

5. Valószínűségi változó, eloszlás, eloszlásfüggvény

Szükséges új ismeretek: *A valószínűségi változó fogalma. Diszkrét valószínűségi változó eloszlása. Az eloszlásfüggvény tulajdonságai. Valószínűségek meghatározása eloszlásfüggvény segítségével.*

Elméleti anyag, példák, kidolgozott feladatok: *J1: 4. fejezet (4.3. még nem kell); J2: 6. fejezet (6.3. még nem kell).*

- Két szabályos dobókockát elgurítunk. Adjuk meg a következő valószínűségi változók eloszlását:
 - ξ_1 legyen a dobott számok szorzatának kettővel vett maradéka,
 - ξ_2 legyen a dobott számok összege,
 - ξ_3 legyen a dobott számok közül a nem kisebb,
 - ξ_4 legyen a két szám különbségének abszolút értéke!
- Egy pakli magyar kártyából húzunk két lapot. Adjuk meg a kihúzott ászok számának eloszlását,
 - ha visszatevéssel húzunk,
 - ha visszatevés nélkül húzunk!
- Egy pakli magyar kártyából addig húzunk, amíg nem húzunk ászt. Jelölje ξ a húzások számát. Adjuk meg ξ eloszlását,
 - ha visszatevéssel húzunk,
 - ha visszatevés nélkül húzunk!
- Egy urnában 3 piros és 7 fehér golyó van. Az urnából 3 golyót húzunk, jelölje η a kihúzott pirosak számát. Adjuk meg η eloszlását,
 - ha visszatevéssel húzunk,
 - ha visszatevés nélkül húzunk!
- Legyen η az a valószínűségi változó, mely azt adja meg, hogy n kockadobásból mi volt a legnagyobb szám. Adjuk meg η eloszlását és igazoljuk, hogy valóban eloszlást kaptunk!
- Legyen ϑ az a valószínűségi változó, mely azt adja meg, hogy lottóhúzásnál mi volt a legnagyobb szám. Adjuk meg ϑ eloszlását és igazoljuk, hogy valóban eloszlást kaptunk!
- Egy szabályos érmével addig dobunk, amíg nem kapunk fejet. Jelölje ξ a szükséges dobások számát.
 - Adjuk meg ξ eloszlását!
 - Ábrázoljuk ξ eloszlásfüggvényét!
 - Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 4 dobásra lesz szükség?
 - Mi a valószínűsége annak, hogy legalább 3 dobás kell?
- Tekintsük a $(0; 2)$ intervallumot. Ebből választunk teljesen véletlenszerűen egy számot. Jelölje ξ a választott értéket.
 - Írjuk fel és ábrázoljuk ξ eloszlásfüggvényét!
 - Mi a valószínűsége annak, hogy ξ értéke kisebb, mint 0,7?
 - Mi a valószínűsége annak, hogy ξ értéke pontosan 1,2?
 - Feltéve, hogy a választott szám legalább $\sqrt{2}$, mi a valószínűsége annak, hogy kevesebb, mint $\sqrt{\pi}$?
- Egy egységnyi hosszú szakaszon válasszunk véletlenszerűen egy pontot, amely a szakaszt két részre osztja. A nagyobbik rész hossza legyen ξ .
 - Írjuk fel és ábrázoljuk ξ eloszlásfüggvényét!
 - Mi a valószínűsége annak, hogy a két rész hossza egyenlő?

- c) Mi a valószínűsége annak, hogy a hosszabb rész kétszer akkora, mint a másik?
- d) Mi a valószínűsége annak, hogy a hosszabb rész *legalább* kétszer akkora, mint a másik?
- e) Mi a valószínűsége annak, hogy ξ értéke 0,7 és 0,8 közé esik?
- f) Feltéve, hogy a hosszabb rész 0,8-nél rövidebb, mi a valószínűsége annak, hogy 0,7-nél hosszabb?

10. Egy 2×4 -es asztalra véletlenszerűen ledobunk egy pénzérmét (pontot). Jelentse ξ az érmének a hozzá legközelebbi oldaltól mért távolságát.

- a) Írjuk fel és ábrázoljuk ξ eloszlásfüggvényét!
- b) Mi a valószínűsége annak, hogy ξ értéke legalább 0,5?

11. Egy 3 egység sugarú gömbön belül teljesen véletlenszerűen választunk egy pontot. Legyen ξ értéke a gömb középpontjának és a választott pontnak a távolsága.

- a) Írjuk fel és ábrázoljuk ξ eloszlásfüggvényét!
- b) Mi a valószínűsége annak, hogy ξ értéke legalább 2?
- c) Mi a valószínűsége annak, hogy ξ értéke 1 és 2 közé esik?
- d) Mi a valószínűsége annak, hogy a pont 0,5 egységnél közelebb van a gömbhöz?
- e) Feltéve, hogy a választott pont 2 egységnél közelebb van a gömbhöz, mi a valószínűsége annak, hogy 2 egységnél közelebb van a gömb középpontjához?

12. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{32}{x^5} & \text{ha } x > 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$. Számítsuk ki az alábbi valószínűségeket:

- | | | | |
|--------------------|--------------------|------------------------------|------------------------------|
| a) $P(\xi < 4)$ | d) $P(\xi \geq 2)$ | g) $P(6 \leq \xi < 8)$ | j) $P(\xi < 6 \mid \xi > 4)$ |
| b) $P(\xi < 1)$ | e) $P(\xi = 5)$ | h) $P(-4 < \xi < 4)$ | k) $P(\xi > 6 \mid \xi > 4)$ |
| c) $P(\xi \geq 3)$ | f) $P(\xi > 5)$ | i) $P(\xi < 4 \mid \xi < 6)$ | l) $P(\xi < 4 \mid \xi > 6)$ |

13. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{125}{x^3} & \text{ha } x > 5 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$. Számítsuk ki az alábbi valószínűségeket:

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| a) $P(\xi < 10)$ | d) $P(\xi \geq 3)$ | g) $P(6 \leq \xi < 12)$ | j) $P(\xi < 8 \mid \xi > 6)$ |
| b) $P(\xi < 4)$ | e) $P(\xi = 10)$ | h) $P(-10 < \xi < 10)$ | k) $P(\xi > 12 \mid \xi > 10)$ |
| c) $P(\xi \geq 8)$ | f) $P(\xi > 10)$ | i) $P(\xi < 10 \mid \xi < 20)$ | l) $P(\xi < 10 \mid \xi > 15)$ |

14. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{35} & \text{ha } 1 < x \leq 6 \\ 1 & \text{ha } x > 6 \end{cases}$. Számítsuk ki az alábbi valószínűségeket:

- | | | | |
|--------------------|--------------------|------------------------------|------------------------------|
| a) $P(\xi < 5)$ | d) $P(\xi \leq 3)$ | g) $P(2 \leq \xi < 4)$ | j) $P(\xi < 5 \mid \xi > 3)$ |
| b) $P(\xi > 1)$ | e) $P(\xi = 5)$ | h) $P(-3 < \xi < 3)$ | k) $P(\xi > 4 \mid \xi < 5)$ |
| c) $P(\xi \geq 4)$ | f) $P(\xi > 4)$ | i) $P(\xi < 3 \mid \xi < 4)$ | l) $P(\xi > 5 \mid \xi < 7)$ |

15. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0,5 \cdot x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$. Számítsuk ki az alábbi valószínűségeket:

- | | | | |
|------------------|------------------------|------------------------------|------------------------------|
| a) $P(\xi < 2)$ | c) $P(\xi \geq 2)$ | e) $P(-2 < \xi < 2)$ | g) $P(\xi < 3 \mid \xi > 2)$ |
| b) $P(\xi < -1)$ | d) $P(1 \leq \xi < 2)$ | f) $P(\xi < 2 \mid \xi < 3)$ | h) $P(\xi > 3 \mid \xi > 2)$ |