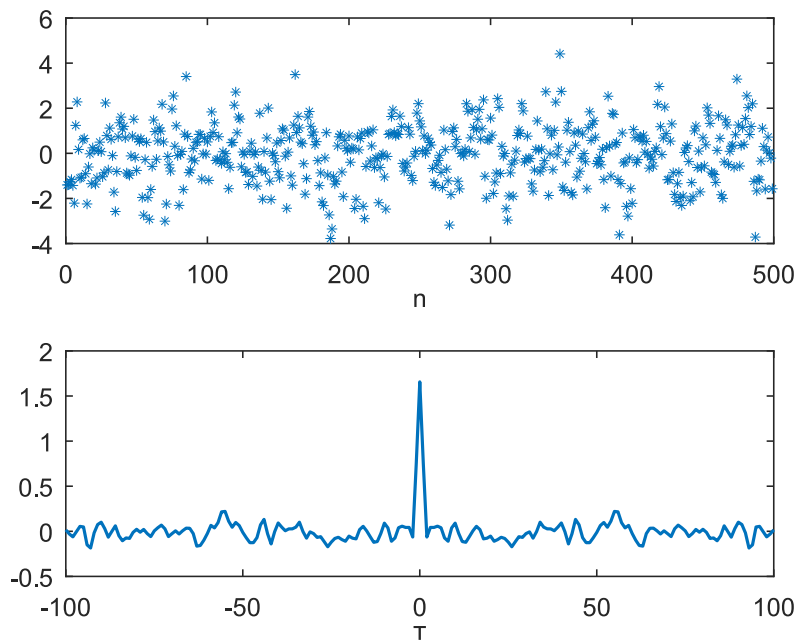
Ekkor

$$E[Y_n] = E[X_n + X_{n-1}] = E[X_n] + E[X_{n-1}] = 0 + 0 = 0.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} R_Y(0) &= E[Y_n^2] = E[(X_n + X_{n-1})^2] = E[X_n^2 + X_{n-1}^2 + 2X_nX_{n-1}] \\ &= E[X_n^2] + E[X_{n-1}^2] + E[2X_nX_{n-1}] = 1 + 1 + 0 = 2. \end{aligned}$$

Bár itt már nem teljesen függetlenek a folyamat egymást követő értékei, még mindig nem vehető ki valamiféle mintázat. Továbbá a korrelációs függvény értéke most is nagyon gyorsan lecsökken a nullát elhagyva.



Menjünk egy kicsit tovább, legyen most Y_n értéke mindig X_n tíz elemének összege, azaz

$$Y_n = X_n + X_{n-1} + \dots + X_{n-9}$$

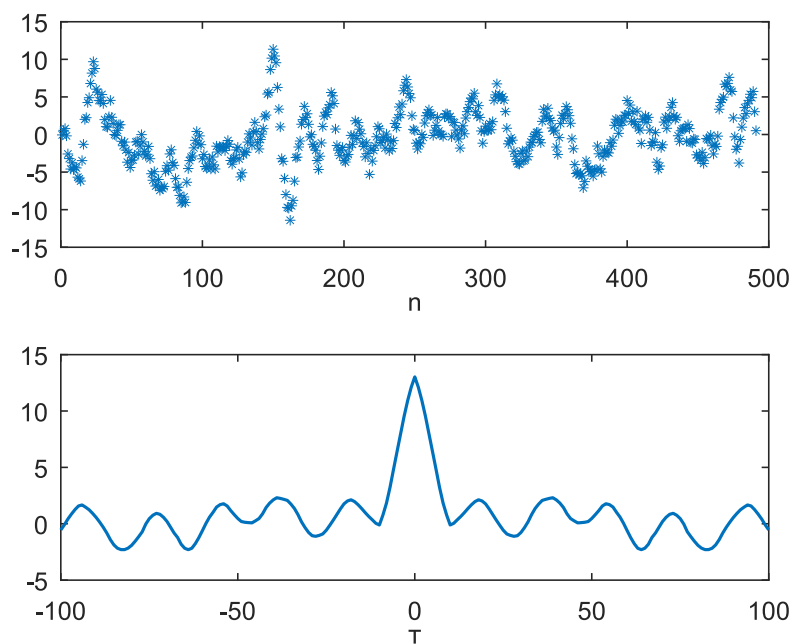
Ekkor

$$E[Y_n] = E[X_n + X_{n-1} + \dots + X_{n-9}] = E[X_n] + \dots + E[X_{n-9}] = 0 + \dots + 0 = 0.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} R_Y(0) &= E[Y_n^2] = E[(X_n + \dots + X_{n-9})^2] \\ &= E[X_n^2 + \dots + X_{n-9}^2 + 2X_nX_{n-1} + \dots + 2X_nX_{n-9}] \\ &= E[X_n^2] + \dots + E[X_{n-9}^2] + E[2X_nX_{n-1}] + \dots + E[2X_nX_{n-9}] \\ &= 1 + \dots + 1 + 0 + \dots + 0 = 10. \end{aligned}$$

A folyamat egy realizációja és az abból számolt autokorrelációs függvény:



Végül nézzük meg, hogy mi a helyzet, ha 30 elemet adunk össze:

$$Y_n = \sum_{i=0}^{29} X_{n-i}$$

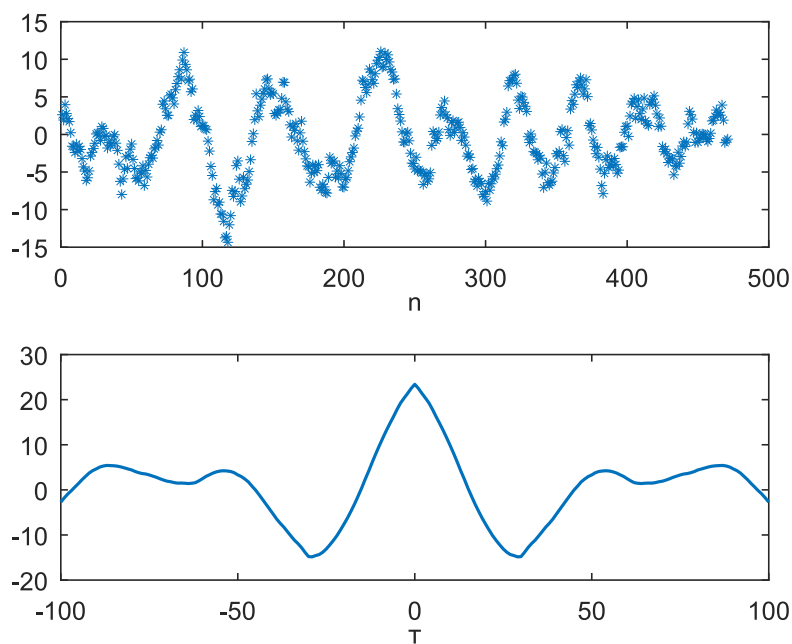
Az előzőekhez hasonlóan a várható érték:

$$E[Y_n] = E\left[\sum_{i=0}^{29} X_{n-i}\right] = \sum_{i=0}^{29} E[X_{n-i}] = 0 + \dots + 0 = 0$$

Az előző esetben látott módon meghatározhatjuk $R_Y(0)$ értékét:

$$R_Y(0) = E[Y_n^2] = E\left[\left(\sum_{i=0}^{29} X_{n-i}\right)^2\right] = 30$$

A folyamat egy realizációja és az abból számolt autokorrelációs függvény:



Kérdések

1. Az autokorrelációs függvényeken látható, hogy a nullánál felvett érték hol kisebb, hol nagyobb a számított értéknél. Miért?
2. Miért „hízott meg” az autokorrelációs függvény a nulla környékén?