

1. Egy Markov-lánc állapottere $S = \{1, 2, 3\}$, átmenetvalószínűség mátrixa pedig az alábbi:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix},$$

- a) $P(X_2 = 1 | X_0 = 2) = ?$
b) Legyen $X_0 = 2$. Átlagosan hány lépés múlva leszünk újra a 2-es állapotban?
c) Legyen a kezdeti eloszlás $\varphi_0 = [1/4, 1/2, 1/4]$. $P(X_3 = 1, X_1 = 2) = ?$
2. Egy Markov-lánc állapottere legyen $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, átmenetvalószínűség mátrixa pedig

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/6 & 1/6 & 1/12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 7/8 \end{bmatrix},$$

- a) Adjuk meg a Markov-lánc az osztályait! Melyek tranziensek és melyek rekurrenszek?
b) Tegyük fel, hogy az 2-esből indulunk. Mi a valószínűsége, hogy sok idő múlva ismét a 2-esben leszünk?
c) Tegyük fel, hogy a 4-esből indulunk. Mi a valószínűsége, hogy sok idő múlva ismét a 4-esben leszünk?
3. Szerencsejátékot játszunk, minden egyes menetben 0,51 valószínűséggel nyerünk egy egységet, 0,49 valószínűséggel pedig veszítünk ugyanennyit. Kezdetben nekünk 30 egységünk van, ellenfelünknek pedig 60. A játék addig tart, amíg valaki el nem veszíti az összes pénzét.
- a) Mi a valószínűsége, hogy nyerünk?
b) Ha az ellenfelünk választhatja meg a tét nagyságát, akkor mit érdemes választania?
c) Ekkor mekkora valószínűséggel nyernénk?
4. Egy tömegkiszolgáló rendszerbe Poisson-folyamat szerint jönnek az igények, óránként átlagosan 40. A kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, a kiszolgálás átlagosan 1 percet vesz igénybe.
- a) Az idő hányad részében van igény a rendszerben?
b) Mi a valószínűsége, hogy a rendszerben legalább három igény tartózkodik?
c) Mi a valószínűsége, hogy pontosan annyi igény van a rendszerben, amennyi a rendszerben tartózkodó igények számának várható értéke?
d) Mi a valószínűsége, hogy pontosan annyi igény várakozik, amennyi a várakozó igények számának várható értéke?
e) Átlagosan mennyi időt tölt egy igény a rendszerben?
f) Átlagosan mennyi időt tölt egy igény várakozással?
5. Egy kicsi boltban egyetlen eladó dolgozik, aki átlagosan 10 perc alatt szolgál ki egy ügyfelet. A potenciális vevők Poisson-folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 8. Sajnos az üzlet befogadóképessége kicsi, egyszerre mindössze négyen férnek be, beleértve azt is, akit éppen kiszolgál az eladó.
- a) Mi a valószínűsége, hogy legalább két vevő van a boltban?
b) A potenciális vevők hány százaléka nem jut be a boltba?
c) Átlagosan hány vevő van a boltban?
d) Átlagosan kb. mennyi időt tölt egy vevő a boltban?