

2. Műveletek eseményekkel

Szükséges új ismeretek: *Események közötti műveletek és tulajdonságai. A valószínűség-számítás axiómái. Teljes eseményrendszer. Komplementer, különbség, összeg valószínűsége.*

Elméleti anyag, példák, kidolgozott feladatok: J1: 1. fejezet; J2: 2. fejezet.

- Egy szabályos dobókockával kétszer dobunk egymás után. Jelentse A azt az eseményt, hogy az első dobás eredménye páros, B pedig azt, hogy a második páros. Fejezzük ki az események betűjelével az alábbiakat:
 - a dobott számok összege páros,
 - a dobott számok szorzata páros,
 - a dobott számok különbsége páratlan,
 - a dobott számok mindegyike prímszám,
 - a dobott számok szorzata páratlan,
 - a dobott számok szorzata osztható négyel.
- Egy szabályos pénzérmét háromszor feldobunk. Ekkor a teljes eseménytér a következő lesz (F : fej, I : írás):
 $\Omega = \{FFF, FFI, FIF, IFF, FII, IFI, IIF, III\}$. Írjuk le szavakkal Ω alábbi részhalmazait!
 - $\{FFF, FFI, FIF, FII\}$,
 - $\{FIF, FII, III, IIF\}$,
 - $\{FFF, FFI, FIF, IFF\}$,
 - $\{IFI, FII, IIF\}$.
- Jelentse A azt az eseményt, hogy egy gyár 3%-nál kisebb selejtaránnyal dolgozik, B pedig azt, hogy 2%-nál kisebb selejtaránnyal dolgozik. Mit jelentek az alábbiak?
 - $A + B$
 - $A \cdot B$
 - $A - B$
 - $B - A$
- Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre fennáll, hogy $(A - C) \cdot (B - C) = A \cdot B - C$!
- Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C, D eseményekre fennáll, hogy $\overline{A \cdot B + C \cdot D} = (\overline{A} + \overline{B}) \cdot (\overline{C} + \overline{D})$!
- Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C eseményekre fennáll, hogy $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$!
- Igazoljuk, hogy tetszőleges A és B eseményekre fennáll, hogy $A - (A - B) = B - (B - A)$!
- Legyen az A esemény valószínűsége 0,7, a B esemény valószínűsége 0,5, az együttes bekövetkezés valószínűsége pedig 0,4. Határozzuk meg az alábbiakat:
 - $P(\overline{A})$
 - $P(A + B)$
 - $P(A - B)$
 - $P(B - A)$
 - $P(\overline{A} + \overline{B})$
 - $P(\overline{A} + B)$
 - $P(A \cdot \overline{B})$
 - $P(\overline{A} - \overline{B})$
- Egy szabályos pénzérmét háromszor feldobunk. Az alábbiak közül melyek alkotnak teljes eseményrendszert?
 - A_1 : dobunk fejet, A_2 : nem dobunk fejet.
 - A_1 : dobunk fejet, A_2 : dobunk írást.
 - A_i : pontosan i darab fejet dobunk, $i = 0, 1, 2, 3$.
 - A_1 : nem dobunk fejet, A_2 : nem dobunk írást.
- Hálivúd lakóinak 30%-a gazdag, 20%-a szép, 16%-a pedig gazdag és szép. Véletlenszerűen kiválasztunk egy lakost. Mi a valószínűsége, hogy ő
 - nem gazdag?
 - gazdag, de nem szép?
 - gazdag vagy szép (legalább az egyik)?
 - se nem gazdag, se nem szép?

11. Tetszőleges A és B esemény esetén határozzuk meg az alábbi valószínűségeket:

$$(a) P(A + \bar{A} + B \cdot \bar{B} - A \cdot \bar{B}) \quad (b) P(A \cdot B \cdot (A + B) + \bar{A} + \bar{\Omega}) \quad (c) P(A \cdot (B - \overline{B - A}))$$

12. Legyen $B \subset A$, és $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$. Határozzuk meg az alábbiakat:

$$(a) P(A \cdot B) \quad (b) P(A + B) \quad (c) P(A - B) \quad (d) P(B - A)$$

13. Legyen $B \subset A$, és $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,3$. Határozzuk meg az alábbiakat:

$$(a) P(\bar{A} \cdot B) \quad (b) P(\overline{A + B}) \quad (c) P(A - \bar{B}) \quad (d) P(\bar{B} - A)$$

14. Legyen az A esemény valószínűsége 0,6, a B esemény valószínűsége pedig 0,2. Azt is tudjuk még, hogy $P(A + B) = 0,7$. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét:

$$(a) \bar{A} - \overline{A \cdot B} \quad (b) \Omega - \overline{\bar{A} \cdot B} \quad (c) \bar{B} + A \cdot \bar{B} \quad (d) A - \overline{\overline{A - A - \bar{B}}}$$

15. Fejezzük ki az ismeretlen X eseményt az A és B események segítségével: $\overline{X + A} + \overline{X + \bar{A}} = B$!

16. Igazoljuk, hogy tetszőleges A és B eseményekre fennáll az, hogy $P(A \cdot B) \geq P(A) + P(B) - 1$!

17. Bizonyítsuk be, hogy $P(A_1 + \dots + A_n) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$! (BOOLE-egyenlőtlenség)

18. Bizonyítsuk be, hogy $P(A_1 + \dots + A_n) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cdot A_j)$! (BONFERRONI-egyenlőtlenség)