

7. Nevezetes diszkrét eloszlások I.

Szükséges új ismeretek: *Neveztes diszkrét eloszlások és tulajdonságaik: karakterisztikus, binomiális, hipergeometriai, geometriai, negatív binomiális.*

Elméleti anyag, példák, kidolgozott feladatok: *J1: 6. fejezet; J2: 9. fejezet.*

Binomiális eloszlás

- Egy gyártmányból 5% selejtes. A darabokat százasaival dobozokba rakják. Mi a valószínűsége, hogy egy dobozban
 - nincs selejt?
 - van selejt?
 - pontosan 10 selejt van?
 - pontosan annyi selejt van, amennyi a várható érték?
 - a selejtelek száma a várható értéktől a szórásnál kevesebbel tér el?
- Egy nyolcfős bizottságból mindenki azonos, 20 %-os valószínűséggel hiányzik. A bizottság döntésképes, ha a tagok fele + 1 fő jelen van. Mi a valószínűsége, hogy a bizottság döntésképtelen lesz?
- Egy bolha a nullából indulva ugrál a számegyenesen. Minden ugrása egységnyi hosszú, és a többi ugrástól függetlenül p valószínűséggel jobbra, $1 - p$ valószínűséggel balra történik. Az ötödik ugrás után megfigyeljük a bolha helyét. Adjuk meg ennek az eloszlását!
- Bogyó és Babóca egy-egy szabályos dobókockával dobnak. Bogyó akkor nyer, ha nagyobbat dob, mint Babóca. Összesen öt kört játszanak.
 - Mi a valószínűsége annak, hogy Bogyó legalább négyszer nyer?
 - Mi a valószínűsége annak, hogy Bogyó pontosan annyszor nyer, amennyi a várható érték?
 - Mi a valószínűsége annak, hogy Bogyó a várható értéknél többször nyer?
- Létezik-e olyan binomiális eloszlás, melynek várható értéke 10, szórása pedig 3?
- Feldobunk 20 darab pénzérmét, majd annyi dobókockát, ahány fejet dobtunk. Milyen eloszlással modellezzük a dobott hatosok számát?
- Hányszor kell egy szabályos dobókockát feldobni, hogy a legnagyobb legyen annak a valószínűsége, hogy pontosan egy hatos van a dobott számok között?
- Ha az A esemény valószínűsége $\frac{k}{n}$, akkor mennyi a valószínűsége, hogy az A esemény n kísérletből pontosan k -szor következik be?
- Egy tesztben 20 kérdést tesznek fel, amelyekre négy-négy lehetséges válasz van, ezek közül egy jó. Tegyük fel, hogy 14 kérdésre tudjuk a helyes választ, a többire viszont csak tippelünk. Mi a valószínűsége, hogy legalább 90%-os eredményt érünk el?

Hipergeometriai eloszlás

- Egy dobozban 12 fekete és 18 piros golyó van. Öt golyót kihúzunk visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy
 - mind az öt piros?
 - pontosan három fekete?
 - több pirosat húzunk, mint feketét?
- Adjuk meg a hatos lottón elért találatainkat jellemző valószínűségi változó eloszlását és várható értékét!

Geometriai eloszlás

12. Cső Bendegúz 0,25 valószínűséggel vizsgálja eredményesen egy bizonyos tárgyból (a régi szép időkben nem kellett küzdeni az aláírásért).
 - (a) Mi a valószínűsége, hogy egy tárgyfelvétellel teljesíti a tárgyat?
 - (b) Mi a valószínűsége, hogy három tárgyfelvétel és egy méltányossági vizsga után sem sikerül teljesítenie a tárgyat?
13. Egy villamoson $p = 0,05$ valószínűséggel jelennek meg ellenőrök, és a bliccelőket 16 000 forintba megbírságozzák (természetesen megvetetik vele a jegyet is). Mennyi a valószínűsége, hogy a bírság fedezi egy bliccelő által a lebukásig okozott kárt, ha a jegy ára 350 forint?
14. Egy kedves ismeretlen a következő játékra akar minket rávenni: fizetünk neki 2000 Ft-ot, majd egy kockával az első hatosig dobunk. Nyereményünk a dobások száma $\times$ 300 Ft.
 - (a) Kinek kedvező a játék?
 - (b) Mi a valószínűsége, hogy számunkra nyereséges lesz a játék?
15. Tegyük fel, hogy minden megszületendő gyermek 0,5 valószínűséggel fiú, 0,5 valószínűséggel lány, függetlenül attól, hogy a szülőknél korábban milyen nemű gyermekeik születtek. Ha minden házaspár addig és csak addig vállalna gyereket, amíg a várva várt fiú megszületik, akkor a populáció elnőiesedne, elférfiasodna vagy maradna a férfiak és a nők 50%-os közel megoszlása?
16. András és Béla a következő játékot játssza: feldobnak 3 érmét és azt figyelik, hogy 3 fej vagy 3 írás van-e. Ha ez először páros sokadik dobásra következik be, akkor András nyer, ha páratlanadikra, akkor pedig Béla. Véget ér-e a játék? Kinek kedvez? Várhatóan hányadik dobásra következik be a figyelt esemény? Nem mond ez ellent az előző kérdésre adott válasznak? Magyarázzuk meg!
17. Mi lesz két független, p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó összegének eloszlása?
18. Egy izzó minden egyes bekapcsoláskor 0,002 valószínűséggel kiég. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke a kiégésig történő bekapcsolások száma. Határozzuk meg ξ várható értékét és szórását! Mennyi a valószínűsége annak, hogy a várható értéknél tovább tudjuk használni az izzót?
19. Egy urnában 10 piros, 10 fehér és 2 zöld golyó van. Ebből egy játékos addig húzhat, amíg az első zöldet kihúzza. Ekkor a másik játékos annyiszor 1000 Ft-ot fizet neki, amennyi golyót kihúzott, majd ő húz zöldig. Ekkor az első játékos fizet a másodiknak annyiszor 1000 Ft-ot, amennyi golyót húzott. Igazságos-e ez a játék?
20. Egy szabályos dobókockával addig dobunk, amíg minden szám ki nem jön. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?
21. Egy áruházban 1000 Ft-onként kapunk egy teljesen véletlenszerűen választott matricát, melyet egy albumba ragaszthatunk. A teljes albumhoz összesen 100 különböző matricát kell összegyűjteni. Várhatóan hány matricát kapunk addig, amíg betelik az album? Ehhez mekkora összegben kell vásárolnunk az áruházban?

Negatív binomiális eloszlás

22. Egy kockával addig dobunk ismételten, míg négy darab hatost nem dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább hétszer kellett dobni? Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?
23. Mától kezdve Kovács úr minden héten egyszer elmegy a szeretőjéhez, és erről a felesége 0,1 valószínűséggel szerez tudomást. Tudjuk, hogy Kovácsné a harmadik ismert félrelépés után kirúgja a férjét.
 - (a) Mi a valószínűsége, hogy 6 hét múlva még együtt lesznek?
 - (b) Mi a valószínűsége, hogy 20 hét múlva már nem lesznek együtt?
 - (c) Mi a valószínűsége, hogy Kovács urat éppen 21 hét múlva rúgja ki a felesége?
 - (d) Várhatóan mennyi idő telik el két lebukás között?
 - (e) Várhatóan mennyi ideig lesznek még együtt Kovácsék?
24. Rulettezni megyünk. Azt a rendkívül furfangos stratégiát választjuk, hogy minden körben a pirosra teszünk egy zsetont. A játékot akkor hagyjuk abba, ha összesen már ötször nyertünk.
 - (a) Mi a valószínűsége, hogy pontosan 8 kört fogunk játszani?
 - (b) Mi a valószínűsége, hogy legalább 9 kört fogunk játszani?