

1. Egy Markov-lánc állapottere $S = \{1, 2, 3\}$, átmenetvalószínűség mátrixa pedig az alábbi:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

- a) $P(X_2 = 1 | X_0 = 2) = ?$
 b) Legyen $X_0 = 2$. Átlagosan hány lépés múlva leszünk újra a 2-es állapotban?
 c) Legyen a kezdeti eloszlás $\varphi_0 = [1/4, 1/2, 1/4]$. $P(X_3 = 1, X_1 = 2) = ?$

Megoldás:

- a) A válasz a P^2 mátrix (2,1) eleme.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/9 & 4/9 & 4/9 \\ 1/3 & 4/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/3 & 1/9 \end{bmatrix},$$

tehát $P(X_2 = 1 | X_0 = 2) = 1/3$.

- b) Ehhez először az invariáns eloszlást kell meghatározni:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 && \rightarrow \pi_2 = 2\pi_1 \\ \pi_2 &= \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_3 && \rightarrow \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_1 \\ \pi_3 &= \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_3 \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$:

$$1 = \pi_1 (1 + 2 + 1) \quad \rightarrow \pi_1 = \frac{1}{4}, \pi_2 = \frac{1}{2}, \pi_3 = \frac{1}{4}.$$

A válasz a kérdésre az invariáns eloszlás második elemének reciproka, azaz

$$E(T_{2 \rightarrow 2}) = \frac{1}{\pi_2} = 2.$$

- c)

$$\begin{aligned} P(X_3 = 1, X_1 = 2) &= \sum_{i=1}^3 P(X_3 = 1, X_1 = 2 | X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i=1}^3 \underbrace{P(X_3 = 1 | X_1 = 2)}_{P^2 \text{ (2,1) eleme}} \cdot \underbrace{P(X_1 = 2 | X_0 = i)}_{P \text{ második oszlopa}} \cdot \underbrace{P(X_0 = i)}_{\varphi_0 \text{ elemei}} \\ &= 1/3 \cdot \sum_{i=1}^3 P(X_1 = 2 | X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

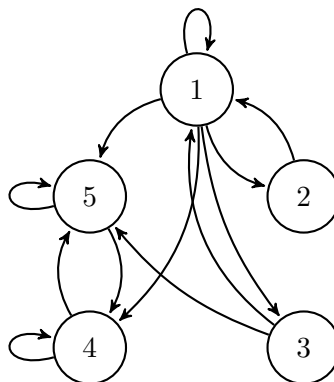
2. Egy Markov-lánc állapottere legyen $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, átmenetvalószínűség mátrixa pedig

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/6 & 1/6 & 1/12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 7/8 \end{bmatrix}.$$

- Adjuk meg a Markov-lánc az osztályait! Melyek tranziensek és melyek rekurrenszek?
- Tegyük fel, hogy az 2-esből indulunk. Mi a valószínűsége, hogy sok idő múlva ismét a 2-esben leszünk?
- Tegyük fel, hogy a 4-esből indulunk. Mi a valószínűsége, hogy sok idő múlva ismét a 4-esben leszünk?

Megoldás:

- Az átmeneti gráf a következő:



Ez alapján a következő osztályokat azonosíthatjuk: $\{1, 2, 3\}$ tranziens; $\{4, 5\}$ rekurrens.

- Mivel a 2-es tranziens állapot, ezért elegendően sok idő múlva már 1 valószínűséggel nem tartózkodhat ott a rendszer, tehát nulla annak a valószínűsége, hogy sok idő múlva ismét ott leszünk.
- A 4-es rekurrens állapot, tehát itt sok idő múlva is előfordulhatunk. Ennek a valószínűségét az invariáns eloszlásból kapjuk meg. Mivel a 4-esből indultunk, ezért a folyamat csak a $\{4, 5\}$ állapotokat veheti fel. Így nem teljes P -vel, hanem a $\{4, 5\}$ állapotok közötti átmenetvalószínűségeket leíró P' részmatrixszal kell számolnunk.

$$P' = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/8 & 7/8 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \pi_4 &= \frac{1}{3}\pi_4 + \frac{1}{8}\pi_5 & \rightarrow \pi_5 &= \frac{16}{3}\pi_4 \\ \pi_5 &= \frac{2}{3}\pi_4 + \frac{7}{8}\pi_5 \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $\pi_4 + \pi_5 = 1$:

$$1 = \pi_4 + \pi_5 = \pi_4 \left(1 + \frac{16}{3}\right) \rightarrow \pi_4 = \frac{3}{19}$$

Tehát sok idő múlva $3/19$ valószínűséggel leszünk a 4-esben.

3. Szerencsejátékot játszunk, minden egyes menetben 0.51 valószínűséggel nyerünk egy egységet, 0.49 valószínűséggel pedig veszítünk ugyanennyit. Kezdetben nekünk 30 egységünk van, ellenfelünknek pedig 60. A játék addig tart, amíg valaki el nem veszíti az összes pénzét.

- a) Mi a valószínűsége, hogy nyerünk?
- b) Ha az ellenfelünk választhatja meg a tét nagyságát, akkor mit érdemes választania?
- c) Ekkor mekkora valószínűséggel nyernénk?

Megoldás:

a)

$$P(\text{nyerünk}) = \frac{1 - \left(\frac{1 - 0.51}{0.51}\right)^{30}}{1 - \left(\frac{1 - 0.51}{0.51}\right)^{90}} \approx 0.7185.$$

- b) Mivel a játék az ellenfelünk számára kedvezőtlen, ezért számára az a jobb, ha minél nagyobb téttel játszunk. Mivel nekünk 30, neki pedig 60 egysége van, ezért 30 egység a legmagasabb tét, amivel lejátszható a játék, ezt célszerű választania.
- c) Ebben az esetben a nyerésünk valószínűsége a következő lenne (nekünk egy darab 30-asunk van, neki 2 darab 30-asa):

$$P(\text{nyerünk}) = \frac{1 - \left(\frac{1 - 0.51}{0.51}\right)}{1 - \left(\frac{1 - 0.51}{0.51}\right)^3} \approx 0.3468.$$

-
4. Egy tömegkiszolgáló rendszerbe Poisson-folyamat szerint jönnek az igények, óránként átlagosan 40. A kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, a kiszolgálás átlagosan 1 percet vesz igénybe.

- a) Az idő hányad részében van igény a rendszerben?
- b) Mi a valószínűsége, hogy a rendszerben legalább három igény tartózkodik?
- c) Mi a valószínűsége, hogy pontosan annyi igény van a rendszerben, amennyi a rendszerben tartózkodó igények számának várható értéke?
- d) Mi a valószínűsége, hogy pontosan annyi igény várakozik, amennyi a várakozó igények számának várható értéke?
- e) Átlagosan mennyi időt tölt egy igény a rendszerben?
- f) Átlagosan mennyi időt tölt egy igény várakozással?

Megoldás:

A feladat szövege alapján egy $M/M/1$ rendszerrel van dolgunk. Az érkezési intenzitás $\lambda = 40$ igény/óra, a kiszolgálási intenzitás pedig $\mu = 60$ igény/óra.

a) Annak a valószínűsége, hogy van igény a rendszerben:

$$P(\text{van igény}) = 1 - \pi_0 = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}.$$

Ennek alapján az idő $2/3$ -ad részében van igény a rendszerben.

b) Oldjuk meg a feladatot általánosan:

$$\begin{aligned} P(\text{legalább } k \text{ igény}) &= 1 - [\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_{k-1}] \\ &= 1 - \left[\pi_0 + \pi_0 \frac{\lambda}{\mu} + \dots + \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1} \right] \\ &= 1 - \pi_0 \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1} \right] = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k - 1}{\frac{\lambda}{\mu} - 1} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva az eredeti kérdésre a válasz:

$$P(\text{legalább 3 igény}) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 = \left(\frac{40}{60}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \approx 0.2963.$$

c) Először határozzuk meg a rendszerben tartózkodó igények számának várható értékét:

$$E(N) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{40}{60 - 40} = 2.$$

Annak a valószínűsége, hogy pontosan ennyi igény van a rendszerben:

$$P(\text{pontosan 2 igény}) = \pi_2 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 = \left(1 - \frac{40}{60}\right) \left(\frac{40}{60}\right)^2 = \frac{4}{27} \approx 0.1482.$$

d) Először határozzuk meg a várakozó igények számának várható értékét:

$$E(N_w) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{40}{60} \frac{40}{60 - 40} = \frac{4}{3}.$$

A várakozó igények tényleges száma mindig egész szám, ezért lehetetlen, hogy $4/3$ igény várakozzon, tehát ennek nulla annak a valószínűsége.

e)

$$E(T) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{60 - 40} = \frac{1}{20} \text{ óra} = 3 \text{ perc.}$$

f)

$$E(T_w) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{40}{60} \frac{1}{60 - 40} = \frac{1}{30} \text{ óra} = 2 \text{ perc.}$$

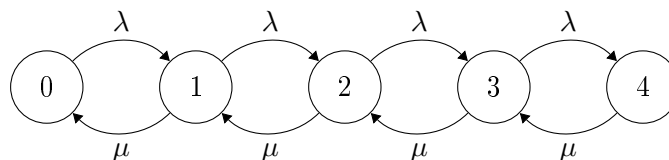
5. Egy kicsi boltban egyetlen eladó dolgozik, aki átlagosan 10 perc alatt szolgál ki egy ügyfelet. A potenciális vevők Poisson-folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 8. Sajnos az üzlet befogadóképessége kicsi, egyszerre mindössze négyen férnek be, beleértve azt is, akit éppen kiszolgál az eladó.

- Mi a valószínűsége, hogy legalább két vevő van a boltban?
- A potenciális vevők hány százaléka nem jut be a boltba?
- Átlagosan hány vevő van a boltban?
- Átlagosan kb. mennyi időt tölt egy vevő a boltban?

Megoldás:

A feladatban szereplő rendszer $M/M/1/4$. Az érkezési intenzitás $\lambda = 8$ vevő/óra, a kiszolgálási intenzitás pedig $\mu = 6$ vevő/óra. Mivel a rendszer befogadóképessége korlátos, így nem okoz gondot az, hogy $\lambda > \mu$, mert nem alakulhat ki végtelen hosszú sor.

- Az első kérdés megválaszolásához először az invariáns eloszlást kell meghatározni. A rendszer működését szemléltető gráf:



Az egyensúlyi egyenletek:

$$\begin{aligned}
 \lambda\pi_0 &= \mu\pi_1 & \rightarrow \pi_1 &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\
 \lambda\pi_1 &= \mu\pi_2 & \rightarrow \pi_2 &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0 \\
 \lambda\pi_2 &= \mu\pi_3 & \rightarrow \pi_3 &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \pi_0 \\
 \lambda\pi_3 &= \mu\pi_4 & \rightarrow \pi_4 &= \frac{\lambda}{\mu}\pi_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \pi_0
 \end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy egy eloszlás elemeiről van szó:

$$\begin{aligned}
 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = \pi_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \right) \\
 &= \pi_0 \left(1 + \frac{8}{6} + \left(\frac{8}{6}\right)^2 + \left(\frac{8}{6}\right)^3 + \left(\frac{8}{6}\right)^4 \right) = \pi_0 \frac{781}{81}
 \end{aligned}$$

Az eloszlás tagjai:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{81}{781} \approx 0.1037 \\ \pi_1 &= \frac{108}{781} \approx 0.1383 \\ \pi_2 &= \frac{144}{781} \approx 0.1844 \\ \pi_3 &= \frac{192}{781} \approx 0.2458 \\ \pi_4 &= \frac{256}{781} \approx 0.3278\end{aligned}$$

A válasz a kérdésre:

$$P(\text{legalább 2 vevő}) = 1 - (\pi_0 + \pi_1) = \frac{592}{781} \approx 0.7580.$$

- b) Egy potenciális vevő akkor nem jut be a boltba, ha olyankor érkezik, amikor a bolt tele van, azaz négy vevő tartózkodik bent. Annak a valószínűsége, hogy a bolt tele van $\pi_4 \approx 0.3278$, így hosszú távon átlagosan az idő 32,78%-ában van tele a bolt. Mivel a potenciális vevők függetlenül érkeznek, ezért hosszú távon 32,78%-ukból nem lesz ténylegesen vevő.

c)

$$E(N) = \sum_{k=1}^4 k \cdot \pi_k = \frac{108}{781} + 2 \cdot \frac{144}{781} + 3 \cdot \frac{192}{781} + 4 \cdot \frac{256}{781} = \frac{1996}{781} \approx 2.5557.$$

- d) A kérdés természetesen a tényleges vevőkre vonatkozik, vagyis azokra, akik bejutottak a boltba. Mivel az idő π_4 -ed részében a potenciális vevőből nem lesz vevő, ezért a tényleges vevők érkezési intenzitása $\lambda' = \lambda(1 - \pi_4)$, ezzel kell használnunk a Little-formulát:

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda'} = \frac{E(N)}{\lambda(1 - \pi_4)} = \frac{\frac{1996}{781}}{8 \cdot \left(1 - \frac{256}{781}\right)} = \frac{499}{1050} \approx 0.4752 \text{ óra} \approx 28 \text{ és fél perc.}$$