

3. A klasszikus valószínűségi mező; Feltételes valószínűség

Szükséges új ismeretek: *A klasszikus valószínűségi mező fogalma. Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel. A feltételes valószínűség fogalma. A teljes valószínűség tétele és a Bayes-tétel.*

Elméleti anyag, példák, kidolgozott feladatok: *J1: 2. és 3. fejezet; J2: 3. és 4. fejezet.*

A klasszikus valószínűségi mező

1. A 32 lapos magyar kártyából 5 lapot húzunk visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy
 - (a) nincs közöttük piros;
 - (b) van közöttük piros,
 - (c) pontosan két piros van közöttük;
 - (d) legalább két piros van közöttük?
2. Mi a válasz az előző feladatban szereplő kérdésekre, ha visszatevéssel húzunk?
3. Egy dobozban 20 izzó van, ezek közül 6 rossz. Mi a valószínűsége, hogy sosem húzunk ki rosszat, ha 4-szer húzunk
 - (a) visszatevéssel,
 - (b) visszatevés nélkül?
4. n golyó közül k piros. Mi a valószínűsége, hogy a pirosat sosem húzzuk ki, ha r -szer húzunk
 - (a) visszatevéssel,
 - (b) visszatevés nélkül ($k \geq r$)?
5. Egy 12 fős társaság focizás előtt teljesen véletlenszerűen két csapatra oszlik. Mi annak a valószínűsége, hogy Dezső és Béla egy csapatba kerülnek? Mi a válasz n fős társaság esetén?
6. Egy sakktáblára véletlenszerűen felrakunk 2 bástyát. Mi a valószínűsége, hogy a bástyák nem ütik egymást?
7. Oldjuk meg az előző feladatot n bástyával is!
8. Határozzuk meg az alábbiak valószínűségét:¹
 - (a) Egy kockával 4-szer dobva a dobott számok között lesz hatos.
 - (b) Két kockával 24-szer dobva a dobott számok között lesz dupla hatos.
9. Egy szabályos dobókockát kétszer feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok maximuma 5? Oldjuk meg a feladatot n dobás esetére is!
10. Egy szabályos pénzérmét dobálunk addig, amíg a FF vagy a FI mintázat meg nem jelenik. Melyiknek nagyobb a valószínűsége?
11. Mekkora annak valószínűsége, hogy az ötöslottón
 - (a) a heti nyerőszámok mindegyike páros szám lesz?
 - (b) a nyerőszámokat emelkedő számsorrendben húzzák ki?
12. Két ember (tiltott) szerencsejátékot játszik egymással. A játék hat nyert játszmaig tart, minden egyes játszmat 0,5 – 0,5 valószínűséggel nyernek meg a felek. 5 : 3-as állásnál a játékot hirtelen félbe kell szakítani razzia miatt. Hogyan kellene igazságosan szétosztani a tétet?²
13. Zenés-táncos eszméletvesztést (ún. bulit) tartanak az egyetemen. A vidám körülmények folytán távozáskor mindenki véletlenszerűen kap fel magára egy kabátot az összes közül. Mi a valószínűsége, hogy ennek ellenére legalább egy valaki a sajátját veszi fel?

¹A XVII. században élt DE MÉRÉ lovag így gondolkodott: a hatos valószínűsége egy kockával dobva hatszor annyi, mint a dupla hatosé két kockával dobva, továbbá a 24 éppen hatszorosa a 4-nek, ezért a két valószínűség-nek egyenlőnek kellene lennie.

²A feladat nyomtatásban először 1494-ben jelent meg Velencében, FRA LUCA PACCIOLOI könyvében. A helyes megoldást 1654-ben egymástól függetlenül találta meg FERMAT és PASCAL.

Feltételes valószínűség

13. Legyen $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$ és $P(AB) = 0,5$. Határozzuk meg az alábbiakat:

- (a) $P(A|B)$ (b) $P(B|A)$ (c) $P(A \cdot B | A + B)$ (d) $P(A + B | \overline{A} + \overline{B})$

14. Tételezzük fel, hogy minden születendő gyermek $1/2$ valószínűséggel lány, $1/2$ valószínűséggel fiú lesz.

- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy kétgyermekes családban mindkét gyermek lány?
(b) Feltéve, hogy tudjuk, hogy az egyik gyermek lány, mi a valószínűsége annak, hogy mindkettő lány?

15. * Tekintsük az előző feladatot. Feltéve, hogy az egyik gyermeket Annának hívják, mi a valószínűsége annak, hogy mindkét gyermek lány? (Lehet-e itt pontos választ adni? Mi lesz most az eseménytér? Mit tudunk az egyes események valószínűségéről? Hogyan lehetne az ismeretlen valószínűségeket becsülni?)

16. Egy betegség a fiataloknál 1%-os, a középkorúaknál 2%-os, míg az időseknel 10%-os valószínűséggel lép fel. A lakosság 30%-a fiatal, 50%-a középkorú és 20% pedig idős. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy beteg?

17. Egy tesztkérdésre négy válasz van megadva, melyek közül csak az egyik helyes. A kérdésre a vizgázó 0,6 valószínűséggel tudja a helyes választ, egyébként pedig azonos valószínűséggel választ egyet a lehetséges válaszok közül.

- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy helyesen válaszol?
(b) Mi a valószínűsége annak, hogy azért válaszolt helyesen, mert tényleg tudta a helyes választ?

18. A 40 és 50 év közötti nőknél végzett mammográfiás vizsgálat módszeréről tudjuk, hogy a betegség jelenlétekor az esetek 10%-ában nem jelez betegséget, viszont az esetek 7%-ában akkor is betegséget jelez, ha az nincs jelen. Tudjuk azt is, hogy az adott populációban a mellrák előfordulási aránya 0,8%. Feltéve, hogy a teszt mellrákot jelez, mi a valószínűsége, hogy valóban ebben a betegségben szenved az illető? Hogyan változna a válasz, ha a betegség előfordulási aránya 8 % vagy 80 % lenne?

19. Egy termék minősítésekor a következő hibákat követik el: első osztályú terméket 0,15 valószínűséggel másodosztályúnak minősítenek, másodosztályú terméket 0,05 valószínűséggel első osztályúnak minősítenek. A vizsgálatok szerint a termékek 25 %-a ténylegesen első osztályú, a többi másodosztályú.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy egy első osztályúnak minősített termék valóban első osztályú?
(b) Mi a valószínűsége, hogy egy termék hibás minősítést kap?

20. Egy fontos irat egyforma valószínűséggel lehet otthon és a munkahelyünkön. Utóbbi esetben az íróasztalunk négy fiókjában ugyanakkora eséllyel lehet. Már három fiókot átnéztünk, azokban nem volt. Mekkora a valószínűsége, hogy az utolsó fiókban van?

21. Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármass útélágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveletésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak fogalma sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, egyenlő eséllyel adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi 2:2, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?³

22. Két játékos (A és B) a következő szabály szerint játszik: A feldob egy dobókockát, majd azután két érmét annyiszor dob föl, amennyit a kockával dobott. Ha ennek során legalább egyszer mindkét érmevel fejet dob, akkor B fizet A -nak 100 Ft-ot, különben A fizet B -nek 100 Ft-ot. Melyikük nyer nagyobb valószínűséggel?

23. Valaki $2/3$ valószínűséggel tartózkodik kocsmában, a falu öt kocsmáját egyformán szereti. Négy kocsmában megnézték, de egyikben sem volt. Mi a valószínűsége, hogy az ötödikben van?

24. Az igazak városában a lakosok 95 %-a igazat mond, a hazugok városában pedig a lakosok 80 %-a hazudik. Nem tudjuk, hogy melyik városban vagyunk, 0,5–0,5 valószínűséggel lehetünk bármelyikben. Megkérdeztünk egy embert, és ő azt mondta, hogy ez a hazugok városa. Mi a valószínűsége, hogy igazat mond?

³forrás: Arató Miklós, Prokaj Vilmos, Zempléni András: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba: példákkal, szimulációkkal